
3 5711 00077 9844

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 21 DECEMBER 1916 - TOT 27 APRIL 1917 -

DEEL XXV
(2DE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
: JULI 1917 :

INHOUD.





KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN DONDERDAG 21 DECEMBER 1916.

DEEL XXV.

N°. 6.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1. Bericht van de Heeren J. CARDINAAL, F. A. H. SCHREINEMAKERS, I. K. A. WERTHEIM SALOMONSON en H. KAMERLINGH ONNES dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2. Schrijven van den Heer EDW. R. JACOBSON te Bandoeng dd. October 1916, waarin hij, onder dankzegging, de benoeming tot Correspondent der Afdeeling aanneemt.

Voor kennisgeving aangenomen.

3. Schrijven van den Heer A. C. OUDEMANS te Arnhem, waarbij hij met verzoek om uitgave in de werken der Akademie, toezendt het manuscript zijner verhandeling: „*Dodo-studiën*".

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren MAX

WEBER en J. F. VAN BEMMELEN met verzoek hierover in de volgende vergadering van advies te dienen.

4. Schrijven van den Heer EDUARD MIER te Madrid, met verzoek om het oordeel der Akademie te mogen vernemen over den inhoud van zijne door hem voor de bibliotheek der Akademie ten geschenke aangeboden brochure, getiteld: *„Les ecuaciones fundamentales y el amortiguamiento de los sismografos"*, waarvan tevens de Fransche vertaling wordt bijgevoegd.

Op voorstel van den Voorzitter zal den Heer MIER geantwoord worden dat, volgens § 10 van het Reglement van Orde der Afdeeling, de Akademie zich niet verklaart over de waarde van eenig haar ter beoordeeling toegezonden boekwerk.

Scheikunde. — De Heer SCHREINEMAKERS biedt eene mededeeling aan over: *„In-, mono- en divariante evenwichten."* XIII.

21. *Ternaire systemen met twee indifferente phasen.*

In de vorige mededeeling hebben wij de vier P,T-diagramtypen afgeleid, die optreden in ternaire stelsels met twee indifferente phasen. Wij zullen thans een geval nader beschouwen.

Wij nemen een ternair stelsel met de komponenten water en de twee niet vluchtige zouten Z en A, waarin van het zout Z ook nog het hydraat $Z.nH_2O$ optreedt, dat wij door Z_n zullen voorstellen. (fig. 1).

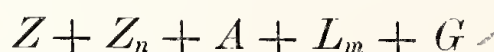
In het binaire stelsel $W+Z$ trede bij de temperatuur T_d en den druk P_d het invariante evenwicht:



$$Z + Z_n + L_d + G$$

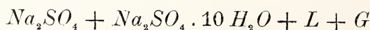
op. De vloeistof L_d is in fig. 1 door het punt d tusschen W en Z_n voorgesteld; wij hadden d natuurlijk ook tusschen Z en Z_n kunnen nemen. Voegt men bij dit evenwicht het zout A dan ontstaat het evenwicht $Z+Z_n+L+G$; de vloeistof L doorloopt dan eene curve dhm (fig. 1). Het is duidelijk dat T en P langs deze kurve dhm van punt tot punt veranderen.

Wij nemen nu aan dat in het punt m het toegevoegde zout A niet meer oplost, zoodat zich bij T_m en P_m het invariante evenwicht:



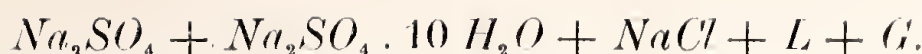
$$Z + Z_n + A + L_m + G$$

vormt. Een dergelijk geval vindt men b. v. in het stelsel: *water* $+ Na_2SO_4 + NaCl$. In het binaire stelsel: *water* $+ Na_2SO_4$ treedt nl. bij ± 32°.5 het evenwicht:

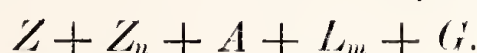


$$Na_2SO_4 + Na_2SO_4 . 10\,H_2O + L + G$$

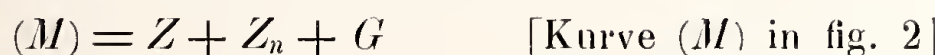
op. Bij toevoeging van $NaCl$ ontstaat bij 17°.9


$$Na_2SO_4 + Na_2SO_4 \,.\, 10\, H_2O + NaCl + L + G.$$

Daar de gasphase G in fig. 1 door het punt W voorgesteld wordt, liggen de phasen Z, Z_n en G op eene rechte lijn. Z, Z_n en G zijn dus de singuliere, A en L_m de indifferente phasen van het evenwicht:


$$Z + Z_n + A + L_m + G.$$

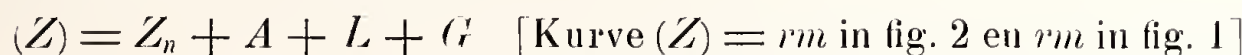
Van het invariante punt gaan dus uit:
de singuliere evenwichten:


$(M) = Z + Z_n + G$ [Kurve (M) in fig. 2]


$(A) = Z + Z_n + L + G$ [Kurve $(A) = md$ in fig. 2 en md in fig. 1]


$(L) = Z + Z_n + A + G$ [Kurve $(L) = mt$ in fig. 2]

en verder de evenwichten:


$(Z) = Z_n + A + L + G$ [Kurve $(Z) = rm$ in fig. 2 en rm in fig. 1]


$(Z_n) = Z + A + L + G$ [Kurve $(Z_n) = mb$ in fig. 2 en mb in fig. 1]


$(G) = Z + Z_n + A + L$ [Kurve (G) in fig. 2]

Beschouwen wij eerst het binaire stelsel $W + Z$, waarin bij T_d en P_d het invariante evenwicht:


$$Z + Z_n + L_d + G$$

optreedt. Van het invariante punt d (fig. 2) gaan de evenwichten:


$Z + L + G$, voorgesteld door kurve da (fig. 2)


$Z_n + L + G$, ... do (fig. 2)


$Z + Z_n + L$, ... ds (fig. 2)


$Z + Z_n + G$, ... dmt (fig. 2)

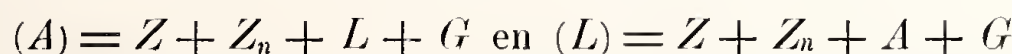
uit. De oplossingen van het eerste evenwicht worden in fig. 1 voorgesteld door punten van da, die van het tweede door punten van do. Kurve ds is in fig. 2 verticaal geteekend; het boogje met de pijlen geeft aan dat zij zoowel een weinig naar rechts als naar links kan loopen. [Dit boogje heeft dezelfde beteekenis voor de kurve (G) in deze en volgende figuren.]

Dat kurve $t\,m\,d$ eene met de temperatuur stijgende kurve is, volgt uit de reactie: $Z_n \rightleftarrows Z + G$ die tusschen de phasen van het evenwicht $Z + Z_n + G$ kan optreden. Bij deze reactie van links naar rechts neemt nl. zoowel het volume als de entropie toe.

Deze kurve $d\,m\,t$ is tevens de (M)-kurve van het ternaire stelsel $W + Z + A$. Op deze kurve ligt dus ook ergens het punt m, waarin het invariante evenwicht:


$$Z + Z_n + A + L_m + G$$

van het ternaire stelsel optreedt. De beide andere singuliere evenwichten:


$$(A) = Z + Z_n + L + G \text{ en } (L) = Z + Z_n + A + G$$

vallen met deze kurve $t\,m\,d$ samen. Daar het evenwicht (A) bij

hoogere drukken en temperaturen bestaat dan het evenwicht (L), zoo wordt (A) door kurve $m\,d$ en (L) door kurve mt in fig. 2 voorgesteld. [Wij zullen dit later nog op eene andere wijze aantoonen].

Het evenwicht $(G) = Z + Z_n + A + L$ gaat van m uit naar hoogere drukken en kan zoowel naar hoogere als naar lagere temperaturen gaan. [Wij komen later hierop terug].

Wij moeten thans in fig. 2 nog de kurven (Z) en (Z_n) teekenen. Wij beschouwen daartoe het concentratiediagram van fig. 1. Hierin zijn de oplossingen van:

$(A) = Z + Z_n + L + G$ door kurve $m\,d$
$(Z) = Z_n + A + L + G$ „ „ $m\,r$
$(Z_n) = Z + A + L + G$ „ „ $m\,b$

voorgesteld. Wij maken de voor de hand liggende veronderstelling dat de kurven $m\,d$ en $m\,b$ van m uit naar hoogere en dat kurve $m\,r$ van m uit naar lagere temperaturen gaat. [Wij komen later hierop terug].

De gestippelde kurven zijn de verzadigingskurven van Z_n, Z en A onder eigen dampdruk; de pijltjes geven de richting aan, waarin de druk toeneemt.

De velden, waarin Z_n, Z en A als vaste stoffen optreden, zijn door omcirkelde letters aangegeven.

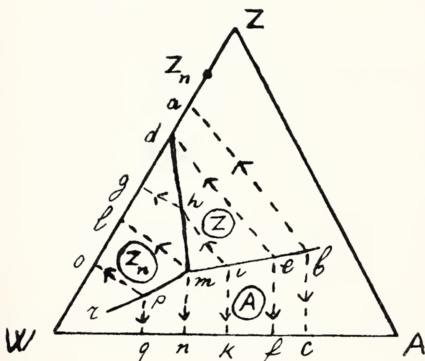


Fig. 1.

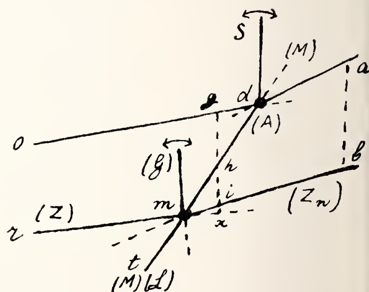


Fig. 2.

Uit de richting van het pijltje op kurve $h\,i$ (fig. 1) blijkt dat de dampdruk in h hooger is dan in i. Deze verzadigingskurve $h\,i$ wordt in fig. 2 voorgesteld door eene rechte lijn $h\,i$ evenwijdig aan

de P-as; het punt h ligt dus hooger dan het punt i, zoodat kurve $m\,h\,d$ boven kurve $m\,i\,b$ moet liggen.

Kurve $a\,b$ uit fig. 1 wordt in fig. 2 voorgesteld door de rechte lijn $a\,b$ evenwijdig aan de P-as; daar volgens fig. 1 de druk in a grooter is dan in b, moet in fig. 2 punt a boven punt b liggen en kurve $d\,a$ dus boven kurve $m\,b$.

Wij hebben in fig. 2 kurve $m\,b$ van m uit naar hoogere drukken geteekend; wij zullen later zien dat dit niet altijd het geval behoeft te zijn.

Wij moeten thans in fig. 2 nog de ligging van kurve (Z) ten opzichte van de andere kurven bepalen. Men kan dit op verschillende wijzen, wij zullen aantoonen dat het metastabiele verlengde $m\,x$ van kurve $r\,m$ beneden kurve $m\,b$ ligt.

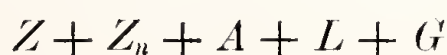
Wij denken ons daartoe in fig. 1 de kurven $g\,h$ en $k\,i$ verlengd tot zij elkaar snijden in een punt x. Dit snijpunt is een punt van het metastabiele verlengde van kurve $r\,m$. Daar $T_x = T_h = T_g = T_i$ is, liggen de punten x, h, g en i in fig. 2 op eene rechte lijn evenwijdig aan de P-as. Uit fig. 1 blijkt dat de dampdruk in punt x kleiner is dan in h en in i; in fig. 2 ligt het punt x dus beneden punt i, zoodat kurve mx beneden kurve mb ligt.

Men zou in fig. 2 ook nog de P,T-kurve van het evenwicht $A + L + G$ van het binaire stelsel $W + A$ kunnen teekenen; uit fig. 1 blijkt dat deze kurve in fig. 2 boven de kurven $r\,m$ en $m\,b$ moet liggen.

Wij hebben in onze vorige beschouwingen voor de afleiding van het P,T-diagram denzelfden weg gevolgd als bij de afleiding van de P,T-diagrammen voor enkele bijzondere gevallen in binaire stelsels [Mededeeling XI]. Wij hebben n.l. gebruik gemaakt van de concentratiediagrammen en eenige hunner eigenschappen. In het thans behandelde geval gebruikten wij de eigenschap dat de dampdruk langs de verzadigingskurven in de richting der pijltjes toeneemt. Verder hebben wij de voor de hand liggende veronderstelling gemaakt dat in het concentratiediagram (fig. 1) de kurven mb en md van m uit naar hoogere en dat kurve mr van m uit naar lagere temperaturen gaat.

Wij kunnen echter ook een geheel anderen weg volgen, waar wij zoowel het P,T- als het concentratiediagram kunnen afleiden en waarop wij ons ook beter rekenschap kunnen geven van de veronderstellingen, die bij de afleidingen worden aangenomen.

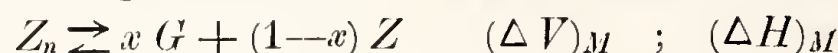
Wij beschouwen daartoe de verschillende reacties, die in het invariante evenwicht:



$$Z + Z_n + A + L + G$$

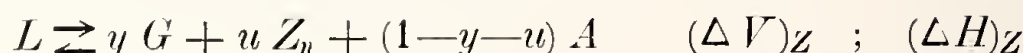
kunnen optreden. Wij zullen hierbij aannemen, dat de vloeistof L in fig. 1 voorgesteld wordt door een punt m binnen den driehoek $Z_n A W$. Uit de ligging der vijf phasen ten opzichte van elkaar in fig. 1 volgen de reacties:

1. Voor het singuliere evenwicht $(M) = Z + Z_n + G$



$$Z_n \rightleftarrows x\,G + (1-x)\,Z \qquad (\Delta V)_M \quad ; \quad (\Delta H)_M$$

2. Voor het evenwicht $(Z) = Z_n + A + L + G$

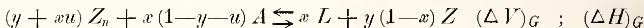


$$L \rightleftarrows y\,G + u\,Z_n + (1-y-u)\,A \qquad (\Delta V)_Z \quad ; \quad (\Delta H)_Z$$

Hierin hebben $x, y, u, 1-x$ en $1-x-y$ positieve waarden, die te bepalen zijn als de samenstellingen der phasen bekend zijn. $(\Delta V)_M$ en $(\Delta H)_M$ zijn de volume- en entropieveranderingen als reactie (1) van links naar rechts verloopt, zoodat de opgegeven hoeveelheden aan de reactie deelnemen. Hetzelfde geldt voor $(\Delta V)_Z$ en $(\Delta H)_Z$. Bij de volgende reacties zullen wij de volume- en entropieveranderingen op dezelfde wijze aangeven.

Men kan nu, zooals vroeger besproken, uit 1 en 2 de reacties voor de andere monovariante evenwichten en ook de isovolumetrische en isentropische reactie afleiden. Men vindt

3. Voor het evenwicht $(G) = Z + Z_n + A + L$

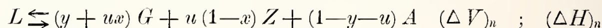


$$(y + xu)\,Z_n + x\,(1-y-u)\,A \leftrightarrows x\,L + y\,(1-x)\,Z \quad (\Delta V)_G \quad ; \quad (\Delta H)_G$$

Hierin is:

$$(\Delta V)_G = y\,(\Delta V)_M - x\,(\Delta V)_Z \quad ; \quad (\Delta H)_G = y\,(\Delta H)_M - x\,(\Delta H)_Z$$

4. Voor het evenwicht $(Z_n) = Z + A + L + G$

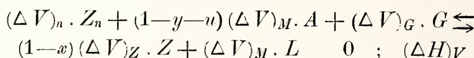


$$L \leftrightarrows (y + ux)\,G + u\,(1-x)\,Z + (1-y-u)\,A \quad (\Delta V)_n \quad ; \quad (\Delta H)_n$$

Hierin is:

$$(\Delta V)_n = u\,(\Delta V)_M + (\Delta V)_Z \quad ; \quad (\Delta H)_n = u\,(\Delta H)_M + (\Delta H)_Z$$

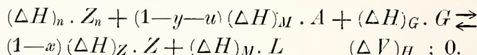
5. Voor de isovolumetrische reactie



$$(\Delta V)_n \,.\, Z_n + (1-y-u)\,(\Delta V)_M \,.\, A + (\Delta V)_G \,.\, G \leftrightarrows$$
$$(1-x)\,(\Delta V)_Z \,.\, Z + (\Delta V)_M \,.\, L \qquad 0 \quad ; \quad (\Delta H)_V$$

Hierin is: $(\Delta H)_V = (\Delta V)_Z \,.\, (\Delta H)_M - (\Delta V)_M \,.\, (\Delta H)_Z$

6. Voor de isentropische reactie



$$(\Delta H)_n \,.\, Z_n + (1-y-u)\,(\Delta H)_M \,.\, A + (\Delta H)_G \,.\, G \rightleftarrows$$
$$(1-x)\,(\Delta H)_Z \,.\, Z + (\Delta H)_M \,.\, L \qquad (\Delta V)_H \; ; \; 0.$$

Hierin is: $(\Delta V)_H = (\Delta V)_M \,.\, (\Delta H)_Z - (\Delta V)_Z\,(\Delta H)_M$

dus: $$(\Delta V)_H = -(\Delta H)_V$$

Om de optredende volume- en entropieveranderingen op andere wijze uit te drukken, stellen wij de volumina en entropiëen van de eenheid van hoeveelheid van de phasen:

$$Z \quad Z_n \quad A \quad L \quad \text{en} \quad G$$

door $\quad V_Z \; V_n \; V_A \; V_L$ en V_G

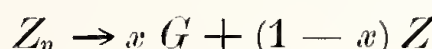
en $\quad H_Z \; H_n \; H_A \; H_L$ en H_G

voor. Met behulp der reacties 1—6 vinden wij:

$$(\Delta V)_M = x V_G + (1-x) V_Z - V_L$$
$$(\Delta H)_M = x H_G + (1-x) H_Z - H_L$$
$$(\Delta V)_Z = y V_G + u V_n + (1-y-u) V_A - V_L$$
$$(\Delta H)_Z = y H_G + u H_n + (1-y-u) H_A - H_L$$
$$(\Delta V)_G = x V_L + y(1-x) V_Z - (y+xu) V_n - x(1-y-u) V_A$$
$$(\Delta H)_G = x H_L + y(1-x) H_Z - (y+xu) H_n - x(1-y-u) H_A$$
$$(\Delta V)_n = (y+ux) V_G + u(1-x) V_Z + (1-y-u) V_A - V_L$$
$$(\Delta H)_n = (y+ux) H_G + u(1-x) H_Z + (1-y-u) H_A - H_L$$
$$(\Delta H)_V = (1-x)(\Delta V)_Z H_Z + (\Delta V)_M \,.\, H_L - (\Delta V)_n \,.\, H_n - (1-y-u)(\Delta V)_M \,.\, H_A - (\Delta V)_G H_G$$
$$(\Delta V)_H = (1-x)(\Delta H)_Z V_Z + (\Delta H)_M \,.\, V_L - (\Delta H)_n \,.\, V_n - (1-y-u)(\Delta H)_M \,.\, V_A - (\Delta H)_G V_G \,.$$

Wij moeten thans onderzoeken of deze volume- en entropieveranderingen positief of negatief zijn. Kende men de waarden van $x, y, u, V_Z \ldots, H_Z \ldots,$ dan waren die veranderingen gemakkelijk te berekenen. Als dit niet het geval is, dan moeten wij het al of niet positief zijn op andere wijze trachten te vinden.

$(\Delta V)_M$ en $(\Delta H)_M$ zijn de volume- en entropietoename bij de reactie:



$$Z_n \rightarrow x\, G + (1-x)\, Z$$

dus bij de splitsing van het hydraat Z_n in anhydrisch zout Z en waterdamp G. Wij mogen dus wel aannemen dat $(\Delta V)_M$ en $(\Delta H)_M$ positief zijn.

$(\Delta V)_Z$ en $(\Delta H)_Z$. Wij schrijven:

$$(\Delta V)_Z = y(V_G - V_A) + u V_n + (1-u) V_A - V_L$$
$$(\Delta H)_Z = y(H_G - H_A) + u H_n + (1-u) H_A - H_L .$$

Voor niet te kleine waarden van y zijn beide dus positief. Voor kleine waarden van y wordt $(\Delta H)_Z$ negatief; voor $y = 0$ vindt men nl.

$$(\Delta H)_Z = u H_n + (1-u) H_A - H_L$$

dat negatief is, als wij aannemen dat voor het smelten van vaste stoffen warmte noodig is. Voor zeer kleine waarden van y kan $(\Delta V)_Z$ negatief worden; hiertoe is noodig dat $u V_n + (1-u) V_A - V_L$ negatief is.

$(\Delta V)_G$ en $(\Delta H)_G$. Uit de waarde van $(\Delta V)_G$ blijkt dat dit zoowel positief als negatief kan zijn. $(\Delta H)_G$ is de entropieverandering bij reactie 3, waaraan alleen vaste stoffen en de vloeistof L deel-

nemen. Neemt men nu aan dat voor de vorming van vloeistof warmte noodig is, dan is $(\Delta H)_G$ positief.

$(\Delta V)_n$ en $(\Delta H)_n$. Wegens de groote waarde van V_G is $(\Delta V)_n$ altijd positief. Voor $y=0$ wordt:

$$(\Delta V)_n = ux\, V_G + u(1-x)\, V_Z + (1-u)\, V_A - V_L.$$

Ligt nu in fig. 1 het punt m niet in de onmiddellijke nabijheid van punt A, zoodat u en dus ook ux niet uiterst klein wordt, dan is $(\Delta V)_n$ zelfs voor $y=0$ nog positief.

$(\Delta H)_n$ is positief; voor kleine waarden van y kan het echter negatief worden; hiertoe is noodig dat

$$ux\, H_G + u(1-x)\, H_Z + (1-u)\, H_A - H_L$$

negatief is.

$(\Delta V)_H$ en $(\Delta H)_V$. Uit de voor $(\Delta V)_H$ opgegeven waarde blijkt dat deze, wegens de groote waarde van V_G, hetzelfde teeken heeft als $-(\Delta H)_G$. Hieruit blijkt dat $(\Delta V)_H < 0$ en $(\Delta H)_V > 0$ is.

Wij hebben boven gezien dat het teeken van $(\Delta V)_Z$, $(\Delta H)_Z$ en $(\Delta H)_n$ afhangt van de waarde van y, dus van de ligging van het punt m in fig. 1. Naar gelang nl. het punt m dichter bij de lijn AZ_n ligt, wordt y kleiner; ligt m op AZ_n dan is $y=0$.

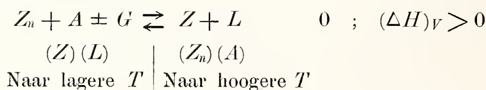
I. Wij beschouwen eerst het geval dat het punt m niet te dicht bij de lijn AZ_n ligt. Wij hebben dan:

$$(\Delta V)_M\ ,\ (\Delta V)_Z \text{ en } (\Delta V)_n > 0 \quad ; \quad (\Delta V)_H < 0 \quad ; \quad (\Delta V)_G \gtrless 0$$

$$(\Delta H)_M\ ,\ (\Delta H)_Z\ ,\ (\Delta H)_G\ ,\ (\Delta H)_n \text{ en } (\Delta H)_V > 0.$$

Uit 5 volgt, als men de reactiecoefficienten weglaat, voor de isovolumetrische reactie:

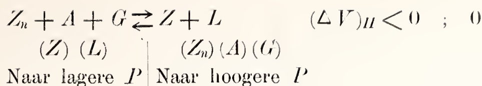
$$Z_n + A \pm G \rightleftarrows Z + L \qquad 0 \quad ; \quad (\Delta H)_V > 0$$



Daar $(\Delta V)_G$ zoowel positief als negatief kan zijn, geven wij in deze reactie aan de phase G zoowel het $+$ als het $-$ teeken.

Uit deze reactie volgt dat de kurven (Z) en (L) van uit het invariante punt m naar lagere temperaturen gaan en de kurven (Z_n) en (A) naar hoogere. Daar de phase G zoowel het positieve als het negatieve teeken kan hebben, is de richting van kurve (G) onbepaald; zij kan van uit het invariante punt zoowel naar hoogere als naar lagere T gaan.

Laat men in de isentropische reactie de coëfficienten weg, dan volgt uit 6:



Hieruit blijkt dat de kurven (Z) en (L) van uit het invariante punt naar lagere drukken gaan en de kurven (Z_n), (A) en (G) naar hoogere.

Uit deze beide reacties blijkt dat de kurven, wat hunne druk- en temperatuurrichting betreft, moeten liggen zooals in fig. 2. De kurven (Z) en (L) moeten nl. van uit m naar lagere P en T gaan, de kurven (Z_n) en (A) naar hoogere P en T. Kurve (G) moet van m uit naar hoogere P gaan, maar kan zoowel naar lagere als naar hoogere T gaan.

Wij moeten thans nog de ligging der kurven ten opzichte van elkaar bepalen. Wij moeten nl. nog aantoonen dat in fig. 2 kurve (Z_n) beneden kurve (A) ligt en boven het metastabiele verlengde van kurve (Z); enz.

Daar in de drie singuliere evenwichten (M), (A) en (L) dezelfde reactie (1) optreedt, is:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_M = \left(\frac{dP}{dT}\right)_A = \left(\frac{dP}{dT}\right)_L = \frac{(\Delta H)_M}{(\Delta V)_M}.$$

Voor het evenwicht (Z_n) heeft men:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_n = \frac{(\Delta H)_n}{(\Delta V)_n}$$

Hieruit volgt:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_A - \left(\frac{dP}{dT}\right)_n = \frac{(\Delta H)_M}{(\Delta V)_M} - \frac{(\Delta H)_n}{(\Delta V)_n}.$$

Daar $(\Delta V)_M$ en $(\Delta V)_n$ positief zijn, heeft het 2e lid hetzelfde teeken als:

$$(\Delta V)_n (\Delta H)_M - (\Delta V)_M (\Delta H)_n$$

Daar volgens (4):

$$(\Delta V)_n = u(\Delta V)_M + (\Delta V)_Z \quad \text{en} \quad (\Delta H)_n = u(\Delta H)_M + (\Delta H)_Z$$

is, gaat die vorm over in:

$$(\Delta V)_Z (\Delta H)_M - (\Delta V)_M (\Delta H)_Z = (\Delta H)_V > 0.$$

Hieruit blijkt dus;

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_A - \left(\frac{dP}{dT}\right)_n > \text{ of } \left(\frac{dP}{dT}\right)_A > \left(\frac{dP}{dT}\right)_n$$

of kurve (A) moet in fig. 2 boven kurve (Z_n) liggen.

Wij nemen thans:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_n - \left(\frac{dP}{dT}\right)_Z = \frac{(\Delta H)_n}{(\Delta V)_n} - \frac{(\Delta H)_Z}{(\Delta V)_Z}.$$

Het tweede lid heeft hetzelfde teeken als:

$$(\Delta V)_Z (\Delta H)_n - (\Delta V)_n (\Delta H)_Z .$$

Substitueert men hierin weer de waarden van $(\Delta V)_n$ en $(\Delta H)_n$ uit 4, dan gaat het over in $u(\Delta H)_V > 0$. Hieruit volgt:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_n - \left(\frac{dP}{dT}\right)_Z > 0 \quad \text{of} \quad \left(\frac{dP}{dT}\right)_n > \left(\frac{dP}{dT}\right)_Z$$

of kurve (Z_n) moet in fig. 2 boven het verlengde van kurve (Z) liggen.

II. Wij laten thans het punt m in fig. 1 dichter tot de lijn AZ_n naderen, zoodat y kleine waarden krijgt. Zoolang de volume- en entropieveranderingen hetzelfde teeken behouden als in I, krijgen wij een P,T-diagram als in fig. 2.

Voor kleine waarden van y kunnen $(\Delta V)_Z$, $(\Delta H)_Z$ en $(\Delta H)_n$ van teeken veranderen en dus negatief worden; wij zullen deze gevallen thans nader beschouwen.

De eerste dezer drie grootheden, die bij het kleiner worden van y negatief wordt, is

$$(\Delta H)_Z = y(H_G - H_A) + u H_n + (1-u) H_A - H_L.$$

Wordt $(\Delta V)_Z = y(V_G - V_A) + u V_n + (1-u) V_A - V_L$ negatief, dan kan dit echter, wegens de groote waarde van V_G, eerst voor zeer kleine waarden van y.

$(\Delta H)_n$ kan eerst negatief worden. als $(\Delta H)_Z$ negatief is; dit volgt uit:

$$(\Delta H)_n = u(\Delta H)_M + (\Delta H)_Z$$

waarin $u(\Delta H)_M$ positief is.

Wij onderscheiden dus vier gevallen.

a. $(\Delta H)_Z < 0$; $(\Delta V)_Z > 0$; $(\Delta H)_n > 0$

b. $(\Delta H)_Z < 0$; $(\Delta V)_Z > 0$; $(\Delta H)_n < 0$

c. $(\Delta H)_Z < 0$; $(\Delta V)_Z < 0$; $(\Delta H)_n > 0$ $(\Delta V)_G > 0$

d. $(\Delta H)_Z < 0$; $(\Delta V)_Z < 0$; $(\Delta H)_n < 0$ $(\Delta V)_G > 0$.

In *c* en *d* is tevens $(\Delta V)_G > 0$ genomen; dat dit zoo zijn moet volgt uit:

$$(\Delta V)_G = y(\Delta V)_M - x(\Delta V)_Z$$

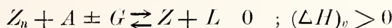
Hieruit blijkt nl. dat voor uiterst kleine waarden van y [en voor deze alleen kan $(\Delta V)_Z$ negatief worden] $(\Delta V)_G$ en $(\Delta V)_Z$ tegengesteld teeken hebben.

a. Wij hebben thans:

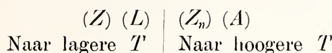
$$(\Delta V)_M,\ (\Delta V)_Z \text{ en } (\Delta V)_n > 0;\ (\Delta V)_H < 0;\ (\Delta V)_G \gtrless 0$$

$$(\Delta H)_M,\ (\Delta H)_G,\ (\Delta H)_n \text{ en } (\Delta H)_v > 0;\ (\Delta H)_Z < 0.$$

Laat men in (5) de coefficienten weg, dan wordt de isovolumetrische reactie:

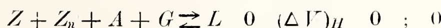


$$Z_n + A \pm G \rightleftarrows Z + L \quad 0 \quad ; (\Delta H)_v > 0$$

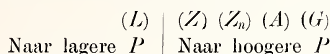


(Z) (L)	(Z_n) (A)
Naar lagere *T*	Naar hoogere *T*

Uit (6) volgt voor de isentropische reactie:



$$Z + Z_n + A + G \rightleftarrows L \quad 0 \quad (\Delta V)_H \quad 0 \quad ; \quad 0$$



(L)	(Z) (Z_n) (A) (G)
Naar lagere *P*	Naar hoogere *P*

Uit deze beide reacties volgt dat de kurven, wat hunne temperatuur- en drukrichtingen betreft, moeten liggen zooals in fig. 3.

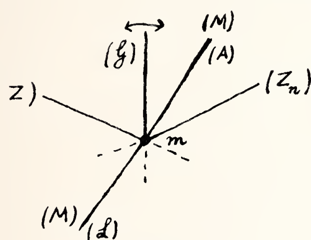


Fig. 3.

Op dezelfde wijze als in I kan men aantoonen dat kurve Z_n moet liggen beneden kurve (*A*) en boven het metastabiele deel van kurve (*Z*), enz, zoodat men eene kurvenverdeeling krijgt als in fig. 3.

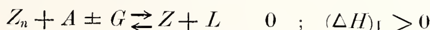
Fig. 2 en 3 verschillen alleen daarin van elkaar dat kurve (*Z*) van *m* uit in fig. 2 naar lagere en in fig. 3 naar hoogere drukken gaat.

b. Wij hebben thans:

$$(\Delta V)_M, (\Delta V)_Z \text{ en } (\Delta V)_n > 0; (\Delta V)_H < 0; (\Delta V)_G \gtrless 0$$

$$(\Delta H)_M, (\Delta H)_G \text{ en } (\Delta H)_V > 0; (\Delta H)_n \text{ en } (\Delta H)_Z < 0$$

De isovolumetrische reactie wordt:

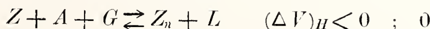


$$Z_n + A \pm G \rightleftarrows Z + L \quad 0 \quad ; \quad (\Delta H)_V > 0$$

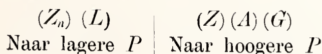


(Z) (L)	(Z_n) (A)
Naar lagere *T*	Naar hoogere *T*

De isentropische reactie wordt:



$$Z + A + G \rightleftarrows Z_n + L \quad (\Delta V)_H < 0 \quad ; \quad 0$$



(Z_n) (L)	(Z) (A) (G)
Naar lagere *P*	Naar hoogere *P*

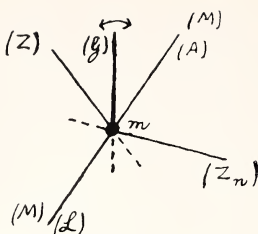


Fig. 4.

Uit deze beide reacties volgt dat de kurven, wat hunne temperatuur- en drukrichtingen betreft, moeten liggen zooals in fig. 4. Op dezelfde wijze als in *I* kan men nu weer aantoonen dat kurve (Z_n) moet liggen beneden kurve (A) en boven het metastabiele deel van kurve (Z), enz., zoodat men eene kurvenverdeeling krijgt als in fig. 4.

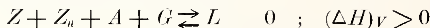
Fig. 3 en 4 verschillen alleen daarin van elkaar, dat kurve (Z_n) van m uit in fig. 3 naar hoogere en in fig. 4 naar lagere drukken gaat.

c. Wij hebben thans:

$$(\Delta V)_M, (\Delta V)_n \text{ en } (\Delta V)_G > 0 \quad ; \quad (\Delta V)_Z \text{ en } (\Delta V)_H < 0$$

$$(\Delta H)_M, (\Delta H)_n, (\Delta H)_G \text{ en } (\Delta H)_V > 0 \quad ; \quad (\Delta H)_Z < 0$$

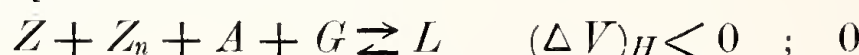
De isovolumetrische reactie wordt nu:



$$Z + Z_n + A + G \rightleftarrows L \qquad 0 \quad ; \quad (\Delta H)_V > 0$$

(L)	$(Z)\,(Z_n)\,(A)\,(G)$
Naar lagere T	Naar hoogere T

De isentropische reactie wordt:



$$Z + Z_n + A + G \rightleftarrows L \qquad (\Delta V)_H < 0 \quad ; \quad 0$$

(L)	$(Z)\,(Z_n)\,(A)\,(G)$
Naar lagere P	Naar hoogere P

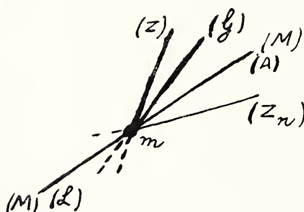


Fig. 5.

Uit deze beide reacties volgt dat de kurven, wat hun temperatuur- en drukrichting betreft, moeten liggen zooals in fig. 5.

Wij moeten nu nog aantoonen dat kurve (Z) boven (G), dat kurve (G) boven (A) en dat kurve (A) boven (Z_n) ligt; dit laatste blijkt weer op dezelfde wijze als in *I*.

Om aan te toonen dat kurve (Z) boven kurve (G) ligt, nemen wij:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_Z - \left(\frac{dP}{dT}\right)_G = \left(\frac{(\Delta H)_Z}{(\Delta V)_Z} - \frac{(\Delta H)_G}{(\Delta V)_G}\right.$$

Daar $(\Delta V)_Z$ negatief is, heeft het tweede lid hetzelfde teeken als:

$$(\Delta V)_Z \,.\, (\Delta H)_G - (\Delta V)_G \,.\, (\Delta H)_Z.$$

Substitueert men hierin:

$$(\Delta V)_G = y(\Delta V)_M - x(\Delta V)_Z \text{ en } (\Delta H)_G = y(\Delta H)_M - x(\Delta H)_Z$$

dan vinden wij:

$$y[(\Delta V)_Z(\Delta H)_M - (\Delta V)_M(\Delta H)_Z] = y(\Delta H)_V > 0$$

Hieruit blijkt dat in fig. 5 kurve (Z) boven kurve (G) moet liggen.

Om aan te toonen dat kurve (G) boven kurve (A) ligt, nemen wij:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_G - \left(\frac{dP}{dT}\right)_A = \frac{(\Delta H)_G}{(\Delta V)_G} - \frac{(\Delta H)_M}{(\Delta V)_M}.$$

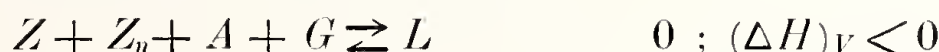
Op dezelfde wijze als boven vinden wij dat het tweede lid hetzelfde teeken heeft als $x(\Delta H)_V$, zoodat dit positief is. In fig. 5 moet kurve (G) dus boven kurve (A) liggen.

d. Wij hebben thans:

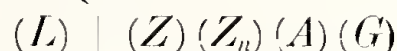
$$(\Delta V)_M,\ (\Delta V)_n \text{ en } (\Delta V)_G > 0\ ;\ (\Delta V)_Z \text{ en } (\Delta V)_H < 0$$

$$(\Delta H)_M\ ,\ (\Delta H)_G \text{ en } (\Delta H)_V > 0\ ;\ (\Delta H)_Z \text{ en } (\Delta H)_n < 0.$$

De isovolumetrische reactie wordt:



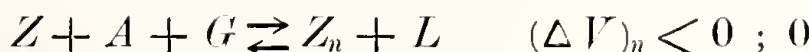
$$Z + Z_n + A + G \rightleftarrows L \qquad 0\ ;\ (\Delta H)_V < 0$$



(L) | (Z) (Z_n) (A) (G)

Naar lagere T | Naar hoogere T

De isentropische reactie wordt:



$$Z + A + G \rightleftarrows Z_n + L \qquad (\Delta V)_n < 0\ ;\ 0$$



(Z_n) (L) | (Z) (A) (G)

Naar lagere P | Naar hoogere P

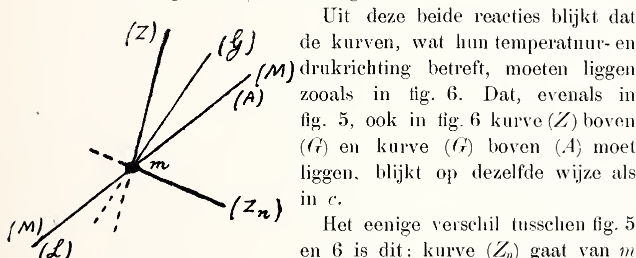


Fig. 6.

Uit deze beide reacties blijkt dat de kurven, wat hun temperatuur- en drukrichting betreft, moeten liggen zooals in fig. 6. Dat, evenals in fig. 5, ook in fig. 6 kurve (Z) boven (G) en kurve (G) boven (A) moet liggen, blijkt op dezelfde wijze als in *c*.

Het eenige verschil tusschen fig. 5 en 6 is dit: kurve (Z_n) gaat van m uit in fig. 5 naar hoogere, in fig. 6 naar lagere drukken.

Vergelijkt men de hierboven afgeleide P,T-diagrammen met elkaar, dan ziet men dat zij tot een zelfde type behooren nl. dat van fig. 4 (XII). Dit moet natuurlijk ook zoo zijn, daar de phasen G, Z_n, Z, L_m en A ten opzichte van elkaar op dezelfde wijze liggen, als de vijf phasen in fig. 3 (XII).

Wij denken ons in een P,T-diagram eene kurve $X+Y+L+G$ geteekend, waarin X en Y twee zouten voorstellen. Op deze kurve ligt een maximumdruk- en kan ook een maximumtemperatuurpunt liggen. Wij noemen het deel links van het maximumdrukpunt den stijgenden tak, het deel tusschen het maximumdruk- en maximumtemperatuurpunt den dalenden tak en het andere deel den terugloopenden tak.

Het verschil tusschen de fig. 2—6 hangt samen met de ligging van het invariante punt m. In fig. 2 ligt dit punt op den stijgenden tak van elk der kurven (Z) en (Z_n), in fig. 3 op den dalenden tak van kurve (Z) en op den stijgenden tak van (Z_n), in fig. 4 op den dalenden tak van elk der kurven (Z) en (Z_n), in fig. 5 op den teruglooper den tak van kurve (Z) en op den stijgenden tak van (Z_n) en in fig. 6 op den teruglooper den tak van kurve (Z) en op den dalenden van kurve (Z_n).

Nu wij de P,T-diagrammen gevonden hebben, kunnen wij met behulp van deze gemakkelijk de bijbehoorende concentratiediagrammen afleiden. Ik zal hierop niet verder ingaan en laat deze afleiding aan den lezer over.

Leiden, Anorg. Chem. Lab. *(Wordt vervolgd.)*

Scheikunde. — De Heer ZEEMAN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. P. TREUB: „*Over de verzeeping van vetten.*"

(Mede aangeboden door den Heer HOOGEWERFF).

INLEIDING.

§ 1. De verzeeping van esters van glycerine is het eerst experimenteel bestudeerd door GEITEL [1]). Deze bepaalde de verzeepingssnelheid der drie acetinen in verdund zure oplossing, door titratie van het afgesplitste azijnzuur, en kwam tot het resultaat, dat de snelheidsconstanten der reacties: triacetine → diacetine → monoacetine → glycerine zich verhouden als 3 : 2 : 1, waaruit dus volgt, dat de estergroepen alle met dezelfde snelheid verzeept worden, en dat de verzeepingssnelheid van een bepaalde estergroep onafhankelijk is van het al of niet verzeept zijn van een naburige groep.

Door ABEL [2]) is hiertegen aangevoerd, dat eveneens goede constanten worden gevonden, wanneer men aanneemt, dat de verzeeping

1) Z. f. pr. Chem. (2) **55** 429 (1897), **57** 113 (1898).

2) ULZER u. KLIMONT, Chemie der Fette 244 (1906).

direct van triglyceride tot glycerine voert, en dat dus de snelheidsmetingen van GEITEL niets bewijzen.

Dit is duidelijk, aangezien men in beide gevallen tot dezelfde snelheidsvergelijkingen komt, zooals ABEL t.a.p.[1]) voor 't algemeene geval van een reactie in n trappen heeft bewezen.

GEITEL heeft dan ook met zijn *snelheidsmetingen* niet bewezen, dat de verzeeping van triacetine trapsgewijs verloopt, maar alleen, dat wannéér zij trapsgewijs verloopt, de snelheidsconstanten der drie trappen zich moeten verhouden als 3 : 2 : 1 [2]). Dit resultaat toont juist de onmogelijkheid aan om, uit metingen der snelheid van vetzuurafsplitsing alléén, omtrent het al of niet trapsgewijze verloop te beslissen.[3]).

Dat werkelijk de zure verzeeping van glycerineësters trapsgewijs plaats heeft, bewees GEITEL door aan te toonen, dat ranzige vetten méér gebonden glycerine bevatten, dan overeenkomt met een direct uiteenvallen in glycerine en drie moleculen vetzuur. Hij kon dus voor de acetinen een analoog gedrag aannemen.

JUL. MEYER [4]) heeft het verloop der verzeeping in zure oplossing van esters van tweewaardige zuren of alcoholen mathematisch nagegaan en in overzichtelijken vorm in vergelijking gebracht. Uit zijn formules blijkt duidelijk, dat, wanneer de eerste trap tweemaal zoo snel verloopt als de tweede, de geheele verzeeping schijnbaar monomoleculair wordt. Snelheidsmetingen door hem uitgevoerd bij de zure verzeeping der glycolacetaten en der esters van verschillende symmetrisch gebouwde tweebasische zuren, bevestigen dit volkomen.

Ook tegen de conclusies van J. MEYER zou men kunnen aanvoeren, dat een eenvoudig monomoleculaire verzeeping zijn resultaten evengoed verklaart. J. MEYER heeft echter eveneens de verzeepingssnelheden bepaald van de methylesters van het asymmetrische campherzuur. Van het dimethylcamphoraat nu bleek de éene estergroep veel sneller te worden afgesplitst dan de andere. Hier verhouden zich dus de snelheidsconstanten bij de verzeeping van di- en mono-ester niet als 2 : 1, zoodat hier de resultaten der snelheidsmetingen direct tot het trapsgewijs verloopen van de reactie doen besluiten. De aanname, dat ook bij de verzeeping van glycolesters, etc. de reactie in trappen verloopt, is hierna volkomen gerechtvaardigd. Tevens zijn

---

[1]) Z. f. phys. Chem. **56** 558 (1906).

[2]) Door J. MEYER is aangetoond (Z. f. Electrochem. **13** 485 (1907)), dat deze verhouding slechts bij benadering geldt. Bij 18° C. schijnt nauwkeuriger te gelden: 3.10 : 2.00 : 1.14, bij 25° C.: 3.06 : 2.00 : 1.25.

[3]) Zie ook § 12.

[4]) Z. f. phys. Chem. **66** 81 (1909).

de proeven van JUL. MEYER een steun voor de opvatting van GEITEL, dat de acetinen in zure oplossing trapsgewijs worden verzeept.

DE VERZEEPING IN EMULSIE.

§ 2. De verhandelingen van GEITEL en JUL. MEYER behandelen beide de verzeeping in oplossing. Bij de vetverzeeping echter werkt men steeds met meer of minder fijne emulsies van vet en een waterige oplossing en het is nu dus de vraag hoe zich in dit geval de reactie afspeelt.

Ten eerste is het de vraag: Waar heeft de reactie plaats? Er zijn nl. drie mogelijkheden:

1°. Reactie heeft plaats in de waterphase.

2°. Reactie heeft plaats in de vetphase.

3°. Reactie heeft plaats op de grens van beide phasen.

Beschouwen wij deze mogelijkheden elk afzonderlijk.

1°. *De reactie heeft plaats in de waterphase.*

In dit geval wordt de snelheid, waarmede het triglyceride zich omzet, bepaald door het aantal moleculen daarvan opgelost in de waterphase. Nu doet zich direct een volgende vraag voor, n.l. mag in dit geval een snelheidsvergelijking worden toegepast, die voor een oplossing geldt? Zooals NERNST[1]) heeft opgemerkt, leidt een snelheidsvergelijking geldend voor een homogeen systeem in een heterogeen systeem tot geheel verkeerde conclusies, wanneer de reactiesnelheid van diffusiesnelheden afhankelijk is. Dit zal steeds het geval zijn dààr, waar de reactiesnelheid groot is, t. o. v. de diffusiesnelheid.

Wanneer echter omgekeerd in een heterogeen systeem het concentratie-evenwicht zich snel instelt, terwijl de reactie betrekkelijk langzaam verloopt, dan is de invloed der diffusiesnelheid slechts gering en kan geheel onmerkbaar worden. Dit nu is meestal het geval wanneer beide phasen vloeibaar zijn. Wanneer een stof A, opgelost in een oplosmiddel B, geschud wordt met een oplosmiddel C, dat zich met B niet mengt, dan is slechts zeer korte tijd noodig om het evenwicht tusschen beide oplossingen tot stand te brengen.

Door H. GOLDSCHMIDT[2]) is de verzeepingssnelheid bepaald van aethylacetaat opgelost in benzol en geschud met ongeveer normaal zoutzuur. Aannemende, dat de reactie in de waterige oplossing plaats heeft, stelde hij de verzeepingssnelheid voor door de vergelijking:

---

[1]) Z. f. phys. Chem. **47** 55 (1904).

[2]) Z. f. phys. Chem. **31** 235 (1899)

$$-\frac{dx}{dt} = K \cdot \frac{v_1 \cdot C}{v_2 + v_1 \cdot C} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin $v_1 =$ volume van de waterige oplossing, $v_2 =$ volume van de benzolische oplossing, $C =$ verdeelingsconstante van aethylacetaat tusschen water en benzol. Over het algemeen bleek de reactiesnelheid door deze vergelijking goed te worden voorgesteld.

Tegen het eind moest de reactie in tegengestelden zin in rekening worden gebracht.

Hieruit blijkt dus, dat wanneer de reactiesnelheid niet te groot is, in een heterogeen systeem, bestaande uit twee vloeibare phasen, de snelheidsvergelijkingen kunnen toegepast worden, die gelden in een homogeen systeem.

Keeren wij nu terug tot de vetverzeeping en denken wij ons het geval, dat een triglyceride verzeept wordt met verdund zwavelzuur volgens het TWITCHELL-proces waarbij dus vet en waterige oplossing door inblazen van stoom in emulsie worden gehouden, na toevoeging van c.a. $^1/_2\,^0/_0$ TWITCHELL-reactief. De formule van GOLDSCHMIDT mag in dit geval voor quantitatieve bepalingen zeker niet gebruikt worden. Immers, de verdeelingswet van NERNST is hier niet zonder meer toe te passen, daar de vetphase aan het begin der verzeeping voornamelijk uit triglyceride, aan het eind hoofdzakelijk uit vetzuur bestaat. De verdeelingsconstante C zal dus in dit geval niet constant kunnen zijn. Toch kan men uit vergelijking (1) wèl een conclusie trekken omtrent het al of niet waarschijnlijke van de veronderstelling, dat de verzeeping in de waterphase plaats grijpt. Immers er blijkt in ieder geval uit, dat, wanneer genoemde onderstelling juist is, de grootte van het aanrakingsoppervlak tusschen vet- en waterdeeltjes geen rol speelt. Maar dan moet de werking van het TWITCHELL-reactief voornamelijk daarop berusten, dat het een vergrooting van C veroorzaakt, m.a.w. de oplosbaarheid van het vet in de waterphase vergroot. Dit nu, op zich zelf, is zeer goed mogelijk, maar waar de verzeeping zonder reactief practisch niet plaats heeft, en bij toevoeging van nog geen half procent aan de emulsie, een bruikbare snelheid verkrijgt, daar is het al zeer onwaarschijnlijk, dat vergrooting van de oplosbaarheid van het vet in de water-phase hiervan de oorzaak zou zijn.

Zooals in § 4 zal blijken, is de werking van het TWITCHELL-reactief geheel ongedwongen te verklaren bij de onderstelling, dat de verzeeping op de grens van vet en water plaats grijpt.

Er is echter nog een ander verschijnsel. dat hierop wijst. Het blijkt namelijk, dat, wanneer men triglyceriden, die weinig of geen vrij vetzuur bevatten, verzeept, de reactiesnelheid in het begin zeer

57

klein is, daarna oploopt, en een maximum bereikt. WEGSCHEIDER[1]), die de reactie in de waterige oplossing aanneemt, wil dit verklaren door de concentratie van het triglyceride in de waterphase constant te nemen. Het oploopen van de reactiesnelheid zou dan worden veroorzaakt door de aanwezigheid van lagere glyceriden in de waterphase. Onder deze aanname komt WEGSCHEIDER tot de volgende snelheidsvergelijking voor de vetzuurafsplitsing:

$$\frac{dx}{dt} = 9\,k\,.\,C - 6\,k\,.\,C\,.\,e^{-kt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hierin stelt C voor de niet veranderende concentratie van het triglyceride in de waterige oplossing, k is een snelheidsconstante.

Inderdaad zou vergelijking (2) het oploopen van de verzeepingsnelheid kunnen verklaren, indien zij in dezen vorm op de vetverzeeping mocht toegepast worden. Nu is het duidelijk, dat (2) alleen voor de alcalische verzeeping kan gelden, daar alleen in dit geval de vetphase, die met de waterige oplossing in contact is, practisch uitsluitend uit triglyceriden bestaat, waardoor de concentratie van het triglyceride in de waterphase constant mag genomen worden. Zooals in § 19 zal blijken verloopt de verzeeping in alcalisch milieu echter practisch direct van triglyceride tot glycerine + vetzuur. De tweede term van het tweede lid van (2) valt dan weg en men zou dan een verzeepingsnelheid moeten hebben, die met den tijd niet verandert. De feiten zijn echter anders.

Heeft de reactie op de grens van beide phasen plaats, dan is het oploopen der reactiesnelheid onmiddellijk duidelijk. Immers, aan het begin heeft men een weinig innige emulsie van loog en triglyceride. Naarmate nu de verzeeping vordert, wordt de zeepconcentratie in de waterphase grooter, de oppervlaktespanning tusschen vet- en waterphase neemt dientengevolge af, de emulsie wordt dus fijner en het oppervlak waar de reactie zich kan afspelen wordt grooter.

We kunnen dus na het voorgaande de eerste mogelijkheid als zeer onwaarschijnlijk ter zijde schuiven.

§ 3. 2°. *De reactie heeft plaats in de vetphase.*

Deze onderstelling is nog minder aannemelijk, daar een reactie die door $H^{\cdot}$ of OH' ionen katalytisch versneld wordt, in een niet waterig milieu zeer onwaarschijnlijk is.

§ 4. Blijft dus de laatste mogelijkheid, n.l.

3°. *De reactie heeft plaats op de grens van beide phasen.*

Bij een verzeeping in zure oplossing is de snelheid een functie

[1]) Kais. Ak. d. Wissensch. Wien **116**, II b. 1325 (1907).

van het aantal botsingen in de tijdseenheid tusschen een ester molecuul en een H˙ ion. Bij een bepaalde concentratie en bij gegeven temperatuur is dit aantal botsingen vastgelegd en hierdoor de snelheidsconstante eveneens.

Heeft men echter, zooals bij het TWITCHELL-proces een emulsie van vet- en waterdeeltjes, die in fijne verdeeling door elkaar bewegen en heeft de reactie op de grens van beide plaats, dan zal de snelheid een functie zijn van de grootte van het oppervlak, waar de botsingen kunnen plaats vinden, d.w.z. van de fijnheid der emulsie, en dus zal de snelheidsconstante bij gegeven temperatuur *niet* zijn vastgelegd.

Bij het TWITCHELL-proces moet nu de versnellende invloed van het reactief voornamelijk, zoo niet geheel, gezocht worden in de vergrooting van het aanrakingsoppervlak tusschen vet- en waterphase, m.a.w. in de vermindering der oppervlaktespanning tusschen vet en water. Dat inderdaad deze oppervlaktespanning door sporen reactief aanmerkelijk verlaagd wordt, is met de pipet van DONNAN [1]) gemakkelijk aan te toonen (zie § 7).

Het lijkt misschien willekeurig, dat, waar blijkt, dat reeds sporen TWITCHELL-reactief de oppervlaktespanning tusschen vet en water aanmerkelijk verlagen, in § 2 is aangenomen, dat die sporen de oplosbaarheid van het vet in water practisch niet kunnen beïnvloeden. Toch is dit geenszins het geval. Om de oplosbaarheid van vet in water genoeg te vergrooten, zou aan de waterphase een oplosmiddel voor triglyceride moeten worden toegevoegd, dat zich met water mengt. Verder zou de waterphase over zijn geheele volume een zekere (vrij aanzienlijke) concentratie van dat oplosmiddel moeten aanwijzen. Bij een stof echter, die de oppervlaktespanning tusschen vet en water verlaagt, behoeft dit niet het geval te zijn. Immers de oppervlaktespanningverlagende werking van een stof gaat gepaard met adsorptie aan het gemeenschappelijk oppervlak der beide phasen, waardoor een dergelijke stof dus, niettegenstaande zij, berekend op de totale massa, slechts in sporen aanwezig is, aan het gemeenschappelijk oppervlak in aanzienlijke concentratie kan voorkomen. Het is juist deze oppervlaktelaag, die de neiging van twee tegen elkaar botsende druppeltjes om zich tot één geheel te vereenigen, tegengaat [2]).

Dezelfde beschouwingen gelden ook voor de verzeeping in alcalisch milieu. Hier werkt de bij de verzeeping gevormde zeep oppervlaktespanningverlagend tusschen vet en water.

1) Z. f. phys. Chem. **31** 42 (1899).

2) DONNAN l. c.

Wij komen dus tot de slotsom, dat bij de verzeeping in emulsie de reactie practisch geheel op de grens van vet- en waterphase plaats grijpt. Wij kunnen dan de snelheidsvergelijkingen toepassen, die in oplossing gelden, wanneer wij rekening houden met het feit, dat de snelheidsconstante van de fijnheid der emulsie afhankelijk is.

§ 5. Snelheidsmetingen nu zijn gedaan door M. NICLOUX [1]) en wel bij de verzeeping van katoenolie met behulp van het ferment, dat zich in ricinuszaad bevindt. Hij vindt voor

$$k = \frac{1}{t} log \frac{a}{a-x}$$

een goede constante vooral bij lage temperatuur (15°). Hieruit blijkt, dat in dit geval de fijnheid der emulsie gedurende de verzeeping niet merkbaar verandert, en dat de verzeepingsnelheden der drie glyceriden zich verhouden als 3 : 2 : 1 òf als 1 : ∞ : ∞ [2]).

Waar nu NICLOUX aangeeft [3]), dat de na een bepaalden tijd afgesplitste hoeveelheid glycerine met de afgesplitste hoeveelheid vetzuur correspondeert, moet 't laatste 't juiste zijn. Bij de proeven van M. NICLOUX schijnt dus triglyceride practisch direct in vetzuur en glycerine te zijn gesplitst.

Het constant blijven der emulsiefijnheid komt bij de verzeeping met loog zeker niet voor. Immers, hier werkt juist de zich vormende zeep oppervlaktespanningverlagend tusschen vet en waterige oplossing, dus zal gedurende de verzeeping de fijnheid der emulsie toenemen. Hetzelfde geldt, althans voor het begin der reactie, bij de autoclavenverzeeping met zinkoxyde, en eveneens bij de verzeeping met kalk. Echter ook bij het TWITCHELLproces blijft de fijnheid der emulsie niet dezelfde gedurende het verloop van het proces. Zooals men met behulp van de pipet van DONNAN aan kan toonen is bijv. de oppervlaktespanning tusschen lijnolievetzuur en water geringer dan tusschen lijnolie en water. Gedurende de reactie zal dus ook hier het aanrakingsoppervlak tusschen vet- en waterphase grooter worden.

Het is duidelijk, dat in deze gevallen snelheidsmetingen van weinig nut zijn. De snelheidsconstante zal steeds een gang vertoonen en men heeft dan geen criterium of de opgestelde snelheidsvergelijkingen juist zijn. Wij moeten hier dus een anderen weg inslaan.

Wanneer wij snelheidsvergelijkingen opstellen voor de vetzuurafsplitsing bij de triglycerideverzeeping, en daarin voorkomt slechts één constante k, die afhankelijk is van het aanrakingsoppervlak van

---

[1]) Saponification des corps gras (1906).

[2]) Zie § 12.

[3]) l. c. 52.

vet- en waterphase en die dus vanaf het begin der verzeeping slechts gedurende een klein tijdsverloop Δt_1, werkelijk constant geacht mag worden, dan komt men na integratie van de opgestelde vergelijkingen tusschen de grenzen 0 en Δt_1 tot een betrekking tusschen het na den tijd Δt_1 afgesplitste aantal moleculen vetzuur (z) en k en Δt_1. Laat deze functie zijn:

$$z = f(k \times \Delta t_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bij trapsgewijze verzeeping geeft een tweede vergelijking aan: het na den tijd Δt_1 afgesplitste aantal moleculen glycerine (s) als functie van k en Δt_1. Laat die functie zijn:

$$s = \varphi(k \times \Delta t_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Kan men nu uit beide vergelijkingen (3) en (4) $k \times \Delta t_1$ elimineeren, dan vindt men een betrekking:

$$\psi(z, s) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

die aangeeft het verband tusschen het na den tijd Δt_1 afgesplitste aantal moleculen glycerine en vetzuur.

Denken wij ons nu, dat na het verstrijken van den tijd Δt_1 de snelheidsconstante k verandert in k' en beschouwen wij nu een volgend tijdsverloop Δt_2. Aan het begin van dit tijdsverloop geldt

$$z = f(k \times \Delta t_1)$$
$$s = \varphi(k \times \Delta t_1)$$

Echter zouden dezelfde waarden z en s bereikt kunnen zijn met de snelheidsconstante k' in zeker tijdsverloop $\Delta t'_1$, zoodat

$$\Delta t'_1 = \frac{k}{k'} \cdot \Delta t_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Aan het begin van het tijdsverloop Δt_2 is dan dus ook:

$$z = f(k' \times \Delta t'_1)$$
$$s = \varphi(k' \times \Delta t'_1),$$

maar dan is na het verloopen van den tijd t_2:

$$z = f\{k' \times (\Delta t'_1 + \Delta t_2)\}$$

en

$$s = \varphi\{k' \times (\Delta t'_1 + \Delta t_2)\}$$

Uit deze laatste vergelijkingen is $k' \times (\Delta t'_1 + \Delta t_2)$ op dezelfde wijze te elimineeren als $k \times \Delta t_1$ uit (3) en (4), waaruit dus blijkt, dat (5) ook geldt na het verstrijken van Δt_2.

Waar men dezelfde redeneering over de geheele verzeeping kan uitstrekken, blijkt dus, dat wanneer het aantal moleculen afgesplitst vetzuur bij de vetverzeeping kan worden voorgesteld door:

$$z = f(k \times t)$$

en het aantal moleculen afgesplitste glycerine door:

$$s = \varphi(k \times t),$$

in welke vergelijkingen k met den tijd varieert, door eliminatie van $k \times t$ een functie

$$\psi(z,s) = 0$$

moet zijn af te leiden, waarvan de gedaante gedurende de verzeeping niet verandert, en die onafhankelijk is van de verandering van k.

Waar nu bij de vetverzeeping zoowel afgesplitste glycerine als vrij vetzuur afzonderlijk te bepalen zijn, heeft men hierin dan een middel om het mechanisme van de reactie na te gaan.

Er zij hier nog op gewezen, dat onder de verandering van k met den tijd ook begrepen moet worden de, bij verzeeping in alcalisch milieu, plaats hebbende concentratievermindering van de loog. Wij zullen dus tot analoge vergelijkingen moeten komen bij zure en alcalische verzeeping.

§ 6. Alvorens nu over te gaan tot het afleiden van een vergelijking $\psi(z,s) = 0$, moeten we eerst nog de vraag bespreken wat te verwachten is bij de verzeeping van vetten waarin *verschillende* vetzuren aanwezig zijn.

De natuurlijke vetten toch zijn mengsels van verschillende triglyceriden, terwijl in een molecuul triglyceride vaak twee soms drie verschillende vetzuurgroepen voorkomen. Nu is het ten eerste denkbaar dat bijv. uit een molecuul oleodipalmitine de oliezuurgroep gemakkelijker wordt afgesplitst dan een palmitinezuurgroep. Ten tweede bestaat echter de mogelijkheid, bijv. bij een mengsel van trioleïne en tripalmitine, dat een dezer glyceriden een lager oppervlaktespanning heeft tegen het watermilieu, waarmee verzeept wordt, dan het andere. Hiervan zou dan 't gevolg zijn, dat het triglyceride, dat de laagste oppervlaktespanning tegen de waterphase heeft, aan het gemeenschappelijk oppervlak geadsorbeerd werd en tengevolge daarvan sneller werd verzeept.

Hiervan is echter nooit iets gebleken.

Door THUM[1]) is aangetoond, dat bij de verzeeping met loog, zoowel als bij het ranzig worden van palmolie en olijfolie het iood-cijfer van de afgesplitste vetzuren met dat van de nog veresterde vetzuren overeenstemt.

STIEPEL[2]) vindt bij geautoclaveerde talkvetzuren, dat de nog veresterde vetzuren een wat hooger ioodcijfer vertoonen dan de afgesplitste, komt echter bij de autoclaveering van cocosolie en palmpittenolie tot het besluit, dat de afgesplitste en verésterde vetzuren een zelfde samenstelling hebben. Dit vindt STIEPEL bevestigd[3]) door

---

1) Z. f. angew. Chem. **3** 482 (1890).

2) SEIFENS. Ztg. **31** 937, 965, 986, 1006, 1026 (1904), **36**, 788, (1909).

3) SEIFENS. Ztg. **35**, 1359 (1908).

het feit, dat, bij distillatie van partieel verzeepte cocos- en palmpittenolie, het distillaat dezelfde zuurcijfers vertoont, als bij de daarna volgende distillatie van de in den ketel eerst achtergebleven vetmassa, nadat deze opnieuw, en nu totaal, verzeept is.

Hieruit volgt nu, dat een verschil in verzeepbaarheid tusschen estergroepen van verschillende vetzuren in 't algemeen te verwaarloozen is, en voorts, dat de oppervlaktespanningen der in de door Thum en Stiepel onderzochte vetten voorkomende glyceriden tegen het verzeepend milieu slechts weinig uiteen kunnen loopen.

Door Connstein, Hoyer en Wartenberg [1]) is gevonden, dat de fermentatieve verzeeping met het ricinuszaadferment langzamer verloopt naarmate het moleculair gewicht van de veresterde zuren lager is. Het is dus niet uitgesloten, dat ook wanneer glyceriden van vetzuren van verschillend moleculair gewicht naast elkaar voorkomen zij hier een specifieke verzeepingssnelheid zullen vertoonen. Proeven in den geest als door Thum en Stiepel zijn genomen vermelden Connstein c.s. niet.

§ 7. Om nu een oordeel te kunnen vellen over de oppervlaktespanningen van vetten tegen verschillende media werden de volgende proeven genomen:

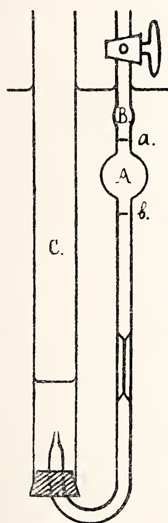


Fig. 1.

Met behulp van de pipet van Donnan werd het aantal druppels geteld, dat, bij strooming van een bepaald volume van verschillende triglyceriden uit een dunwandige capillair, opsteeg in water en eenige oplossingen, alles bij 100° C. De inrichting der proeven volgt uit fig. 1. De pipet met de buis *C*, die de waterige oplossing bevatte, werd in een groot bekerglas met water op 100° gebracht. Gedurende het uitstroomen van het vet werd het bekerglas niet verwarmd om stooten door het koken van het water te vermijden. Het vullen geschiedde door opzuigen van het vet in bolletje *B*. De monding van de capillair werd daarna met een doek zoo goed mogelijk gereinigd en de buis *C* met een gummistop bevestigd. Het geheel werd nu in het bekerglas voorzichtig opgewarmd tot het vet juist uit de capillairmonding te voorschijn kwam, daarna werd de oplossing (steeds een zelfde hoeveelheid) langs den wand in *C* gegoten. Had het geheel

[1]) Ber. **35**. 3988. (1902).

de temperatuur van 100° bereikt, dan werd door openen van de kraan het vetniveau tot *a* teruggebracht, en daarna het aantal druppels geteld, dat in de oplossing in *C* opsteeg bij dalen van het vetniveau van *a* tot *b*. De doorsnede van de capillairmonding was ca. 1 m.M. Trilaurine stroomde in ca. 4 minuten van *a* tot *b* uit.

Bij het uitstroomen van het vet blijft nu elke druppel aan de capillairmonding hangen totdat de opwaartsche druk de spanning van het oppervlak overwint. Hoe grooter dus deze oppervlaktespanning is, hoe minder afsnoeringen bij uitstrooming van een bepaald volume der vetsubstantie zullen plaats vinden en hoe geringer aantal druppels zullen opstijgen in de waterige vloeistof. Ziet men van het verschil in specifiek gewicht der verschillende triglyceriden af, dan is de spanning van het aanrakingsoppervlak ruwweg omgekeerd evenredig aan het aantal druppels.

Het is duidelijk, dat de met de beschreven apparatuur verkregen resultaten slechts bij grove benadering een aanduiding geven omtrent de verhouding der oppervlaktespanningen van verschillende glyceriden tegen waterige oplossingen. Om deze verhouding quantitatief vast te stellen zijn nauwkeuriger metingen noodig dan met de DONNAN-pipet zijn uit te voeren. Het zal echter in § 19 e.v. blijken, dat de gegevens op de beschreven wijze verkregen, de verschijnselen, die zich bij de vetverzeeping voordoen, qualitatief geheel kunnen verklaren.

De verkregen resultaten vindt men vereenigd in tabel I.

TABEL 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		Verzeeping-cijfer				Aantal druppels bij 100° C. opstijgende in:			
Triglyceride	Zuurcijfer	Berekend	Gevonden	Ioodcijfer	Stolpunt der Vetzuren	Water	1% oplossing van TWITCHELL reactief in H_2O	10% oplossing van kaliumlauraat in H_2O	12.3% oplossing van kaliumpalmitaat in H_2O
Trilaurine	0.0	264.0	264.3	0.0	43°.7	10	44	53	190
Tripalmitine	<0.2	208.9	208.3	0.8	62.0	12	45	(110)	(370)
Tristearine	<0.2	189.2	190.0	0.0	68.7	13	50	(85)	—
Olijfolie	1.43	—	191.0	83.9	22.5	11	50	(100)	(340)
Lijnolie	<0.2	—	191.3	182.3	20.6	15	48	(70)	(210)

Trilaurine werd verkregen door omkristalliseeren van Tangkallakvet uit alcohol, daarna uit aether, tripalmitine door omkristalliseeren van Chineesche plantentalk uit benzine, daarna uitwasschen van het verkregen product met alcohol en nog eens omkristalliseeren uit aether. Tristearine door omkristalliseeren van katalytisch geharde lijnolie uit benzine, daarna eveneens uitwasschen met alcohol en omkristalliseeren uit aether. De gebruikte olijfolie was olie voor consumptie van Franschen oorsprong. De lijnolie was door behandeling met loog van vrij vetzuur zooveel mogelijk bevrijd. Uit de in kolom 2—6 opgenomen constanten blijkt de zuiverheid der onderzochte triglyceriden voldoende.

Uit kolom 7 en 8 van tabel 1 blijkt nu, dat de oppervlaktespanningen der onderzochte triglyceriden tegen water en een 1 $^0/_0$ oplossing van Twitchell-reactief *onderling* weinig uiteenloopen, terwijl duidelijk te zien is, dat bij aanwezigheid van reactief de druppels eerder worden afgesnoerd en dus de oppervlaktespanning tusschen vet- en waterphase is afgenomen.

In alcalisch milieu werden tusschen de verschillende triglyceriden onderling grootere afwijkingen gevonden (zie kolom 9 en 10). Het is echter zeer de vraag of deze essentieel zijn. Bij triglyceriden, die niet, zooals trilaurine, door omkristalliseeren uit alcohol kunnen worden gezuiverd, is het uiterst moeilijk de laatste sporen vrij vetzuur te verwijderen. Deze sporen veroorzaken in alcalisch milieu een verlaging van de oppervlaktespanning en geven bovendien aanleiding tot onregelmatige bevochtiging van de capillairmonding, waardoor bij herhaalde bepalingen vaak groote afwijkingen gevonden worden. De cijfers waaraan om deze reden weinig gewicht mag gehecht worden zijn tusschen ( ) geplaatst. Steeds is hier het laagste aantal druppels opgegeven (tot tientallen afgerond) dat bij herhaalde bepaling gevonden werd. Deze cijfers zijn in zoover van belang, dat er duidelijk de invloed van het moleculairgewicht der zeep, die in het water is opgelost, uit blijkt.

In 't algemeen behoeven we dus, blijkens de waarnemingen van Thum en Stiepel en blijkens de in deze § beschreven resultaten met de pipet van Donnan bij het afleiden van een vergelijking $\psi(z,s) = 0$ geen onderscheid te maken tusschen natuurlijke vetten en enkelvoudige triglyceriden. Een functie bij deze onderstelling afgeleid zal echter bij de fermentatieve verzeeping eerst aan verschillende vetten getoetst moeten worden voor men dààr verdere conclusies trekt.

Afleiding van een vergelijking $\psi(z,s) = 0$.

§. 8. Waar de reactie op de grens van vet- en waterphase plaats grijpt, zal de snelheid, waarmee elk der trappen van verzeeping verloopt, beheerscht worden door de oppervlaktespanning van tri-, di- en monoglyceriden tegen het verzeepend milieu. Immers is bijv. de oppervlaktespanning van het diglyceride tegen de waterphase kleiner dan die van het triglyceride, dan zal het diglyceride direct na zijn vorming aan het aanrakingsoppervlak geadsorbeerd worden en dus in de oppervlaktelaag een grooter concentratie bereiken dan wanneer geen adsorptie plaats had. 't Gevolg hiervan zal dan zijn, dat een estergroep van een molecuul diglyceride gemiddeld meer kans heeft om verzeept te worden dan een estergroep van een molecuul triglyceride.

Om nu een oordeel te kunnen vellen omtrent de oppervlaktespanningen van tri-, di- en monoglyceriden tegen een verzeepend milieu werd, met behulp van de in de vorige § beschreven apparatuur het gedrag der laurinen onderzocht. De resultaten vindt men in tabel 2.

TABEL 2.

1	2	3	4	5	6	7
	Verzeeping-cijfer			Aantal druppels bij 100° C. uitstroomend in:		
Vetsubstantie	Berekend	Gevonden	Smeltpunt	Water	1% oplossing van TWITCHELL reactief in H_2O	10% oplossing van kaliumlauraat in H_2O
Trilaurine	264.0	264.3	46°	10	44	53
Dilaurine	246.3	246.3	54	13.5	42	470
Monolaurine	205.0	204.4	62.8	—	—	—
90 Trilaurine + 10 Dilaurine	—	—	—	12	44	90
90 „ + 10 Monolaurine	—	—	—	80	280	stroomt
Laurinezuur	280.7	280.4	43°.7 [1])	38	70	—

Het laurinezuur werd bereid door verzeeping van trilaurine, ver-

[1]) Stolpunt.

kregen uit Tangkallakvet, gevolgd door distillatie in vacuo. De lagere laurinen werden verkregen door verestering van laurinezuur met groote overmaat glycerine bij ca. 200° op de wijze als door VAN ELDIK THIEME [1]) is aangegeven. Het dilaurine werd ter zuivering eerst uit alcohol omgekristalliseerd (ter verwijdering van monolaurine), daarna uit benzol (ter verwijdering van trilaurine). Het monolaurine werd eerst uit petroleumaether omgekristalliseerd (ter verwijdering van di- en trilaurine), daarna uit alcohol (ter verwijdering van monolauryldiglycerine). Alle glyceriden waren volkomen vrij van oliezuur en vrij vetzuur. De in kolom 2—4 vermelde constanten geven overigens de zuiverheid der gebruikte stoffen voldoende aan.

Het aantal druppels monolaurine opstijgende in waterige oplossingen kon niet bepaald worden, daar zich op de grens van monolaurine en water een huidje vormt, zoodat van „druppels" geen sprake meer is. Om nu toch een oordeel te kunnen vellen over de oppervlaktespanning van monolaurine tegen waterige oplossingen zijn in tabel 2 het aantal druppels opgegeven, dat opsteeg van een mengsel van 90 % trilaurine en 10 % monolaurine, terwijl ter vergelijking de zoo verkregen cijfers met dilaurine zijn aangegeven.

Uit tabel 2 kan men nu de volgende conclusies trekken:

1°. In zuur en neutraal milieu loopen de oppervlaktespanningen van tri- en dilaurine tegen het verzeepend medium weinig uiteen, die van monolaurine is veel geringer. We moeten dus verwachten dat bij verzeeping in niet alcalisch milieu het monoglyceride aan de grens van vet- en waterphase geadsorbeerd zal worden en dus zal worden verzeept met een snelheid grooter dan die waarmee het is ontstaan.

2°. In alcalisch milieu zijn de oppervlaktespanningen van di- en van monolaurine tegen het verzeepend medium veel geringer dan van trilaurine. Hier zullen dus zoowel di- als monoglyceriden aan de grenslaag geadsorbeerd worden en dus worden verzeept met snelheden grooter dan die waarmede zij zijn ontstaan.

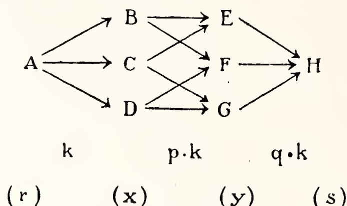
Blijkens 't voorgaande moet bij de afleiding van een vergelijking $\psi(z,s)=0$ rekening worden gehouden met de concentratie-vermeerdering der lagere glyceriden aan het aanrakingsoppervlak tusschen vet- en waterphase. We stellen nu:

p resp. q = het aantal malen, dat de concentratie van het diglyceride, resp. monoglyceride aan de grenslaag, tengevolge van de adsorptie, grooter is dan indien geen adsorptie plaats had, en stellen *p* en *q beide constant.*

[1]) Diss. Delft (1911).

Deze aanname is een benadering, daar de adsorptie *niet* evenredig is aan de totaal concentratie der geadsorbeerde stof [1]). Deze benadering zal des te grooter zijn, naarmate de concentratie der lagere glyceriden, gedurende de verzeeping, tusschen engere grenzen varieert.

§ 9. Waar nu het verschil in verzeepingsnelheid tusschen esters van primaire en secundaire alcoholen slechts gering is, en men dus met groote benadering de isomere di- en monoglyceriden hier als gelijkwaardig kan beschouwen (hetgeen ook volgt uit de resultaten van Geitel en van J. Meyer) komen we tot het volgende schema voor de vetverzeeping:



Hierin stelt A een molecuul triglyceride voor, dat op drie wijzen met een snelheidsconstante k in een molecuul diglyceride (B, C of D) kan overgaan. Een molecuul diglyceride, bijv. B, kan op twee wijzen met een snelheidsconstante $p.k$ een molecuul monoglyceride (E of F) geven, terwijl ten slotte elk molecuul monoglyceride met een snelheidsconstante $q.k$ glycerine (H) vormt. Het aantal moleculen van A aanwezig na een tijd t zal worden aangegeven door r, het aantal moleculen van B, C en D elk door x, van E, F en G elk door y en van H door s.

Het is duidelijk, dat, wanneer er geen verschil in verzeepbaarheid der verschillende estergroepen bestaat, de concentraties van B, C en D en van E, F en G elk oogenblik onderling aan elkaar gelijk zijn.

Gaan wij nu uit van a moleculen triglyceride A.

De verzeepingsnelheid van A wordt nu voorgesteld door de vergelijking:

$$-\frac{dr}{dt} = 3\,k\,r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Integreert men (7) en bedenkt men, dat bij $t = 0$, $r = a$, dan volgt:

$$r = a\,.\,e^{-3kt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

De verandering van het aantal moleculen B (en dus ook van C en D) wordt voorgesteld door:

[1]) Zie Freundlich, Z, f. phys. Chem. **57** 385 (1907).

$$\frac{dx}{dt} = k \,.\, r - 2pk \,.\, x \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Substitueert men de waarde van r uit (8) in (9), dan volgt:

$$\frac{dx}{dt} + 2pk \,.\, x = a \;\; k \,.\, e^{-3kt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Deze vergelijking kan opgelost worden door te stellen:

$$x = m \times n \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

waarin dus bijv. aan m een willekeurige waarde kan gegeven worden; n is dan vastgelegd.

Daar nu:

$$\frac{dx}{dt} = m \,.\, \frac{dn}{dt} + n \,.\, \frac{dm}{dt},$$

gaat (10) over in:

$$m \,.\, \frac{dn}{dt} + n \left\{ \frac{dm}{dt} + 2pk \,.\, m \right\} = a \,.\, k \,.\, e^{-3kt} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Nemen we nu m zóó, dat

$$\frac{dm}{dt} + 2pk \,.\, m = 0.$$

Bij integratie van deze laatste vergelijking vindt men dan voor m:

$$m = e^{-2pkt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)^{1)}$$

Deze waarde in (12) invoerende volgt:

$$e^{-2pkt} \,.\, \frac{dn}{dt} = a \,.\, k \,.\, e \,.^{-3kt},$$

waaruit bij integratie:

$$n = \frac{a}{2p-3} \,.\, e^{(2p-3)kt} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Uit de vergelijkingen (11), (13) en (14) volgt nu dus:

$$x = m \,.\, n = \frac{a}{2p-3}\, e^{-3kt} + C \,.\, e^{-2pkt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Overwegende, dat bij $t = 0$ ook $x = 0$, vindt men voor de integratieconstante C:

$$C = -\frac{a}{2p-3},$$

waardoor (15) overgaat in:

$$x = \frac{a}{2p-3} \,.\, \{e^{-3kt} - e^{-2pkt}\} \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

---

[1]) Een integratieconstante kan hier weggelaten worden, daar die bij de verdere berekening toch weg zou vallen.

De verandering van het aantal moleculen E (en dus ook van F en G) wordt voorgesteld door:

$$\frac{dy}{dt} = 2pk \, . \, x - qk \, . \, y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Substitueert men de waarde van x uit (16) in (17), dan volgt:

$$\frac{dy}{dt} + qk \, . \, y = a \, . \, \frac{2pk}{2p-3} \, . \left\{ e^{-3kt} - e^{-2pkt} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Deze differentiaalvergelijking kan op dezelfde wijze als (10) worden opgelost. Men vindt dan:

$$y = a \, . \, 2p \, . \left\{ \frac{e^{-3kt}}{(2p-3)(q-3)} - \frac{e^{-2pkt}}{(2p-3)(q-2p)} + \frac{e^{-qkt}}{(q-3)(q-2p)} \right\} . \quad (19)$$

Ten slotte is het aantal moleculen afgesplitste glycerine (s) te berekenen uit:

$$\frac{ds}{dt} = 3 \, qk \, . \, y,$$

of uit:

$$s = a - r - 3(x + y).$$

Men vindt dan:

$$s = a \left\{ 1 - \frac{2pq}{(2p-3)(q-3)} e^{-3kt} + \frac{3q}{(2p-3)(q-2p)} e^{-2pkt} - \frac{6p}{(q-3)(q-2p)} e^{-qkt} \right\} . \quad (20)$$

Het aantal moleculen afgesplitst vetzuur is blijkens het schema aan het begin van deze §:

$$z = 3x + 3 \, . \, 2y + 3s.$$

Substitueert men hierin de vergelijkingen (16), (19) en (20), dan volgt:

$$z = 3a \, . \left\{ 1 - \frac{1 + (2p-1)(q-2)}{(2p-3)(q-3)} e^{-3kt} + \frac{2(q-p)}{(2p-3)(q-2p)} e^{-2pkt} - \frac{2p}{(q-3)(q-2p)} e^{-qkt} \right\} (21)$$

Uit de formules (20) en (21) is, bij bepaalde waarden van p en q, $k \, . \, t$ te elimineeren, waardoor men dan een betrekking verkrijgt tusschen s en z. Het is echter doelmatiger voor s en z twee andere grootheden in de plaats te stellen.

Het totaal aantal moleculen glycerine is a. Noemen wij nu dàt gedeelte van de totale hoeveelheid glycerine, dat is afgesplitst g, dan is:

$$g = \frac{s}{a}$$

Het totaal aantal moleculen vetzuur is $3a$. Noemen wij nu dàt deel van het totaal aantal moleculen vetzuur, dat is afgesplitst T, dan is:

$$T = \frac{z}{3a}.$$

Uit de vergelijkingen (20) en (21) volgt nu:

$$g = 1 - \frac{2pq}{(2p-3)(q-3)} e^{-3kt} + \frac{3q}{(2p-3)(q-2p)} e^{-2pkt} - \frac{6p}{(q-3)(q-2p)} e^{-qkt} \quad (22)$$

en

$$T = 1 - \frac{1+(2p-1)(q-2)}{(2p-3)(q-3)} e^{-3kt} + \frac{2(q-p)}{(2p-3)(q-2p)} e^{-2pkt} - \frac{2p}{(q-3)(q-2p)} e^{-qkt} \quad (23)$$

Geeft men nu aan p en q achtereenvolgens verschillende waarden, dan komt men tot vergelijkingen voor g en T, waaruit, al naar gelang de aangenomen waarden van p en q zijn, $k.t$ meer of minder gemakkelijk is te elimineeren.

§ 10. Alvorens er toe over te gaan voor p en q getallenwaarden te substitueeren, wijzen wij er op, dat de vergelijkingen (22) en (23) niet toelaten de volgende waarden te substitueeren:

$$p = {}^3/_2 \;,\; q = 3 \text{ en } q = 2p.$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat bij de afleiding van (22) en (23) bewerkingen zijn toegepast, die bij bovengenoemde waarden van p en q niet uitgevoerd mogen worden. Wil men nu deze waarden toch invoeren, dan moet men te werk gaan als in § 9 en van het begin af aan voor p en q de aangenomen waarden substitueeren. Men komt dan tot transcendente vergelijkingen voor de functie:

$$\psi(T,g) = 0.$$

§ 11. Stellen we thans eerst de grenzen vast waartusschen alle krommen, door de functies $\psi(T,g)=0$, bij verschillende waarden van p en q, voorgesteld, moeten liggen. Het is duidelijk dat de uiterste waarden, die p en q kunnen hebben zijn ∞ en $\frac{1}{\infty}$.

Stellen we eerst $p=\infty$ en $q=\infty$. De physische beteekenis hiervan is, dat de concentratievergrooting der lagere glyceriden aan het aanrakingsoppervlak tengevolge van de adsorptie zóó groot is, dat hun verzeepingsnelheid vergeleken bij die van het triglyceride ∞ is.

De vergelijkingen (22) en (23) gaan in dit geval over in:

$$g = 1 - e^{-3kt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (24)$$

$$T = 1 - e^{-3kt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (25)$$

waaruit:

$$g = T \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (26)$$

Dit resultaat is natuurlijk onmiddellijk in te zien. In fig. 2, waarin g en T beide in procenten zijn aangegeven stelt A deze grens voor. De vergelijking $g = T$ zal in § 19 nader besproken worden.

Stellen we nu $q = \frac{1}{\infty}$. De physische beteekenis hiervan zou zijn, dat het monoglyceride tengevolge van negatieve adsorptie in de grenslaag slechts een concentratie $\frac{1}{\infty}$ bereikt. Deze grens heeft alleen mathematische beteekenis.

Fig. 2.

De vergelijkingen (22) en (23) gaan in dit geval, na eindigen tijd, over in:

$$g = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

$$T = 1 - \frac{4p-3}{6p-9}\, e^{-3kt} + \frac{1}{2p-3}\, e^{-2pkt} - {}^{1}/_{3} \quad . \; . \; . \quad (28)$$

d.w.z. in eindigen tijd wordt geen glycerine afgesplitst, de reactie gaat slechts tot monoglyceride. In eindigen tijd nadert T tot ${}^{2}/_{3}$.

Wordt $t = \infty$, dan gaan (22) en (23) voor $q = \frac{1}{\infty}$ over in:

$$g = 1 - e^{-qkt} \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

$$T = 1 - \tfrac{1}{3} e^{-qkt} \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

waaruit:

$$T = {}^2/_3 + {}^1/_3 g \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Voor $q = \frac{1}{\infty}$ vindt men dus de beide grenslijnen

$$g = 0 \text{ en } T = {}^2/_3 + {}^1/_3 g$$

in fig. 2 zijn beide met B aangegeven.

Alle krommen $\psi(T, g) = 0$, die bij verschillende waarden van p en q mogelijk zijn, moeten dus liggen binnen de grenzen:

$$g = T, \; g = 0, \text{ en } T\ {}^2/_3 + {}^1/_3 g$$

§ 12. Stellen we nu $p = 1$, $q = 1$. De physische beteekenis hiervan is, dat van adsorptie geen sprake is, daar de oppervlaktespanningen van alle glyceriden tegen het verzeepend milieu gelijk zijn. De verzeepingsnelheid van een estergroep is nu onafhankelijk van het al of niet verzeept zijn van een naburige groep.

Voor dit geval vindt men uit (22) en (23):

$$g = (1 - e^{-kt})^3 \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

$$T = 1 - e^{-kt} \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

waaruit:

$$g = T^3 \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

In fig. 2 is deze kromme door C aangeduid. Zij raakt bij $g = T = 0$ en bij $g = T = 1$ aan de grenslijnen B.

De vergelijking (34) is van toepassing op de verzeeping in oplossing. Uit de metingen van GEITEL[1]) en van J. MEYER[1]) volgt dat zij, althans met groote benadering, geldt voor de verzeeping van triacetine. Is het mogelijk de afgesplitste hoeveelheid glycerine in dit geval te meten, dan is langs dezen weg de trapsgewijze verzeeping van triacetine *direct* te bewijzen.

Vergelijkt men de vergelijkingen (25) en (33) dan blijkt[2]) dat meten van de snelheid van vetzuurafsplitsing nooit uitsluitsel kan geven omtrent het al of niet trapsgewijs verloopen van de verzeeping van triacetine in zure oplossing.[3])

---

[1]) l.c.

[2]) Bij de zure verzeeping in oplossing is k onveranderlijk.

[3]) Zie § 1. De vetzuurafsplitsing wordt eveneens schijnbaar monomoleculair voor $p = {}^1/_2$, $q = \infty$ en voor $p = \infty$, $q = 2$.

In tabel 3 vindt men in kolom 2 de waarden van $100\,T$ bij de aangegeven waarden van $100\,g$ behoorend, voor 't geval dat $p = q = 1$.

TABEL 3.

1	2	3	4	5	6	7	8
	Waarde van $100\,T$ voor:						
$100\,g$	$p=1$ $q=1$	$p=2$ $q=2$	$p=1$ $q=4$	$p=3$ $q=9$ of $(p=1)$ $(q=23)$	$p=1$ $q=\infty$	$p=3$ $q=\infty$	$p=\infty$ $q=\infty$
0	0	0	0	0	0	0	0
10	46.42	39.03	34.29	25.99	22.66	17.20	10
20	58.48	51.90	45.99	37.56	34.59	28.24	20
30	66.94	61.45	55.20	47.25	44.73	38.26	30
40	73.68	69.27	63.17	55.99	53.92	47.75	40
50	79.37	75.98	70.37	64.12	62.50	56.90	50
60	84.43	81.89	77.02	71.83	70.63	65.82	60
70	88.79	87.17	83.24	79.21	78.41	74.55	70
80	92.83	91.94	89.15	86.34	85.88	83.15	80
90	96.55	96.22	94.73	93.26	93.10	91.62	90
100	100	100	100	100	100	100	100

§ 13. Stelt men $p = 1$, $q = 4$, d.w.z. tengevolge van de adsorptie is de concentratie van het monoglyceride in de grenslaag 4-maal zoo groot als zij zou zijn indien geen adsorptie plaats had.

De vergelijkingen (22) en (23) gaan voor dit geval over in:

$$g = 1 + 8e^{-3kt} - 6e^{-2kt} - 3e^{-4kt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (35)$$

$$T = 1 + 3e^{-3kt} - 3e^{-2kt} - e^{-4kt} = 1 - e^{-kt}\{1 - (1-e^{-kt})^3\}. \qquad (36)$$

Uit deze beide vergelijkingen is e^{-kt} te elimineeren door de 4e machtsvergelijking (35) op te lossen en de gevonden waarde in (36) te substitueeren.

Uit (35) vindt men:

$$e^{-kt} = {}^1/_6\ \{4 - \sqrt{16-9z} + \sqrt{9z-4-8\sqrt{16-9z}+18\sqrt{(2-z)^2+{}^4/_3(1-g)}}\}$$

waarin:

$$z = {}^2/_3 \cdot \{2 - \sqrt[3]{g(1-\sqrt{1-g})} - \sqrt[3]{g(1+\sqrt{1-g})}\}. \qquad (37)$$

In kolom 4 van tabel 3 vindt men de waarden van 100 T met behulp van deze vergelijkingen berekend.

In § 22 zullen deze vergelijkingen nader besproken worden. De kromme D van fig. 2 stelt de bij elkaar behoorende waarden van 100 T en 100 g graphisch voor. Zij raakt bij $g = T = 0$ aan de grenslijn B.

§ 14. Stelt men $p = 2$, $q = 2$, dan is:

$$g = 1 + 8e^{-3kt} - 3e^{-4kt} - 6e^{-2kt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$$T = 1 + e^{-3kt} - 2e^{-2kt} = 1 - e^{-2kt}(2 - e^{-kt}) \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Het blijkt, dat hier de afgesplitste hoeveelheid glycerine een zelfde functie van den tijd is als in 't geval, dat $p = 1$, $q = 4$. Dit is een algemeene eigenschap. Is $p = 2m$ en $q = 2m$, of $p = m$ en $q = 4m$, in beide gevallen is:

$$g = 1 - \frac{8m^2}{(4m-3)(2m-3)} e^{-3kt} - \frac{3}{4m-3} e^{-4mkt} + \frac{6}{2m-3} e^{-2mkt}$$

Men kan dus om, bij een bepaalde waarde van g, T te berekenen voor 't geval $p = 2$, $q = 2$, de vergelijkingen (37) en (38) gebruiken Men vindt de zoo verkregen waarden in kolom 3 van tabel 3.

§ 15. Stelt men $p = 3$, $q = 9$ dan gaan (22) en (23) over in:

$$g = (1 - e^{-3kt})^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$T = {}^1/_3 \{(1 - e^{-3kt})^3 + (1 - e^{-3kt})^2 + 1 - e^{-3kt}\} \quad . \quad . \quad (40)$$

waaruit:

$$T = {}^1/_3 \cdot \{g + g^{2/3} + g^{1/3}\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

In kolom 5 van tabel 3 vindt men de waarden van 100 T met behulp van deze vergelijking berekend. De kromme E van fig. 2 stelt de bij elkaar behoorende waarden van 100 T en 100 g voor dit geval graphisch voor. Zij raakt bij $g = T = 0$ aan de grenslijn B.

Vergelijking (41) geldt met een afwijking $< 0.3\%$ tevens voor het geval $p = 1$, $q = 23$. In § 21 zal zij nader besproken worden.

§ 16. Voor $p = 1$, $q = \infty$ gaan (22) en (23) over in:

$$g = 1 + 2\,e^{-3kt} - 3\,e^{-2kt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

$$T = 1 + e^{-3kt} - 2\,e^{-2kt}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

waaruit:

$$(1 + g - 2\,T)^3 = (1 + 2\,g - 3\,T)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Lost men hieruit T op, dan vindt men:

$$\left.\begin{aligned} T &= {}^1/_8\,\{1 + 4g + 2\sqrt{1+8g}\,.\cos(120^\circ - {}^1/_3\,\varphi)\}, \\ \text{waarin:} & \\ \cos\varphi &= -\frac{8g^2+20g-1}{\sqrt{(1+8g)^3}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (45)$$

De hieruit berekende waarden van 100 T vindt men in kolom 6 van tabel 3.

§ 17. Stelt men $p = 3$, $q = \infty$, dan gaan (22) en (23) over in:

$$g = 1 - 2\,e^{-3kt} + e^{-6kt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

$$T = 1 - {}^5/_3\,e^{-3kt} + {}^2/_3\,e^{-6kt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

waaruit:

$$T = {}^1/_3\,(2g + \sqrt{g}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

In kolom 7 van tabel 3 vindt men de waarden van 100 T hieruit berekend. De kromme F van fig. 2 stelt de bij elkaar behoorende waarden van 100 T en 100 g voor dit geval graphisch voor. Zij raakt bij $g = T = 0$ aan de grenslijn B. In § 20 zal vergelijking (48) nader besproken worden.

Toetsing van de afgeleide formules.

§ 18. Metingen, die beoogen het vergelijken van de afgesplitste hoeveelheid glycerine met de afgesplitste hoeveelheid vetzuur zijn verricht door Kellner[1]). Deze bepaalde bij verschillende verzeepingsmethodes vrij vetzuur en gebonden glycerine[2]) van partieel verzeepte palmpittenolie.

Gaan wij eerst na hoe T en g uit de waarnemingen van Kellner zijn te vinden. Bij de berekening van het percentage afgesplitst vetzuur gaat men steeds aldus te werk: Men bepaalt het zuurcijfer van een proefje van het vet (dat eerst uitgewasschen met water en daarna gedroogd is), deelt dit door het zuurcijfer van het estervrije vetzuur en vermenigvuldigt met 100. Het getal, dat men dan verkrijgt (wij zullen dit noemen 100 T'') geeft nu aan hoeveel vrij vetzuur het proefje in procenten bevat, echter slechts bij benadering hoeveel procent van het totaal aanwezige vetzuur als vrij vetzuur aanwezig is (100 T). Immers het zuurcijfer van het estervrije vetzuur geeft aan hoeveel mgr. KOH noodig is om 1 gram van dit vetzuur te neutraliseeren. Wil men nu van een proefje partieel verzeept vet bepalen hoeveel procent van het totaal aanwezige vetzuur als vrij vetzuur aanwezig is, dan moet men hiervoor weten, *niet* het aantal

[1]) Chemiker Ztg. **33**, 453, 661, 993, (1909).

[2]) Volgens de oxydatiemethode.

mgr. KOH (a), dat noodig is om het vrij vetzuur van 1 gram vet te binden, maar het aantal mgr. KOH (b), dat noodig is voor een hoeveelheid vet, die evenveel totaal vetzuur bevat als 1 gram estervrij vetzuur. Waar het verzeepingscijfer een maat is voor het totaal aanwezige vetzuur, is dus:

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{verzeepingcijfer van het estervrije vetzuur}}{\text{verzeepingcijfer van het te onderzoeken vet}} \quad . \quad . \quad (49)$$

Het is duidelijk, dat tengevolge van het glycerinegehalte van het partieel verzeepte vet, steeds $b > a$. Om nu dus T uit T' te vinden vermenigvuldigen wij met b/a.

Om g te berekenen vermenigvuldigen wij het glycerinegehalte van elk monster weer met b/a en vinden zoodoende het aantal grammen glycerine aanwezig in een hoeveelheid van het monster, die 100 gram totaal vetzuur bevat. Weet men nu tevens het glycerinegehalte van het triglyceride, en dus ook de hoeveelheid glycerine aanwezig in zóóveel triglyceride als 100 gram vetzuur bevat, dan is g direct aan te geven.

§ 19. Bespreken wij thans de resultaten van Kellner.

Uit de opgegeven zuurcijfers en vetzuurgehalten (tabel 4—8) berekenen wij:

Zuurcijfer estervrij vetzuur. . . . . = 258.0, daaruit:
Mol. gew. „ „ . . . . = 217.8
„ „ triglyceride . . . . = 691.4
grammen glycerine in 100 gr. triglyceride. . . . = 13.31
„ „ „ triglyceride van 100 gr. vetzuur = 14.08.

Voor de verzeeping van palmpittenolie met waterige KOH geeft Kellner nu de cijfers van kolom 1, 2, 3 en 6 van tabel 4.

TABEL 4.

1	2	3	4	5	6	7
Zuurcijfer	Verzeeping-cijfer	% glycerine i. h. vet	% glyc. t.o.v. totaal vetzuur	100 g	% vrij vetzuur i. h. vet	100 T
96.3	249	8.26	8.56	39.20	37.32	38.67
193.3	253.8	3.41	3.47	75.35	74.92	76.16

Uit kolom 5 en 7 blijkt, dat $g = T$, en dus practisch $p = q = \infty$ (zie § 11 en fig. 2 lijn A), m. a. w. er heeft practisch direct splitsing in vetzuur en glycerine plaats.

De waarden door KELLNER gevonden bij de verzeeping van palmpittenolie met kalk, vindt men in kolom 1, 2, 3 en 6 van tabel 5.

TABEL 5.

1	2	3	4	5	6	7
Zuurcijfer	Verzeeping-cijfer	% glycerine i. h. vet	% glyc. t.o.v. totaal vetzuur	100 g	% vrij vetzuur i. h. vet	100 T
101.65	248.8	7.80	8.09	42.54	39.39	40.85
169.5	251.0	4.31	4.43	68.54	65.69	67.52

Ook hier blijkt bij vergelijking van kolom 5 en 7, dat $g = T$, en dus moet ook hier practisch $p = q = \infty$ zijn. Uit de proeven van KELLNER volgt dus, dat bij de verzeeping van palmpittenolie met waterige loog, zoowel als met kalk, het triglyceride practisch direct in glycerine en vetzuur uiteenvalt [1]).

Dit resultaat is in strijd met de uitkomsten van LEWKOWITSCH [2]), die bij de alcalische verzeeping van talk en katoenolie uit het oploopen van het acetylcijfer besloot tot een trapsgewijze verzeeping met meetbare tusschentrappen. Het is toch niet waarschijnlijk, dat talk en katoenolie wèl, palmpittenolie practisch niet trapsgewijs verzeept zou worden in alcalisch milieu.

Waar door R. FANTO [3]) bij de verzeeping van olijfolie, talk en tristearine met normaal KOH is gevonden, dat ook hier de afgescheiden hoeveelheid glycerine overeenkomt met directe splitsing van het triglyceride in glycerine en vetzuur, moet bij de proeven van LEWKOWITSCH het oploopen van het acetylcijfer door andere oorzaken dan de aanwezigheid van lagere glyceriden verklaard worden. Door MARCUSSON [4]) is aangetoond, dat dit inderdaad het geval is. Het verhoogde acetylcijfer wordt voornamelijk door de *vetzuren* veroorzaakt en niet door het onverzeept gebleven vet. Vermoedelijk speelt de oxydatie der onverzadigde vetzuren aan de lucht hier een rol.

De resultaten, door FANTO en KELLNER verkregen, bevestigen volkomen de conclusie aan 't eind van § 8 getrokken. In alcalisch

[1]) KELLNER trok deze conclusie door vergelijking van het gevonden glycerinegehalte van het partieel verzeepte vet, met dat berekend onder aanname van een direct volledige splitsing.

[2]) Ber. **33** 89 (1900).

[3]) Monatshefte f. Chemie **25** 919 (1904).

[4]) Ber. **39** 3466 (1906), **40** 2905 (1907).

milieu is de adsorptie der lagere glyceriden aan het aanrakingsoppervlak tusschen vet- en waterphase zóó groot, dat de kans van botsing tusschen een OH′ ion en een molecuul di- en monoglyceride practisch ∞ is t.o.v. de kans van botsing tusschen OH′ ion en een molecuul triglyceride.

§ 20. Bij de fermentatieve verzeeping van palmpittenolie vond KELLNER de waarden aangegeven in kolom 1, 2, 3 en 6 van tabel 6.

TABEL 6.

1	2	3	4	5	6	7	8
Zuurcijfer	Verzeepingcijfer	% glycerine i. h. vet	% glycerine t.o.v. totaal vetz.	100 g	% vrij vetz. i. h. vet	100 T	100 T ber. uit (48)
66.7	241.5	10.63	11.36	19.32	25.86	27.63	27.53
78.4	243.3	9.95	10.55	25.07	30.39	32.23	33.40
84.27	243.6	9.63	10.20	27.56	32.66	34.59	35.87
116.10	247.2	7.92	8.27	41.26	44.99	46.96	48.92
165.15	250.8	5.38	5.53	60.72	64.01	65.85	66.45
234.22	252.7	1.41	1.44	89.77	90.78	92.68	91.43

Bij vergelijking van kolom 5 en 7 blijkt, dat hier $g \neq T$. In kolom 8 zijn nu opgenomen de waarden, die men vindt voor $100\,T$ wanneer men T berekent uit g met behulp van formule (48), dus aannemende, dat $p = 3$ en $q = \infty$. (Zie § 17 en fig. 2 kromme F).

Het blijkt, dat de berekende en waargenomen waarden van $100\,T$ voldoende overeenstemmen, vooral wanneer men bedenkt dat g niet nauwkeuriger dan tot ca. 1 % te bepalen is (bij kleine waarden van g is zelfs een veel grootere fout niet te vermijden).

Nu mag natuurlijk *niet* de conclusie getrokken worden, dat dus bij de vermelde verzeeping $p = 3$ en $q = \infty$. Ook door andere waarden van p en q aan te nemen zullen vergelijkingen zijn op te stellen (welke echter in 't algemeen niet toelaten T expliciet als functie van g aan te geven), die met de experimenteel gevonden waarden min of meer kloppen[1]). Men moet dan ook vergelijking (48) en evenzoo de in de volgende §§ besproken vergelijkingen opvatten

[1]) Het is de vraag of p en q *hier* alleen functies zijn van de oppervlaktespanningen tusschen de glyceriden en de *waterige oplossing*, aangezien het enzym zich volgens NICLOUX (l.c.) niet in oplossing bevindt (zie ook § 7).

als benaderingsformules, die globaal een inzicht geven in de verhoudingen der oppervlaktespanningen van de drie glyceriden tegen het verzeepende milieu. Is het verband tusschen p en q eenerzijds en de oppervlaktespanningen tusschen waterige oplossingen en de drie glyceriden anderzijds quantitatief bekend, dàn zal zijn uit te maken in hoever de hier aangenomen waarden van p en q met de waarheid overeenstemmen.

Naar aanleiding van tabel 6 zij nog opgemerkt, dat de door KELLNER verkregen resultaten niet overeenkomen met hetgeen door M. NICLOUX gevonden is bij de fermentatieve verzeeping van katoenolie. Uit de cijfers van NICLOUX volgt een practisch directe splitsing in glycerine en vetzuur (zie § 5). Mogelijk ligt het verschil hierin, dat KELLNER de emulsie door inblazen van lucht in beweging hield, NICLOUX daarentegen de emulsie snel door roeren tot stand bracht, haar daarna aan zichzelf overliet.

Ten slotte zij er hier nog op gewezen, dat de betrekking bestaande tusschen vrij vetzuur en afgesplitste glycerine gelegenheid biedt meer licht te verspreiden over het mechanisme der vetsplitsing in kiemende zaden. Het is nog een open vraag of de reactie daar analoog verloopt aan de verzeeping met behulp van het ferment uit ricinuszaad.

§ 21. Bij de verzeeping volgens het TWICHELL-proces vond KELLNER voor palmpittenolie de waarden uit kolom 1, 2, 3 en 6 van tabel 7.

TABEL 7.

1	2	3	4	5	6	7	8
Zuurcijfer	Verzeepingcijfer	°/₀ glycerine i. h. vet	°/₀ glycerine t.o.v. totaal vetz.	100 g	°/₀ vrij vetz. i. h. vet	100 T	100 T ber. uit (41)
56.9	241.7	(11.36)	(12.13)	(13.85)	22.05	23.54	(30.79)
91.9	242.0	10.32	11.00	21.88	35.63	37.99	39.48
122.4	244.8	8.72	9.19	34.73	47.43	49.99	51.48
177.5	248.9	5.15	5.34	62.07	68.81	71.33	73.38
210.3	252.0	2.87	2.94	79.12	81.54	83.48	85.72

In kolom 8 vindt men de waarden van 100 T berekend uit g met behulp van formule (41), die is afgeleid voor het geval, dat $p=3$ en $q=9$, maar die met een afwijking kleiner dan 0.3°/₀ tevens geldt voor 't geval dat $p=1$, $q=23$ (zie § 15 en fig. 2 kromme E).

In de eerste rij wijken de gevonden en de berekende waarden van 100 T sterk uiteen. Dit zegt echter weinig, daar dit groote verschil reeds wegvalt indien het glycerinegehalte van het vet 12.1% i. p. v. 11.36% is. Wanneer nog weinig glycerine is afgesplitst heeft een kleine fout in het glycerinegehalte van het betreffende monster of van het triglyceride, waarop men de berekening van g baseert, een zeer grooten invloed op de berekende waarde van 100 T. De overeenstemming tusschen de overige waarden van kolom 7 en 8 is voldoende.

Waar nu uit de proeven, beschreven in § 7 en 8 volgt, dat bij de Twitchell-verzeeping vermoedelijk algemeen $p = 1$ is, zal in dit geval q een waarde moeten hebben, die, blijkens de overeenstemming van kolom 7 en 8 in tabel 7, naar beneden weinig afwijkt van de waarde $q = 23$ [1]).

§ 22. De waarden door Kellner gevonden bij de autoclavenverzeeping van palmpittenolie vindt men in kolom 1, 2, 3 en 6 van tabel 8.

TABEL 8.

1	2	3	4	5	6	7	8
Zuurcijfer	Verzeepingcijfer	% glycerine i. h. vet	% glycerine t.o.v. totaal vetz.	100 g	% vrij vetz. i. h. vet	100 T	100 T ber. uit (36) en (37)
55	242	(12.16)	(12.96)	(7.95)	21.30	22.71	(31.24)
131.5	247.5	9.84	10.26	27.13	50.96	53.12	52.72
193	251	5.28	5.43	61.43	74.80	76.89	77.94
212	252	3.75	3.84	72.23	82.17	84.13	84.89
218	253	2.83	2.89	79.47	84.48	86.15	88.85
229.5	254.7	2.11	2.14	84.80	88.94	90.09	91.86

In kolom 8 bevinden zich de waarden van 100 T uit g berekend met behulp van de vergelijkingen (36) en (37), dus aannemende dat $p = 1$ en $q = 4$ (zie § 13 en fig. 2 kromme D).

In de eerste rij is de afwijking tusschen de gevonden en berekende waarde van 100 T weer 't sterkst. Veel gewicht is ook hier niet aan te hechten, daar deze afwijking reeds verdwijnt indien het

[1]) Een afwijking naar boven heeft zeer weinig invloed. (Zie tabel 3 kolom 5 en 6).

glycerinegehalte van het vet 12.6°/₀ is i. p. v. 12.16°/₀. De overige waarden van kolom 7 en 8 stemmen voldoende overeen.

Het is niet onwaarschijnlijk, dat ook bij de autoclavenverzeeping, waar in zwak zuur milieu verzeept wordt, $p = 1$ is. Met zekerheid is hier echter niets van te zeggen, daar de invloed van zinkzeep bij de proeven van §§ 7 en 8 niet is onderzocht. Is werkelijk ook hier $p = 1$, dan moet q, blijkens de overeenstemming van kolom 7 en 8 in tabel 8, een waarde hebben, die weinig afwijkt van $q = 4$.

RÉSUMÉ.

In deze verhandeling is aangetoond, dat bij de verzeeping in emulsie de reactie, in hoofdzaak, op de grens der beide phasen plaats heeft, en dat in dit geval het beloop van de verzeeping beheerscht wordt door de grootte der oppervlaktespanningen tusschen de glyceriden en het verzeepende medium.

Waar verzeepingsnelheden hier geen inzicht in het mechanisme der reactie geven, aangezien zij beinvloed worden door de veranderlijke fijnheid der emulsie, werden vergelijkingen afgeleid, die het verband aangeven tusschen afgesplitst vetzuur en afgesplitste glycerine.

Deze vergelijkingen, rekening houdende met de concentratie-vermeerdering der lagere glyceriden aan het aanrakingsoppervlak tusschen vet- en waterphase, tengevolge der adsorptie, bleken het verschillend beloop der verzeeping in verschillende milieu's te kunnen verklaren.

Ten slotte wil ik gaarne van de gelegenheid gebruik maken Dr. Geitel mijn dank te betuigen voor de welwillendheid en de belangstelling bij de bewerking van deze verhandeling ondervonden.

Laboratorium der Koninklijke Stearine
Kaarsenfabriek „Gouda".

Gouda, November 1916.

Scheikunde. — De Heer ZEEMAN biedt een mededeeling aan van de Heeren A. SMITS en C. A. LOBRY DE BRUYN: *„Een nieuwe methode voor het passiveeren van ijzer.”*

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

1. Dompelt men ijzer in een electrolyt, dan hebben wij te maken met de volgende samengestelde evenwichten:

$$\begin{array}{ccccc} Fe_S & \rightleftarrows & Fe_S^{\cdot\cdot} & + & 2\,\theta_S \\ \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow \\ Fe_L & \rightleftarrows & Fe_L^{\cdot\cdot} & + & 2\,\theta_L \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\begin{array}{ccccc} Fe_S & \rightleftarrows & Fe_S^{\cdot\cdot\cdot} & + & 3\,\theta_S \\ \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow \\ Fe_L & \rightleftarrows & Fe_L^{\cdot\cdot\cdot} & + & 3\,\theta_L \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

waaruit volgt:

$$\begin{array}{ccccc} Fe_S^{\cdot\cdot} & \rightleftarrows & Fe_S^{\cdot\cdot\cdot} & + & \theta_S \\ \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow \\ Fe_L^{\cdot\cdot} & \rightleftarrows & Fe_L^{\cdot\cdot\cdot} & + & \theta_L \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Van deze evenwichten hebben die, welke door vertikale pijltjes aangeduid zijn, uitgezonderd het evenwicht tusschen de ongeladen ijzeratomen in de vaste phase en in den electrolyt, betrekking op dat deel van het heterogene evenwicht, dat den potentiaalsprong beheerscht.

Nu is er reeds vroeger op gewezen, dat het ijzer, dat in innerlijk evenwicht verkeert, alleen in electromotorisch evenwicht kan zijn met een oplossing, die bijna uitsluitend ferro-ionen bevat, zoodat dus onder deze omstandigheden het evenwicht

$$Fe_L^{\cdot\cdot} \rightleftarrows Fe_L^{\cdot\cdot\cdot} + \theta_L$$

in oplossing bijna geheel naar links ligt.

Voegen wij nu ferri-ionen toe, dan zal een gevolg hiervan zijn, dat ferro-ionen en electronen uit het ijzer in oplossing gaan, waardoor het evenwicht in het ijzeroppervlak wordt verstoord.

Deze verstoring kan nu weer worden opgeheven, doordat in het ijzer-oppervlak de reactie

$$Fe_S \rightarrow Fe_S^{\cdot\cdot} + 2\,\theta_S$$

plaats grijpt, en het zal dus geheel van de snelheid, waarmede deze ionisatie plaats grijpt afhangen, of een verstoring d.w.z. in dit geval een veredeling van het metaal-oppervlak en daarmede een afname van den negatieven potentiaalsprong optreedt.

Nu hadden wij, reeds twee jaar geleden, gevonden, dat het inderdaad mogelijk is het innerlijk evenwicht in het ijzer-oppervlak op de hier aangegeven wijze te verstoren en verder is gebleken, dat zooals te verwachten was, de grootte van de verstoring afhangt 1e van de snelheid, waarmede de vloeistof wordt geroerd, 2e van

de concentratie der ferri-ionen en ten 3e van de temperatuur.

Toen dit was geconstateerd hebben wij pogingen in het werk gesteld om de verstoring door een oplossing van een ferri-zout zóó ver te drijven, dat het ijzer passief werd. Als ferrizout kozen wij ferri-nitraat, omdat het ons gebleken was, dat het nitraat-ion een negatieven katalytischen invloed op de instelling van het innerlijk evenwicht uitoefent.

Proeven bij de gewone temperatuur genomen met ijzer electroden, die met lak in een glazen buisje waren ingekit, gaven aanvankelijk op een enkele uitzondering na, een negatief resultaat. Intusschen vernamen wij van de Heeren ORNSTEIN en MOLL, die zich naar aanleiding van ons onderzoek eveneens eenigen tijd met de passiviteit van ijzer hebben bezig gehouden, dat het hun gelukt was een in glas ingesmolten dunnen ijzerdraad passief te maken door dompeling in een oplossing van $Fe(NO_3)_3$.

Bij voortzetting van het onderzoek bleek nu, dat ons aanvankelijk negatief resultaat vermoedelijk te wijten was aan het inkitten van de ijzer-electrode en dat, wanneer de kit het door dit materiaal bedekte gedeelte van het ijzer niet volkomen tot alle capillaire groefjes en spleetjes afsluit, een passiveering in een oplossing van $Fe(NO_3)_3$ waarschijnlijk uitblijft, door enting, die van de niet-passieve, en toch met de oplossing in contact staande gedeelten uitgaat. Door de grootste zorg aan het inkitten te besteden gelukt het dan ook, ijzer-electroden te verkrijgen, die bij dompeling in een oplossing van $Fe(NO_3)_3$ bij de gewone temperatuur bijna momentaan passief worden.

Dit resultaat kan ook worden bereikt, door het ijzer in glas in te smelten zooals de Heeren ORNSTEIN en MOLL deden. Men moet dan daarbij gebruik maken van email, omdat door het groote verschil in uitzettings-coëfficient tusschen glas en ijzer anders geen volkomen afsluitende insmelting te verkrijgen is.

Ook gelukt deze methode van passiveering van ijzer met ijzer-electroden van grootere afmetingen. Men hangt daartoe het ijzer aan een platina draadje of om de proef zuiverder te nemen aan een haakje van glas. [1])

2. Wanneer wij nu onze nieuwe beschouwingen op het hier besprokene toepassen, dan zien wij onmiddellijk in, dat de verstoring van ijzer door een oplosmiddel teweeggebracht, van twee omstandigheden zal afhangen 1e van de snelheid van aantasting en ten 2e van de snelheid van de reactie $Fe_S \rightarrow Fe_S^{\cdot\cdot} + 2\theta_S$.

[1]) Gebruikt men een platina draadje dan is de proef niet zuiver, omdat dan een element ontstaat, waarbij het ijzer de negatieve electrode vormt en dus voortdurend wordt gepolariseerd.

Het is derhalve duidelijk, dat de verstoring zal toenemen met de concentratie van de $Fe(NO_3)_3$-oplossing, en dat bij gebruik van dezelfde $Fe(NO_3)_3$-oplossing bij temperatuursverhooging een kleinere verstoring zal optreden, wanneer de invloed van de temperatuur op de homogene reactie $Fe_S \rightarrow Fe_S^{\cdot\cdot} + 2\theta_S$ grooter is, dan op de snelheid van aantasting, hetgeen een heterogene reactie is.

Actieve IJzer-electrode gebracht in een oplossing bevattende 0.14 grammol. $Fe(NO_3)_3$ per Liter.

Temp. der oplossing	Toestand v. h. ijzer	
20°	passief	
30°	passief	
35°	actief	grens 31°—34°
31°	passief	
34°	actief	
30°	passief	

Oplossing bevat 0.11 grammol. $Fe(NO_3)_3$ per Liter.

Temp. der oplossing	Toestand v. h. ijzer	
10°	passief	
19°	passief	
23°	actief	grens 20.5°—22
20.5°	passief	
22°	actief	
20°	passief	

Oplossing bevat 0.06 grammol. $Fe(NO_3)_3$ per Liter.

Temp. der oplossing	Toestand v. h. ijzer	
9°	actief	
3°	passief	
5°	passief	
7°	passief	grens 8°—9°
10°	actief	
8°	passief	

Het voortgezet onderzoek heeft nu bewezen, dat dit inderdaad het geval is.

Wij kunnen dit het best duidelijk maken aan de hand van de hier voorgaande tabellen, (zie p. 903).

Uit deze tabellen blijkt n.l., dat het gelukt, ijzer door middel van een $Fe(NO_3)_3$-oplossing passief te maken, en verder zien wij, dat de temperatuur waarbij de passiviteit optreedt hooger ligt, naar mate de concentratie der $Fe(NO_3)_3$-oplossing grooter is.

3. Ofschoon de mogelijkheid van het hier geconstateerde verschijnsel op grond van onze beschouwingen werd voorspeld, moesten toch nog andere experimenten worden genomen, alvorens wij in de verkregen resultaten een stellige bevestiging konden zien van genoemde beschouwingen.

Het is n.l. bekend, dat $Fe(NO_3)_3$ gedeeltelijk hydrolytisch wordt gesplitst en daarom moest worden nagegaan, of de verstorende invloed ook door het salpeterzuur, in de gebruikte oplossing aanwezig, uitgeoefend zou kunnen zijn.

Om dit na te gaan werd de proef bij kamertemperatuur herhaald, met een oplossing van salpeterzuur, die een weinig sterker zuur was, dan de gebruikte ferri-nitraat-oplossing. Het resultaat was, dat het ijzer actief bleef. Om het resultaat nog sprekender te maken werd de salpeterzuurconcentratie verhoogd tot 32 gew. $^0/_0$ HNO_3, doch het resultaat veranderde niet, het ijzer bleef actief.

Dit ondubbelzinnige resultaat deed dus zien, dat de verstorende werking van de ferri-nitraat-oplossing t.o.v. ijzer, inderdaad te wijten is aan het ferri-ion, en dat de verkregen resultaten mogen worden opgevat als sterk sprekende bevestigingen van de nieuwere opvattingen omtrent de electromotorische processen en evenwichten tusschen een metaal en een electrolyt.

SAMENVATTING.

Door het hierboven beschreven onderzoek is dus met zekerheid aangetoond dat, geheel in overeenstemming met het vermoeden, reeds vroeger uitgesproken, de verstoring van het ijzeroppervlak door een oplossing van ferri-nitraat hieraan moet worden toegeschreven, dat het unaire ijzer alleen in electromotorisch evenwicht kan zijn met een oplossing, die naast ferro-ionen slechts uiterst weinig ferri-ionen bevat, zoodat ijzer in een ferri-oplossing gebracht ferro-ionen en electronen zal uitzenden.

Stelt het innerlijk evenwicht in het metaal zich minder snel in, dan het metaal in oplossing gaat, dan zal het innerlijk evenwicht in het ijzer-oppervlak worden verstoord in de edele richting d.w.z.

het oppervlak zal rijker worden aan ferri-ionen, en armer aan electronen.

Dit geval doet zich hier inderdaad voor, en genoemde verstoring neemt toe, behalve door sneller roeren, door vergrooting der ferri-ionen-concentratie, en door daling van temperatuur. Dank zij den negatief katalytischen invloed van het nitraat-ion kon het ijzer op deze wijze gemakkelijk worden gepassiveerd.

Met zekerheid kon worden uitgemaakt, dat niet het hydrolytisch afgesplitst salpeterzuur genoemde verstoring bewerkt, want zelfs een salpeterzuuroplossing van 32 gew. $^0/_0$ HNO_3 was niet in staat het ijzer passief te maken.

Amsterdam, 16 Dec. 1916. *Anorg. Chem. Laboratorium der Universiteit.*

Wiskunde. — De Heer Brouwer biedt een mededeeling aan van den Heer H. B. A. Bockwinkel: „*Enige opmerkingen over de volledige transmutatie*". (Vierde mededeling).

(Mede aangeboden door den Heer H. A. Lorentz).

18. In deze mededeling willen we het algemenere teorema van Taylor voor de funksionaalrekening behandelen, waarvan een biezonder geval, dat we als zodanig teorema van Mac-Laurin noemden, in de vorige mededeling besproken is. Vooraf zullen we evenwel een ogenblik stilstaan bij een belangrijke stelling van de normale additieve transmutatie, die ons in 't vervolg te pas zal komen.

De bedoelde stelling is een spesiaal geval van een andere, die voor een kontinue transmutatie in 't algemeen geldt, en die, globaal uitgedrukt, daarin bestaat dat zo'n transmutatie zijn additieve eigenschap *behoudt* ten aanzien van een *oneindige* som. De stelling luidt:

Als een reeks, waarvan de termen funksies zijn die deel uitmaken van het F. V. van een k o n t i n u e additieve transmutatie T, in het N. V. F. u n i f o r m konvergeert naar een funksie u, die eveneens deel uitmaakt van het F. V., dan konvergeert de reeks, waarvan de termen gelijk zijn aan de getransmuteerden van de eerstgenoemde termen, in het N. V. O. u n i f o r m naar $T(u)$.

Immers zij

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_m + \ldots,$$

zodanig dat de reeks *uniform* konvergeert in het N. V. F. van T, dan wil dit zeggen: Bij ieder gegeven, willekeurig klein bedrag δ is er een geheel getal N zodanig dat, in het *hele* N. V. F. van T

$$\left| \sum_{n}^{\infty} {}_m u_m \right| < \delta, \quad \text{voor} \quad n \geq N$$

Verder is er, wegens de kontinuiteit van T, bij ieder gegeven, willekeurig klein bedrag τ een bedrag σ zodanig dat, als v een, overigens willekeurige, funksie van het F. V. is,

$$| T(v) | < \tau \qquad \text{in het N.V.O. van } T,$$

indien

$$| v | < \sigma \qquad \text{in het N.V.F. van } T.$$

Dus is er bij ieder gegeven, willekeurig klein bedrag τ een geheel getal N, zodanig dat, in het N. V. O. van T,

$$\left| T\left(\sum_{n}^{\infty}{}_m u_m\right)\right| < \tau, \quad \text{als} \quad n \overline{>} N.$$

Nu is, wegens de additieve eigenschap van T, in het numerieke operatieveld

$$T(u) = T(u_0) + T(u_1) + \ldots + T(u_{n-1}) + T\left(\sum_{n}^{\infty}{}_m u_m\right),$$

waaruit, in verband met het zo juist gevondene, volgt dat men in dat veld ook heeft

$$T(u) = \sum_{0}^{\infty}{}_m T(u_m),$$

terwijl de reeks daar *uniform* konvergeert. Daarmee is de stelling bewezen.

Is T een *normale* transmutatie, dan is zowel het N. V. F. als het N. V. O. een sirkel met middelpunt x_0. De stralen van deze beide noemen we resp. (σ) en (α). De *karakteristieke* ontwikkeling van u is dan die in een machtreeks

$$u = c_0 + c_1 y + \ldots + c_m y^m + \ldots, (y = x - x_0).$$

Noemt men ξ'_m de funksie waarin $(x - x_0)^m$ door T getransformeerd wordt (deze *bestaat*, en is *regulier* in (α), aangezien de rationele gehele funksies deel uitmaken van het F. V. van een normale transmutatie), dan heeft men dus in (α)

$$T(u) = c_0 \xi'_0 + c_1 \xi'_1 + \ldots + c_m \xi'_m + \ldots,$$

en de reeks konvergeert daar *uniform*. Dit is de stelling waar we op doelden, en die we als volgt uitdrukken:

Is T een normale additieve transmutatie, waarvan de sirkel (α) het N. V. O. en de sirkel (σ) het N. V. F. vormt, dan kan de getransmuteerde Tu van een funksie u van het F. V. gevonden worden, door de transmutatie term voor term toe te passen op de machtreeks,

waarin u in het gebied (σ) *ontwikkeld kan worden, en de uitkomst is een reeks die uniform binnen* (α) *konvergeert.*

19. We behandelen nu de *veralgemening* van het teorema van TAYLOR voor de funksionaalrekening.

Dit betreft de ontwikkeling van de transmutatie T toegepast op een produkt $w = vu$ naar machten van Du, als de getransmuteerde Tv van v en een aftelbaar oneindig aantal andere grootheden, die men de afgeleiden van de transmutatie T, toegepast op v, kan noemen (de naam is van PINCHERLE afkomstig), bekend zijn; een ontwikkeling van Tw *in het punt*, of *op de plaats* $w = v$, zoals we zouden kunnen zeggen, terwijl dan de biezondere ontwikkeling, die naar machten van Dw, er een op de plaats $w = 1$ zou kunnen heten. (Vgl. hiermee de ontwikkeling van een funksie $f(x)$ op de plaats $x = a$ naast die op de plaats $x = 0$).

We onderstellen weer:

1°. T is *normaal*, zodanig dat het N.V. een sirkel (α) met middelpunt x_0 is, terwijl de funksies van het F.V. behoren tot een met (α) konsentriese sirkel (σ).

2°. De bij T behorende reeks P is *volledig* in (α) met korresponderend gebied (β).

Het is verder voor het vervolg gemakkelik, om te onderstellen dat als toegevoegd veldpaar van T in aanmerking komt ieder toegevoegd veldpaar van P, hetgeen involveert dat men voor (σ) kan nemen iedere sirkel *groter* dan (β) (zie N°. 12, 2e mededeling). Mogelikerwijs zal men niet (β) zelf als N.V.F. bij (α) als N.V.O. mogen aannemen (N°. 13), maar in ieder geval heeft men nu, volgens het funksionele teorema van MAC LAURIN, $Tu = Pu$, voor alle funksies die tot (β) behoren, omdat, als u tot (β) behoort, hij ook behoort tot een iets grotere sirkel. Volgens de slotopmerking in N°. 15 (3e mededeling) zou men, als T nog niet voor al deze funksies gedefinieerd was, het F.V. van T daarover kunnen uitbreiden, door voor die funksies eenvoudig $Tu = Pu$ te stellen. En indien T voor een zeker deel van de tot (β) behorende funksies wèl gedefinieerd was, maar *anders*, zódanig dat daarvoor $Tu \neq Pu$, dan zou T niet *kontinu* zijn in het *totale* veld, en dan zouden we ons toch, bij de beschouwingen waar het hier om gaat, van een aldus gedefinieerde T afwenden, en er een andere voor in de plaats stellen, die ook voor de genoemde funksies identiek is met P.

Is w nu een funksie die tot (β) behoort, dan hebben we dus in het gebied (α)

$$Tw = Pw \equiv \sum_0^\infty{}_n \frac{a_n w^{(n)}}{n!}.$$

Nu is, daar $w = vu$, volgens de formule van LEIBNIZ

$$w^{(n)} = vu^{(n)} + n_1 v' u^{(n-1)} + \ldots + v^{(n)} u$$

dus

$$Tw = \sum_0^\infty{}_n \frac{a_n}{n!} (vu^{(n)} + n_1 v' u^{(n-1)} + \ldots + v^{(n)} u).$$

In ieder lid van deze laatste reeks, van het rangnummer $n = m$ af, komt een term voor met $v^{(m)}$; deze termen bijeen nemende, kunnen we de getransmuteerde *Tw, voorlopig formeel,* als volgt voorstellen

$$Tw = \sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_k a_{m+k} \frac{u^{(m)}}{m!} \cdot \frac{v^{(k)}}{k!} \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

We zullen nu aannemen dat u en v beide tot (β) behoren, en dan aantonen dat de dubbeloneindige reeks in 't rechter lid *absoluut* konvergeert; dan is daarmee tevens, zoals bekend is, de geldigheid van de verandering in groepering van de termen in de voorlaatste reeks bewezen, en dus de juistheid van de laatste formule.

Behoren u en v tot (β), dan behoren ze ook tot een iets grotere sirkel (ϱ) met een straal $\varrho = \beta + \delta$, $(\delta > 0)$. Is voorts de maksimum-modulus van u zowel als van v op de omtrek van (ϱ) kleiner dan M, dan is in 't gebied (α)

$$\left|\frac{v^{(k)}}{k!}\right| < \frac{\varrho M}{(\beta - \alpha + \delta)^{k+1}} \quad , \quad \frac{u^{(m)}}{m!} < \frac{\varrho M}{(\beta - \alpha + \delta)^{m+1}} \quad . \; . \quad (36$$

Omdat verder de transmutatie volledig is in (α), met korresponderend gebied (β), is er bij ieder gegeven willekeurig klein getal ε een voor het hele gebied (α) geldend [1]) geheel getal n_ε, zodanig dat

$$|\, a_n \,| < (\beta - \alpha + \varepsilon)^n, \quad \text{voor} \quad n > n_\varepsilon \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

Dus heeft men voor $k \geq n$, bij *iedere* gehele niet negatieve m, en in alle punten van (α),

$$\left| a_{m+k} \frac{v^{(k)}}{k!} \right| < \frac{\varrho M (\beta - \alpha + \varepsilon)^m}{\beta - \alpha + \delta} \cdot \left(\frac{\beta - \alpha + \varepsilon}{\beta - \alpha + \delta}\right)^k \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Denken we ons nu ε kleiner dan δ gekozen, dan is dus het linkerlid van deze ongelijkheid in het gebied (α) vergelijkbaar met de algemene term van een afdalende meetkundige reeks van konstante pozitieve termen. De reeks

[1]) Zie de onderstelling in de 2e alinea van N⁰. 4, 1e mededeling.

$$a'_m = \sum_0^\infty {}_k\, a_{m+k} \frac{v^{(k)}}{k!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

konvergeert dus *absoluut* en uniform in het gebied (α). Daar de reeks die in (35) het eerst gesommeerd moet worden, hieruit ontstaat door de termen te vermenigvuldigen met de van k onafhankelike, in (α) geborneerde faktor $u^{(m)} : m!$, konvergeert die eveneens absoluut en uniform in (α) en wel voor *alle* gehele niet negatieve waarden van m.

Er blijft nu nog over, de konvergentie van de reeks

$$\sum_0^\infty {}_m\, b_m \left| \frac{u^{(m)}}{m!} \right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

te bewijzen, waarin

$$b_m = \sum_0^\infty {}_k \left| a_{m+k} \frac{v^{(k)}}{k!} \right| . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39a)$$

De ongelijkheid (38) geldt, blijkens (37) en de eerste van (36) ook voor *alle* gehele, niet negatieve k, en in alle punten van (α), indien $m \overline{>} n_\varepsilon$. Men heeft dus in (α)

$$b_m < \frac{\varrho M}{\delta - \varepsilon} (\beta - \alpha + \varepsilon)^m \quad , \quad \text{voor } m \overline{>} n_\varepsilon, \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

waaruit, in verband met de tweede van (36), volgt dat, op de duur, de termen van de reeks (40) in het hele gebied (α) vergelijkbaar zijn met die van een afdalende meetkundige reeks van niet van x afhankelike, pozitieve termen. De reeks (40) konvergeert dus uniform in (α), en daarmee is de *absolute* en uniforme konvergentie van het sisteem van twee achtereenvolgende reeksen in (35) en dus de geldigheid van deze formule aangetoond.

Met behulp van (39) kunnen we die formule als volgt schrijven:

$$Tw = T(vu) = \sum_0^\infty {}_m\, a'_m \frac{u^{(m)}}{m!} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

In deze vorm is het de bedoelde ontwikkeling van $T(vu)$ in een „reeks van TAYLOR". Om de analogie beter te doen uitkomen, voeren we de volgende simboliese schrijfwijze in. De ontwikkeling

$$Tv = \sum_0^\infty {}_k \frac{a_k\, v^{(k)}}{k!}$$

geeft aanleiding, om de transmutatie T voor te stellen door het simbool

$$T = \sum_0^\infty k \frac{a_k D^k}{k!}$$

Differentieert men dit simbool naar D, alsof het een machtreeks in die letter was, en stellen we het komende simbool door T' voor, dan is

$$T' = \sum_0^\infty k \frac{a_{k+1} D^k}{k!}$$

Zo doorgaande vinden we, het rezultaat van m-malige differentiatie door $T^{(m)}$ aanduidende,

$$T^{(m)} = \sum_0^\infty k \frac{a_{m+k} D^k}{k!} \quad \ldots \ldots \quad (43)$$

Volgens (39) kunnen we dus schrijven

$$a'_m = T^{(m)}(v) \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

en voor formule (42)

$$T(vu) = \sum_0^\infty m \frac{T^{(m)}(v)}{v!} D_u^m \quad \ldots \ldots \quad (42')$$

Daar het simbool dat de operatie $T^{(m)}$ aanduidt door m-malige differentiatie uit het simbool voor T ontstaan is, kunnen we de operatie $T^{(m)}$ de m^e afgeleide van T noemen; PINCHERLE voert deze naam in, hoewel met een andere aanloop. Verder merken we op dat de transmutatie D in de funksionaalrekening beantwoordt aan de funksie $y = x$ in de funksieteorie, omdat de afgeleide van D gelijk aan 1 is, die van D^m aan $m D^{m-1}$, en de $m+1^e$ afgeleide van D^m gelijk aan nul. Uit dien hoofde kunnen we de transmutatie die door een rationele gehele funksie van het simbool D wordt aangeduid een *rationele gehele operatie* noemen. *Oneindige* machtreeksen in D stellen dan wat we kunnen noemen een *transsendente* operatie voor.

De formule (42') is nu duidelik te herkennen als een *ontwikkeling in de reeks van* TAYLOR, d. w. z. een ontwikkeling van *Tw op de plaats v*, naar machten van de eenvoudigste operatie D berekend voor de *aangroeiing u*; we moeten dan *aangroeiing met u* opvatten in de zin van *meetkundige* aangroeiing, d. w. z. *vermenigvuldiging* met u. We kunnen dan ook spreken van *de ontwikkeling van Tw*

in een meetkundige omgeving van het funksionele punt $w = v$. Voor $v = 1$ gaat de reeks weer in de vroeger gevonden biezondere over; hierbij blijkt dat de koëffisiënten a_m kunnen opgevat worden als $T^{(m)}(1)$, d. w. z. de m^e afgeleiden van T toegepast op het funksionele beginpunt $w(x) = 1$. Voor deze biezondere waarde van $w(x)$ kan men de bedoelde afgeleiden dus ook met behulp van de formule (24) vinden; voor $w = v$ geldt, zoals bij PINCHERLE te vinden is, en we zo aanstonds zullen verifieren, de volgende veralgemening van (24)

$$a'_m \equiv T^{(m)}(v) = T(x^m v) - m_1 x T(x^{m-1} v) + \ldots + (-1)^m x^m T(v) \quad (45)$$

Uit de afleiding die we van de *algemene* ontwikkeling gegeven hebben, blijkt dat hij onder dezelfde voorwaarden als de *biezondere* geldig is, behoudens de toevoeging dat „beginpunt" $v(x)$ en „aangroeiing" $u(x)$ *beide* tot het F. V. van de met T korresponderende reeks P behoren. Hiermee is het *algemene* teorema van TAYLOR voor de funksionaalrekening bewezen, in de volgende vorm:

Is de reeks P die aan een n o r m a l e *additieve transmutatie T beantwoordt,* v o l l e d i g *in het sirkelvormige gebied* (α), *dat het N. V. O. van T vormt, dan kan in dit gebied $T(w)$ in de funksionele reeks van* TAYLOR *ontwikkeld worden, op de plaats $w = v$, indien zowel beginpunt v als aangroeiing u ($w = vu$) tot de met (α) korresponderende sirkel (β) behoren.* [1]

20. We kunnen beide leden van (42) ook als een operatie op de funksie u opvatten. Dan staat er de ontwikkeling van de transmutatie $T_1 = Tv$, toegepast op de funksie u, in een „reeks van MAC-LAURIN". Aangezien de uitkomst die we in het vorige nummer gevonden hebben, leert dat deze reeks (die we, als beantwoordende aan de transmutatie T_1, door P_1 zullen aanduiden) in het gebied (α) konvergeert voor *iedere* funksie die tot (β) behoort, mits dit ook met de vaste, gegeven funksie v het geval is, is de reeks P_1 insgelijks volledig in het gebied (α), en wel met een korresponderend gebied, dat hoogstens gelijk is aan (β). Dit kan ook rechtstreeks uit de ongelijkheid (41) worden afgeleid, die a fortiori voor $|a'_m|$ geldt. Want het is duidelik dat men, in plaats van de uitspraak waarvan die ongelijkheid de uitdrukking is, even goed kan zeggen: Bij ieder gegeven, willekeurig klein getal ε is er een geheel getal n_ε zodanig dat

$$|a'_m| < (\beta - \alpha + \varepsilon)^m, \quad \text{voor} \quad m > n, \quad . \; . \; . \quad (41a)$$

[1]) We hebben er nu niet meer ekspres bij gezegd dat u, v, w deel uitmaken van het F.V., omdat dit, volgens onze overeenkomst in het begin van dit nummer, vanzelf spreekt, nu deze funksies tot (β) behoren.

en hieruit volgt, als men het 2[e] gedeelte van het bewijs in N°. 4 (1[e] mededeling) raadpleegt, de volledigheid van de reeks P_1 in (α), met een korresponderend gebied dat hoogstens gelijk is aan (β).

We kunnen dus de in N°. 18 gevonden uitkomst ook zó interpreteren: *Is de reeks P, die beantwoordt aan een normale additieve transmutatie T, volledig in het sirkelvormige gebied* (α), *dat het N. V. O. van T vormt, met korresponderend gebied* (β), *dan* 1° *is de reeks* P_1, *die beantwoordt aan de transmutatie* $T_1 \equiv T(v)$, *waarin v een gegeven, vaste funksie is, die tot de sirkel* (β) *behoort, eveneens volledig in* (α), *met een korresponderend gebied dat hoogstens gelijk is aan* (β); 2° *heeft men in het gebied* (α)

$$T_1(u) = P_1(u)$$

voor die funksies van het F. V. van T_1 *die tot* (β) *behoren.*

We voegen hier nog aan toe: Daar de laatste gelijkheid cet. par. volgens het „teorema van MAC-LAURIN" juist zou gelden, als $T_1 \equiv Tv$ een *normale* transmutatie was, rijst de vraag, of dit het geval is. Deze vraag moet bevestigend beantwoord worden. Immers, als een funksie u van het funksionele veld $F(T)$ van T tot (β) behoort, dan is dit ook met het produkt vu het geval, zodat $T(vu)$, en dus ook $T_1 u \equiv T(vu)$, volgens onze overeenkomst in 't begin van N°. 19, in het gebied (α) *bestaat*. Hieruit volgt: Er is voor de transmutatie T_1 een veldpaar aan te geven, waarvan het *numerieke* veld de sirkel (α) is, en het *funksionele* veld bestaat uit de funksies die tot de sirkel (β) behoren. Daar hieronder ook de rationele, gehele funksies begrepen zijn, voldoet T_1 alvast aan de voorwaarden sub 1° en 2°, die we in N°. 15 (3[e] mededeling) voor een normale additieve transmutatie aangegeven hebben. Maar T_1 is ook *kontinu* in het genoemde veldpaar; immers, nadert u in het gebied (β) tot nul, dan is dit ook het geval met het produkt vu van u met de vaste, tot (β) behorende funksie v. Maar dan nadert ook, wegens de kontinuiteitseigenschap van T, de grootheid $T(vu)$ in het gebied (α) tot nul, en daar deze identiek is met $T_1 u$, is hiermee de kontinuiteitseigenschap van T_1 aangetoond.

Vat men de uitdrukking Tvu op als de uitkomst van de transmutatie $T_1 \equiv (Tv)$, toegepast op de funksie u, dan ligt de volgende afleiding van de uitdrukking (45) voor de koëffisienten $a'_m \equiv T^{(m)}(v)$ van de met T_1 korresponderende reeks P_1 onmiddellik voor de hand. Noemt men ξ'_m de funksie waarin x^m door T_1 wordt getransformeerd, dan is

$$\xi'_m = (Tv)\, x^m = T(vx^m),$$

en dan voert toepassing van de simboliese formule (24), volgens

welke men heeft

$$a'_m = (\xi' - x)^m ,$$

onmiddellik tot (45). Hieruit kan men dan weer de andere voorstelling (39) van a'_m vinden, door eerst uit (45) af te leiden, dat men voor $m=1$ heeft

$$T'(v) = T(xv) - x\,T(v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

en dat de rekurrente betrekking geldt

$$T^{(m)}(v) = T^{(m-1)}(xv) - x\,T^{(m)}(v) \text{ [1]}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Volgens het „teorema van MAC-LAURIN" heeft men dan verder in het gebied (a),

$$T(v) = \sum_{0}^{\infty}{}_n\, a_n \frac{v^{(n)}}{n!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

$$T(xv) = xa_0 v + \sum_{1}^{\infty}{}_n\, a_n \left(x\frac{v^{(n)}}{n!} + \frac{v^{(n-1)}}{(n-1)!} \right) . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

De laatste som kan gesplitst worden in

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \left(x a_n \frac{v^{(n)}}{n!} \right) + \sum_{1}^{\infty}{}_n \left(a_n \frac{v^{(n-1)}}{(n-1)!} \right) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Daar nl. de eerste van deze beide reeksen, behoudens dat de term met $n=0$ ontbreekt, gelijk is aan de reeks (48) vermenigvuldigd met x, konvergeert hij, evenals deze laatste, in het gebied (a) en levert daar, met de term xa_0v samen, de grootheid $x\,Tv$ op. De tweede reeks is nu eveneens konvergent in (a), aangezien ook de ongesplitste reeks in (49) daar konvergeerde; substitueert men verder in de tweede reeks $k+1$ voor n, dan komt er dus

$$T(xv) = x\,T(v) + \sum_{0}^{\infty}{}_k\, a_{k+1} \frac{v^{(k)}}{k!}$$

zodat men, in verband met (46),

$$T'(v) = \sum_{0}^{\infty}{}_k\, a_{k+1} \frac{v^{(k)}}{k!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

heeft. Deze reeks verschilt slechts in zoverre van (48) dat alle a's één plaats naar links zijn opgeschoven; uit deze opmerking en het, door (47) uitgedrukte feit dat men elke volgende afgeleide operatie

---

[1]) De betrekkingen (46) en (47) treden bij PINCHERLE als *definitie* van de achtereenvolgende afgeleide transmutaties van T op.

telkens op dezelfde manier uit de voorgaande krijgt[1]), volgt onmiddellik de juistheid, in het gebied (α), van de voorstelling (39) voor $T^{(m)}(r)$.

Stel nu dat $v(x)$ de konvergentiestraal r heeft, en zij r_1 de α-waarde, waarmee, voor de reeks P, r als β-waarde korrespondeert. Dan is alvast de reeks P_1, die beantwoordt aan de transmutatie $T_1 = (Tv)$, volledig in ieder gebied $(\alpha) < (r_1)$, met korresponderend gebied $(\beta') < (r)$. Maar de reeks P_1 zal dikwels nog volledig zijn in een gebied *groter* dan (r_1), zoals uit formule (45) valt op te maken. Volgens deze zijn nl. de grootheden a'_m regulier in een gebied, als dit met de getransmuteerden van $x^m v$, voor willekeurige gehele, pozitieve waarden van m, het geval is. En nu hebben we in de Nos. 7 en 8 (2e mededeling) uitvoerig toegelicht dat de getransmuteerde Tw van een funksie w met konvergentiestraal r zeer goed regulier kan zijn in een sirkel *groter* dan de sirkel (r_1) waarmee (r), voor de bij T behorende reeks P, korrespondeert.

Gewoonlik zal verder $T(x^m v)$ tegelijk met Tv regulier zijn in een gebied. Stel nl. dat T *normaal* is, zodanig dat het N.V.O. een sirkel $(\alpha) > (r_1)$ is, en het N.V.F. een sirkel $(\sigma) < (r)$. Is gegeven dat *alle* funksies die tot (σ) behoren, deel uitmaken van het F.V., dan is niets te demonstreren, aangezien daarin ligt opgesloten dat zowel v als $x^m v$ een getransmuteerde in (α) hebben. Maar is voorlopig alleen gegeven dat v deel uitmaakt van het F.V., dan kan men als volgt laten zien dat dit gewoonlik meebrengt dat ook $x^m v$ er deel van uitmaakt[2]). Is nl.

$$v = c_0 + c_1 y + \ldots + c_n y^n + \ldots \qquad (y = x - x_0),$$

de machtreeks waarin v op de plaats $x = x_0$ ontwikkeld kan worden, dan heeft men volgens de stelling van N°. 18, in het gebied (α),

$$Tv = c_0 \xi_0' + c_1 \xi_1' + \ldots + c_n \xi_n' + \ldots,$$

als ξ_n' de getransmuteerde van $(x - x_0)^n$ is. Past men nu T term voor term toe op de reeksontwikkeling van yv, dan komt er

$$c_0 \xi_1' + c_1 \xi_2' + \ldots + c_n \xi'_{n+1} + \ldots$$

Uit de konvergentie van de eerste reeks volgt die van de tweede,

---

1) Hierbij is ook nog te bedenken dat de formule (51) geldig blijft, als men v door xv vervangt, hetgeen daarin zit dat hij geldt voor een *willekeurige* funksie die tot (β) behoort.

2) Het is niet in strijd met onze afspraak, in 't begin van N°. 19 gemaakt, dat we over het geval spreken waarin $T(x^n v)$ *niet* tegelijk met Tv regulier is in gebieden *groter* dan (r_1). Wèl volgt uit die afspraak dat we ons alleen bemoeien met een T, die voor *alle* funksies met de konvergentiestraal r een getransmuteerde oplevert, regulier in een gebied *kleiner* dan (r_1), omdat *voor de reeks* P met dit laatste een gebied *kleiner* dan (r) korrespondeert.

als de verhouding van ξ'_{n+1} tot ξ'_n voor alle gehele n binnen *eindige* grenzen blijft. Dit nu is vaak het geval (b.v. bij S_ω en bij D^{-1}) en zo ja, dan is het duidelik dat dan ook de reeks waartoe $y^m v$ aanleiding geeft, konvergeert. Stellen we de uitkomst een ogenblik voor door $T_0(y^m v)$, dan *hoeft* dit wel niet, voor andere waarden dan $m = 0$, gelijk aan $T(y^m v)$ te zijn, maar er *bestaat* dan toch een *normale* transmutatie nl. T_0 die, bij behoud van het N.V. $(\alpha) > (r_1)$, zowel v als $y^m v$, en dus ook $x^m v$ in zijn F.V. bevat, en het is begrijpelik dat T in *gewone* gevallen zo gedefinieerd zal zijn dat het juist *die* transmutatie is.

Is nu Tv en $T(x^m v)$ regulier in een gebied (α) groter dan (r_1), dan is dat ook met $\alpha'_m = T^{(m)}(v)$ het geval, en dan is er veel kans dat $\alpha'_x = lim\,|\alpha'_m|^{\frac{1}{m}}$ in zo'n grotere sirkel *geborneerd* zal zijn, dus dat de reeks P_1 daarin *volledig* is. We komen zo definitief tot het inzicht:

De reeks P_1, die bij de transmutatie $T_1 = (Tv)$ behoort, is niet alleen volledig in ieder gebied kleiner dan (r_1), maar meestal in ieder gebied kleiner dan (r') als r' de konvergentiestraal van Tv is.

Is nu de konvergentiestraal van de funksie u groter dan r, dan zal de reeks in een gebied groter dan (r_1) konvergeren. Men heeft dan voor de getransmuteerde van w, voor de operatie T, door te ontwikkelen op de plaats $w = v$, naar machten van $D\left(\frac{w}{v}\right)$, een uitdrukking kunnen vinden die deze getransmuteerde in een *groter* numeriek veld voorstelt dan het geval zou geweest zijn, als men ontwikkeld had op de plaats $w = 1$. Of we kunnen de zaak ook zó beschouwen dat, bij *behoud* van het *numerieke* veld $(\alpha) > (r_1)$, het *funksionele*, dat eerst bestond uit funksies die tot een sirkel $(\beta) > (r)$ behoren, nu is uitgebreid tot *sommige* funksies die niet tot (β) behoren, nl. diegene welke *dezelfde soort* singulariteit, in het gebied (β), vertonen als een vaste funksie $v(x)$, zodanig dat hun quotient met v regulier is in (β); funksies, waarvan we ook kunnen zeggen dat ze *in een meetkundige omgeving van het funksionele punt $v(x)$ liggen.* Zo opgevat ziet men in het hier beschouwde verschijnsel analogie met dat van de analitiese voortzetting in de funksieteorie. (Vgl. N°. 8).

21. We lichten nu het algemenere teorema van TAYLOR met een paar voorbeelden toe. Als transmutatie nemen we vooreerst, in een omgeving van de oorsprong, de substitutie S_ω waarin ω een funksie van x is die $x = 0$ als gewoon punt heeft, met, voor dat punt, een konvergentiestraal A. We hebben in N°. 17 (3e mededeling) uitvoerig toegelicht dat S een normale transmutatie is, en wel zodanig

dat het numerieke veld een sirkel is met straal $a < A$, en het funksionele bestaat uit de funksies die behoren tot de met (a) konsentriese sirkel (σ) waarvan de straal σ gelijk is aan de grootste modulus van ω in het gebied (a). Verder zagen we dat bij deze transmutatie een reeks P behoort die volledig is in (a), met een korresponderend gebied (β) dat bepaald wordt door de vergelijking

$$\beta = a + | \omega (x_m) - x_m | ,$$

als x_m het punt op de omtrek van (a) is, waar $|\omega - x|$ zijn maksimum bereikt; we toonden aan dat β minstens gelijk is aan σ.

Wij kunnen dus het funksionele teorema van TAYLOR toepassen op een funksie $w = vu$, mits we onderstellen dat de konvergentiestraal r van de vaste beginfunksie v groter is dan $|\omega(0)|$. De sirkel (r_1), waarmee (r), voor de reeks P, korrespondeert, wordt hier bepaald door de voorwaarde dat daarin de maksimummodulus van $\omega - x$ gelijk is aan $r - r_1$, terwijl de konvergentiesirkel (r') van $S_\omega(v)$ voldoet aan de voorwaarde dat daarin de maksimummodulus van ω gelijk is aan r. De ontwikkeling in de reeks $P_1 u$ zal in het gebied (a), voor een funksie u die tot (β) behoort, *stellig* gelden, als $a < r_1$, maar vermoedelik ook als $r_1 < a < r'$. We zullen zien hoe het hiermee gesteld is, en berekenen daartoe de grootheden a'_m met behulp van (45). Er komt

$$a'_m = (\omega - x)^m v [\omega (x)] = (\omega - x)^m S_\omega (v).$$

De reeks $P_1 u$ wordt dus, volgens (42)

$$S_\omega (v u) = \sum_0^\infty {}_m S_\omega (v) (\omega - x)^m \frac{u^{(m)}}{m!} .$$

Brengt men hierin de faktor $S_\omega(v)$ buiten het somteken, dan is de overblijvende reeks juist de reeks Pu, die beantwoordt aan de transmutatie $S_\omega(u)$. Afgezien van de genoemde faktor konvergeert de reeks dus in *ieder* gebied $(a) < (A)$, mits u tot het gebied (β) behoort. Met de faktor $S_\omega(v)$ er bij konvergeert de reeks dus voor zo'n funksie in ieder geval nog, indien a kleiner is dan de konvergentie straal r' van $S_\omega(v)$. Daarmee is ons vermoeden bevestigd.

Is bv. $\omega(x) = \frac{1}{2} x$, dan is $a_m = (\frac{1}{2} x)^m$, dus $a(a) = \frac{1}{2} a$ en $\beta = \frac{3}{2} a$, zodat men heeft

$$r_1 = \tfrac{2}{3} r$$

Maar de konvergentiesirkel (r') van $S_{\frac{1}{2}x}(v)$ heeft een straal

$$r' = 2r$$

zodat de reeks P_1 hier in een vrij wat groter gebied dan (r_1) volledig is.

22. Als tweede voorbeeld nemen we de transmutatie D^{-1}, insgelijks in een omgeving van $x = 0$. In N°. 16 zagen we dat D^{-1} normaal

is zodanig dat het numerieke veld een willekeurige sirkel (a) is, en het funksionele bestaat uit de funksies die tot diezelfde sirkel behoren. Verder was de bij D^{-1} behorende reeks P volledig in (a) met korresponderend gebied $(2a)$. Houden we ten aanzien van de vaste funksie v dezelfde notaties als hiervóór, dan is in dit geval dus

$$r_1 = \tfrac{1}{2} r$$

terwijl de konvergentiesirkel (r') van $D^{-1}(v)$ dezelfde is als die van (v), zodat men heeft

$$r' = r.$$

We verwachten dus dat de reeks P_1, die behoort bij de transmutatie $(D^{-1}v)$, niet slechts volledig in (a) zal zijn voor $a < \frac{1}{2}r$, wat volgens het teorema noodzakelik is, maar ook indien $\frac{1}{2}r < a < r$. De uitkomst bevestigt dit. Formule (45) geeft

$$a'_m = \int_0^x t^m v(t)\,dt - m_1 x \int_0^x t^{m-1} v(t)\,dt + \ldots + (-1)^m x^m \int_0^x v(t)\,dt$$

$$= \int_0^x (t-x)^m v(t)\,dt,$$

welke uitkomst om te beginnen regulier is binnen de konvergentiesirkel (r) van $D^{-1}v$. Om een majorantwaarde van $|a'_m|$ te vinden, herleiden we als volgt:

$$|a'_m| \leqq \int_0^x |t-x|^m \,.\, |v(t)| \,.\, |dt| \leqq a^m M(a) \int_0^x |dt|$$

of

$$|a'_m| \leqq a^{m+1} M(a),$$

als $a = |x|$ en $M(a)$ de maksimummodulus van v op de omtrek van de sirkel (a) is.

Hieruit volgt, zolang $a < r$,

$$a'_x = \lim_{m=} |a'_m|^{\frac{1}{m}} \leqq a$$

dus

$$a'(a) \leqq a,$$

overeenkomstig de algemene uitkomst $(41a)$ in N°. 20, maar hier uitgebreid tot gebieden *groter* dan $(\frac{1}{2}r)$, mits kleiner dan (r). Dus is de reeks P_1 inderdaad volledig in ieder gebied $(a) < (r)$, en wel met een korresponderend gebied (β') dat hoogstens gelijk is aan $(2a)$. De reeks $P_1 u$, bepaald door (42) konvergeert dus binnen de sirkel $(\frac{1}{2}s)$, als de konvergentiestraal s van u kleiner is dan $2r$, en anders binnen de sirkel (r).

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt eene mededeeling aan van den Heer J. M. BURGERS: „*Adiabatische Invarianten bij mechanische systemen*" II. (Supplement N°. 41*d* bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden).

(Mede aangeboden door den Heer LORENTZ.)

Systemen met meetbare betrekkingen tusschen de middelbare bewegingen.

In het 1e gedeelte van dit artikel[1]) is aangetoond dat voor mechanische systemen waar elk moment p_k zich laat uitdrukken in den vorm:

$$p_k = \sqrt{F_k\,(q_k\,.\,\alpha'\,.\,.\,.\,\alpha^n, a)}$$

en elke koördinaat een libratiebeweging uitvoert, de *n faze-integralen*:

$$I_k = \int p_k\, dq_k$$

alle adiabatische invarianten zijn, indien tusschen de middelbare bewegingen ω^{j_1} der hoekvariabelen τ^j geen meetbare betrekkingen bestaan. Zooals t. a. p. reeds opgemerkt is, was deze onderstelling noodzakelijk opdat het systeem alle toestanden die door de punten van een periodencel gerepresenteerd worden, achtereenvolgens doorloopt, zoodat een integraal over den tijd door een integraal over het volume eener cel vervangen mocht worden.

We willen nu het geval nagaan dat er wel kommensurabele betrekkingen tusschen de middelbare bewegingen bestaan, en zullen aantoonen dat indien men de adiabatische veranderingen beperkt tot *diegene welke deze betrekkingen onveranderd laten,* minstens een aantal bepaalde lineaire kombinaties der I_k (met geheele koefficiënten) invarianten zijn. Bij een zuiver periodiek systeem, waar alle middelbare bewegingen gelijk zijn, treedt als eenige dergelijke kombinatie op de som van alle fazeintegralen (m. a. w. de werkingsintegraal uitgestrekt over een volle periode van het systeem), waarvan het invariante karakter reeds door EHRENFEST bewezen is[2]).

De beweging van het mechanische systeem zullen we afbeelden in het koördinatenstelsel der hoekvariabelen τ, welke met de kanonische t's verbonden zijn door de betrekkingen:

$$\tau^j = \sum_i \omega^{ji}.\, t_i. \qquad (1)$$

In de t-ruimte zijn de grensvlakken der periodencellen gegeven door:

---

1) Deze Verslagen XXV (1916) p. 849.

2) P. EHRENFEST, ibidem XXV (1916) p. 412.

$$\sum_i \omega^{ji} . t = \text{geheel getal};$$

de τ-ruimte wordt dus verdeeld in „perioden-kuben” met ribben $= 1$. Daar bij de beweging van het systeem $t_2 \ldots t_n$ konstant zijn, terwijl $t_1 = t - t_0$ is, wordt de baan in de τ-ruimte voorgesteld door de rechte:

$$\tau^j = \omega^{j_1} . t + konst. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ter vereenvoudiging der formules denken we ons de t's zoo bepaald dat de konstante overal nul is.

Ondersteld wordt nu dat tusschen de middelbare bewegingen ω^{j_1} λ betrekkingen bestaan van den vorm:

$$\sum_j m_j^{\mu} . \omega^{j_1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$(\mu = 1 \ldots \lambda \quad ; \quad m_j^{\mu} : \text{geheele getallen}).$$

Vervangen we elk punt van de t-lijn door het kongruente punt binnen de eerste cel, dan vullen de zoo verkregen punten deze cel *niet* op, doch liggen slechts in de $(n-\lambda)$-dimensionale gebieden bepaald door:

$$\sum_j m_j^{\mu} . \tau^j = \text{geheel getal.} \; (\mu = 1 \ldots \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Beschouw van deze gebieden datgene dat de t-lijn zelf bevat, en waarvoor dus:

$$\sum_j m_j^{\mu} . \tau^j = 0 \quad (\mu = 1 \ldots \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hierin kunnen we op de volgende wijze een *periodennet* aangeven: de hoekpunten van het net zijn de **geheele** oplossingen der vergelijkingen (5). Alle geheele oplossingen hiervan zijn *lineair* met *geheele koefficiënten* op te bouwen uit een „*primitief*” stel van $n-\lambda$ onafhankelijke oplossingen:

$$\tau^j = r_s^j \qquad (s = 1 \ldots n - \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Een dergelijk stel geeft de hoekpunten van een *primitieve periodencel.*

Voer nu in het door (5) bepaalde gebied (het gebied G) een stelsel van $n-\lambda$ koördinaten ϑ^s in, zoodat:

$$\tau^j = \sum_s r_s^j . \vartheta^s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

De periodencellen zijn dan begrensd door de „hypervlakken”:

$$\vartheta^s = \text{geheel getal.}$$

Op analoge wijze als in het algemeene geval kan aangetoond worden dat de middelwaarde van een funktie voor alle punten der t-lijn vervangen mag worden door de middelwaarde voor alle punten van

een [(n—λ)-dimensionale)] periodencel in het gebied G. Het tijdgemiddelde van een grootheid Z is derhalve gelijk aan:

$$\overline{Z}=\int_0^1 \dots \int_0^1 d\vartheta' \dots d\vartheta^{n-\lambda} . Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Deze formule moet in de beschouwde gevallen in de plaats van verg. 20 (1e gedeelte) gebruikt worden voor de berekening der grootheden: $\overline{\dfrac{\partial H^m}{\partial a}}$.

Stellen we nu:

$$Y_s = \sum_k r_s^k . I_k \qquad (s = 1 \dots n - \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

dan kan bewezen worden dat de grootheden Y_s invarianten zijn bij die adiabatische beïnvloedingen van het systeem, welke de betrekkingen (3) onveranderd laten.

Schema der berekening.

Gebruik makende van de in het 1e gedeelte verkregen uitdrukking voor $\dfrac{\delta I_k}{\delta a}$ (verg. 23) vindt men:

$$\frac{\delta Y_s}{\delta a} = \sum_k r_s^k . \frac{\delta I_k}{\delta a} = \sum_k r_s^k . 2 \int_{\xi k}^{\eta k} dq_k \frac{\partial \sqrt{F_k}}{\partial a} - \sum_{klm} r_s^k . \omega_{km} . \overline{f^{lm} \frac{\partial \sqrt{F_l}}{\partial a}} . \quad (10)$$

Het tweede stuk hiervan is gelijk aan:

$$-\sum_l \int_0^1 \dots \int_0^1 d\vartheta' \dots d\vartheta^{n-\lambda} \sum_{km} r_s^k . \omega_{km} . f^{lm} . \frac{\partial \sqrt{F_l}}{\partial a} \quad . \quad . \quad (11)$$

(de grootheden r_s^k, ω_{km} zijn *konstanten*, en mogen dus onder het integratieteeken genomen worden). Transformeer het bij den index l behoorende gedeelte van de variabelen: $\vartheta^1 \dots \vartheta^s \dots \vartheta^{n-\lambda}$ op: $\vartheta^1 \dots \vartheta^{s-1}\, q_l\, \vartheta^{s+1} \dots \vartheta^{n-\lambda}$. De funktionaal-determinant is:

$$\frac{\partial(\vartheta^1 \dots \vartheta^s \dots \vartheta^{n-\lambda})}{\partial(\vartheta^1 \dots q_l \dots \vartheta^{n-\lambda})} = \frac{1}{\dfrac{\partial q_l}{\partial \vartheta^s}} = \frac{1}{\sum_{km} f^{lm} . \omega_{km} . r_s^k} \quad . \quad . \quad (12)\ [1]$$

Zoodat (11) overgaat in:

[1]) Men heeft n.l.:

$$dq_l = \sum_m f^{lm}\, dt_m = \sum_{mk} f^{lm} . \omega_{km} . d\tau^k = \sum_{mks} f^{lm} . \omega_{km} . r_s^k . d\vartheta^s .$$

$$-\sum_l \int_0^1 \ldots \int_0^1 d\vartheta^1 \ldots d\vartheta^{s-1}\, d\vartheta^{s+1} \ldots d\vartheta^{n-\lambda} \cdot \int dq_l \frac{\partial \sqrt{F_l}}{\partial a} \quad . \quad (13)$$

Wanneer ϑ^s van 0 tot 1 loopt, neemt τ^l toe met r_s^l; dus beschrijft q_l r_s^l *volle perioden* [1]). De uitdrukking (13) wordt daardoor:

$$-\sum_l r_s^l \cdot 2 \int_{\xi_l}^{\eta_l} dq_l \cdot \frac{\partial \sqrt{F_l}}{\partial a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Voegt men dit in verg. (10) in, dan blijkt: $\delta Y_s = 0$, waarmee bewezen is dat voor de beschouwde adiabatische processen Y_s *een invariante is.*

Opmerkingen.

1. Door SCHWARZSCHILD en EPSTEIN [2]) is er op gewezen dat wanneer de totaalenergie a' van het systeem uitgedrukt wordt als functie der I_k, ze tengevolge der betrekkingen (3) *slechts afhankelijk is van dezelfde lineaire combinaties* der $\mathbf{I_k}$ als de $\mathbf{Y_s}$ zijn. *Het is dus steeds mogelijk door quantiseering der adiabatische invarianten de waarde der energie vast te leggen.*

2. Men kan in de verg. $Y = \sum r_s^k \cdot I_k =$ adiabatische invariante voor de koëfficienten-systemen: $r_s^1 \ldots r_s^n$ $(s = 1 \ldots n - \lambda)$ een willekeurig primitief stel oplossingen der verg. (5) nemen. Alle dergelijke stellen zijn door lineaire substituties met geheele koefficienten en met determinant ± 1 met elkaar verbonden. Hetzelfde geldt dus voor de groepen van $n - \lambda$ onafhankelijke grootheden Y_s: zijn $Y_1^1 \ldots Y_{n-\lambda}^1$ en $Y_1^2 \ldots Y_{n-\lambda}^2$ twee van deze groepen, dan heeft men:

$$Y_{s'}^2 = \sum_s c_{s'}^s \cdot Y^1{}_s$$

$$\text{en} \quad Y^1{}_s = \sum_{s'} \gamma_s^{s'} \cdot Y_{s'}^2$$

waar zoowel de $c_{s'}^s$ als de $\gamma_s^{s'}$ *geheele* getallen zijn. Stelt men de $Y_s^1 = n_s \cdot h$, waar n_s alle geheele, positieve en negatieve waarden

[1]) In het komplexe q_l-vlak (cf. SOMMERFELD, Phys. Zeitschr. **17** (1916) p. 500) loopt de integratieweg r_s^l malen om de beide vertakkingspunten $q_l = \xi_l$, $q_l = \eta_l$ der funktie: $p_l = \sqrt{F_l(q_l)}$.

[2]) K. SCHWARZSCHILD, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1916, p. 550.
P. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **51** (1916) p. 180.

doorloopt, dan doorloopen ook de Y_s^2 alle geheele, positieve en negatieve multipla van h. Evenzoo krijgt men voor de totaalenergie a' precies dezelfde waarden, hetzij men ze in de Y_s^1, dan wel in de Y_s^2 uitdrukt.

3. De vraag rijst: Zijn de boven gevonden grootheden Y_s de eenige adiabatische invarianten bij deze systemen?

De vergadering wordt gesloten.

(22 Februari 1917.)

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 27 JANUARI 1917.

DEEL XXV.

N°. 7.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1. Bericht van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en F. A. H. SCHREINEMAKERS dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2. Kennisgeving van het overlijden op 12 November 1916 van Dr. PERCIVAL LOWELL, stichter en Directeur van „*Lowell Observatory*" te Flagstaff-Arizona.

Deze kennisgeving is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

3. Eene gedrukte circulaire, bevattende het oordeel over de antwoorden op de prijsvraag, welke in Januari 1916 volgens de bepalingen van het Fonds GIJSBERTI HODENPIJL door de afdeeling der weg- en waterbouwkunde van de Technische Hoogeschool, daartoe uitgenoodigd door het College van Curatoren, werd uitgeschreven.

Aangenomen voor kennisgeving.

Dierkunde. — De Heer J. F. VAN BEMMELEN brengt, mede namens den Heer MAX WEBER, het volgende Rapport uit over het in hunne handen gestelde manuscript eener verhandeling van Dr. A. C. OUDEMANS te Arnhem, getiteld: „*Dodo-Studiën*", aangeboden ter uitgave in de Werken der Akademie.

De vondst van den sinds lang uitgestorven vogel Dodo op den gevelsteen uit het jaar 1561 op een huis te Vere, gaf den schrijver aanleiding de geschiedenis van dezen merkwaardigen vogel en van zijn eveneens uitgestorven aanverwanten: den Witten Dodo en den Solitaire (Pezophaps folitarius Gm.) opnieuw grondig na te gaan.

Daargelaten een aantal skeletstukken, over verschillende Musea verspreid, kent men deze uitgestorven, of beter gezegd door den mensch uitgeroeide vogels, die eertijds de Maskarenen bewoonden, slechts uit de beschrijvingen en vooral afbeeldingen, die in de allereerste plaats aan Nederlandsche zeevaarders en schilders te danken zijn.

Er bestaat reeds een uitgebreide literatuur, waarin die oude beschrijvingen gerecapituleerd en gecommenteerd zijn. Vaak zijn die

geschriften vergezeld van reproducties van figuren in den tekst dier oude beschrijvingen of van afbeeldingen, die voorkomen op schilderijen van ROELANDT en SALOMON SAVERY, van de HONDECOETER e.a. of als houtsneden of etsen werden uitgegeven.

Uit de studie van Dr. OUDEMANS blijkt in de eerste plaats, dat het beeld op den gevelsteen te Vere de oudste voorstelling is van den Dodo (Raphus cucullatus L.). Verder is de schrijver er in geslaagd meer en nieuw licht te verspreiden over de geschiedenis der bekende afbeeldingen van dezen gewonen Dodo, maar vooral van den Witten Dodo (Apterornis solitarius Selys). Het is den schrijver toch gelukt na eindelooze moeite twee tot heden nog niet gereproduceerde aquarellen van den Witten Dodo van de hand van PIETER HOLSTEYN uit het jaar 1638 in particulier bezit te ontdekken. Voorts eene nagenoeg onbekend gebleven geaquarelleerde teekening van den kop van den Witten Dodo van de hand van CORNELIS SAFTLEVEN, die ongeveer uit 1637 dateert en in het Museum Boymans te Rotterdam bewaard wordt, op te diepen.

Door zijne met taaie volharding uitgevoerde historische naspeuringen, die op menig vraagstuk een onverwacht licht werpen, werd de schrijver als van zelve in staat gesteld een uitgebreid en waardevol overzicht te geven over de afbeeldingen, die van de onderhavige vogels bestaan en tevens een zeer volledige lijst van de uitgebreide literatuur over hen.

Maar de schrijver heeft zich niet vergenoegd met de historisch-zoologische zijde van zijn onderwerp; hij heeft tevens getracht nieuw licht te verspreiden over morphologische, biologische en zoogeographische kwesties, rakende de familie der Raphidae, onder welken naam de drie uitgestorven vogels, die in de orde der Duifachtigen behooren, samengevat worden.

Hij kon hierdoor b.v. vaststellen, dat de Witte Dodo inderdaad de vertegenwoordiger is van een eigen geslacht; hij kon de omvangrijke monographie van ROTHSCHILD over „Extinct Birds" op menig punt verbeteren e. d. m.

Ondergeteekenden aarzelen derhalve niet der Afdeeling aan te bevelen de „Dodo-Studiën" van Dr. OUDEMANS in hare Verhandelingen uit te geven en daarin tevens op te nemen de 27 afbeeldingen, die zijn geschrift verduidelijken.

(get.) MAX WEBER.
„ J. F. VAN BEMMELEN.

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusie van het rapport.

Aan den Heer OUDEMANS zal hiervan kennis gegeven worden.

Physiologie. — De Heer G. VAN RIJNBERK biedt eene mededeeling aan over: „*Spiertonus en ontherseningsstijfte*”.

Inleiding Tot heden weet niemand wat men precies onder tonus van een dwarsgestreepte zoogdierspier te verstaan heeft. Gewoonlijk beschouwt men alle langzame spierverkortingen of verkortingsneigingen al of niet voerend tot spanningsvermindering of verkorting, als tonische.

Belangrijke onderzoekingen door landgenooten verricht hebben echter in de laatste jaren nieuwe inzichten geleverd, op grond waarvan wij thans twee geheel nieuwe en scherpere kenmerken voor de tonusverschijnselen bezitten.

PEKELHARING en zijne medewerkers (1908—'13)[1]) hebben aangetoond, dat spieren, die verkeerd hebben in gestage verkorting, rijker aan creatine worden gevonden, dan dezulke, die reeksen snelle of tetanische verkortingen verricht hebben. Daar deze creatine slechts als voortbrengsel van eiwitstofwisseling opgevat kan worden, wordt dus blijkbaar bij den tonus eiwit verbruikt, terwijl bij de snelle en de tetanische verkorting wel zeker hoofdzakelijk, of alleen, koolhydraten (en vet?) verbrand worden.

Het tweede kenmerk is een ontleedkundig, en heeft betrekking op den weg, waarlangs de tonische zenuwprikkels de spieren bereiken. BOEKE (1909—13)[1]) heeft door de ontdekking van bijzondere neveneindplaatjes, verbonden aan naakte zenuwvezels, in de spieren, hoogst waarschijnlijk gemaakt, en de onderstelling uitgesproken, — DE BOER (1913)[1]) heeft proefondervindelijk bewezen[2]), — dat de tonus in de achterpootspieren van kat en kikker onderhouden wordt door prikkels, welke langs thoracaal-autonome (sympathische) zenuwvezels verloopen. Terwijl de voor de snelle verkortingen benoodigde prikkels uit het C. Z. S. langs de gewone van ouds bekende mergscheehoudende spinale (en cerebrale) zenuwvezels afvloeien, nemen de voor de instandhouding van den spiertonus noodige prikkels langs de rami communicantes, den omweg over den sympathicus.

Naast de door de onderzoekingen van BOTTAZZI uiterst waarschijnlijk gemaakte theorie, dat de spiertonus uitdrukking is van een grondeigenschap, niet der fibrillen, maar van het spiersarcoplasma —,

---

[1]) Voor nauwkeurige literatuur-opgaven over deze onderwerpen raadplege men de dissertatie van Dr. S DE BOER: De beteekenis der tonische innervatie voor de funktie der dwarsgestreepte spieren. Amsterdam Van Rossen, 1914.

[2]) Hier wensch ik mij thans niet te begeven in een bespreking van de tegen DE BOER's proeven o.a. door YAS KUNO en onlangs door DUSSER DE BARENNE (Plüger's Archiv CLXVI, 145, Bonn 1916) aangevoerde gegevens.

bezitten wij dus nu twee nieuwe omschrijvingen van den tonus der dwarsgestreepte spieren: tonus is uitdrukking van bepaalde in de levende eiwitstof der spieren zetelende chemische omzettingen, waarvan creatine als een der eindprodukten te beschouwen is. En voorts: tonus is dié functie der spieren, welke vanuit het thoracaal-autonome zenuwstelsel onderhouden wordt.

Het is nu natuurlijk van belang na te gaan, in hoeverre deze beide omschrijvingen elkander dekken. Reeds vóór DE BOER zijn proeven op de rami-communicantes verrichtte, had DUSSER DE BARENNE in het jaar 1910, in mijn Laboratorium, de onderstelling van BOEKE en de chemische gegevens van PEKELHARING in één bepaald geval aan elkaar willen toetsen. Door PEKELHARING was gevonden, dat de spieren van een achterpoot, welke zich in ontherseningsstijfheid had bevonden, rijker aan creatine zijn, dan de spieren van den anderen achterpoot van hetzelfde dier, welke tengevolge der doorsnijding van de dorsale ruggemergwortels die reflectorische stijfheid niet vertoond hebben. De ontherseningsstijfheid behoort op grond van dit kenmerk dus tot de tonische spierverkortingen.

Volgens de onderstelling van BOEKE mocht men aannemen, dat de nerveuze prikkels voor het optreden van deze tonische stijfheid zich langs sympathische zenuwvezels van het ruggemerg naar de spieren begeven.

DUSSER DE BARENNE nam nu aan de eene zijde van den buik de grensstreng van den N. sympathicus weg bij katten, welke zich reeds in ontherseningsstijfheid bevonden, of verrichtte de snee door den hersenstam, welke deze stijfheid pleegt te veroorzaken, nadat hij de eene grensstreng had verwijderd. In 5 van de 9 zoo uitgevoerde proeven trad de stijfheid aan die zijde, waar de grensstreng was weggenomen, in den achterpoot niet op, of verdween zij na wegname van de grensstreng. In de vier overige gevallen bleek de stijfheid niet den geringsten invloed van het al of niet behouden zijn van de grensstreng te ondervinden, en trad zij beiderzijds even hevig op.

Uit deze gegevens, welke hij in 1913 openbaar maakte [1]), trok DUSSER DE BARENNE twee gevolgtrekkingen. Allereerst, dat de stijfheid optredend na decerebratie niet in een eenvoudige toename van de autonome tonische innervatie kon bestaan. En voorts, dat de efferente zenuwprikkels, welke de genoemde stijfheid doen optreden, niet langs autonome sympathische, maar langs de spinale ventrale wortelvezels verloopen.

---

[1]) Folia Neurobiologica VII, 651. Haarlem 1913.

Deze beide gevolgtrekkingen steunen uitsluitend op de vier gevallen, waarin de stijfheid optrad, niettegenstaande de grensstreng aan ééne zijde was weggenomen. De vraag waaraan toe te schrijven is, dat in 5 van de 9 gevallen de stijfheid aan de zijde met opgeheven sympathische innervatie niet optrad, laat Dusser de Barenne onaangeroerd.

En wat zijn beide gevolgtrekkingen betreft, daarvan is de eerste klaarblijkelijk onaantastbaar. Zijn vier positieve gevallen bewijzen, dat spieren met opgeheven sympathische innervatie toch na decerebratie stijf kunnen worden. Het bewijs, dat deze stijfheid in alle opzichten gelijkwaardig is aan die welke met behouden autonome zenuwverzorging optreedt, is niet geleverd. De tweede gevolgtrekking is ook onaantastbaar juist, voor zoover zij uitspreekt, dat de autonome innervatie geen deel kan gehad hebben aan het tot stand komen der stijfte in de 4 gevallen, waar deze optrad, terwijl de grensstreng was weggenomen. Maar of in normale verhoudingen, bij behouden grensstreng, autonome impulsen al of niet deel nemen aan de decerebratie-stijfte, daarover kan op grond van Dusser de Barenne's proeven niets gezegd worden.

Men zou toch met eenig goed recht kunnen onderstellen, dat de decerebratie-stijfheid in normale verhoudingen, dus bij ongerepte grensstreng, uitdrukking is van een dubbel proces, en wel, dat zij ontstaat door het samengaan van een reeks tetanisch versmolten snelle samentrekkingen, opgewekt door spinale motorische impulsen, met een vermeerderden tonus, onderhouden door sympathische beïnvloeding. Voor de tonusverhooging zou pleiten de door Pekelharing gevonden creatinevorming, terwijl de aanwezigheid der tetanische verkorting waarschijnlijk gemaakt wordt door de discontinue elektrische verschijnselen, welke spieren in onthersseningsstijfte vertoonen (Dusser de Barenne [1]), Buytendijk [2]). Deze mogelijke tweevoudige ontstaanswijze der decerebrate rigidity, door prikkels afvloeiend langs verschillende zenuwwegen, zou kunnen verklaren waarom ontworteling van de buikgrensstreng niet noodzakelijkerwijze het optreden der decerebratie-stijfte behoeft te beletten. Na opheffing van den weg voor de tonische impulsen, kan stijfheid optreden, uitsluitend door de tetanische impulsen, afvloeiend langs de spinale musculomotorische zenuwvezels. Deze vóóronderstelling geeft aanleiding tot een reeks van vraagstellingen:

1. Indien inderdaad de decerebratie-stijfheid bij ongerepte grens-

[1]) Zentralblatt für physiologie **25**, 1911

[2]) Zeitschrift für Biologie **59**, 36, 1912.

streng bestaat uit tetanus plus tonusverhooging, en de stijfte na grensstreng-wegname alleen uit tetanus, dringt zich een vergelijking van het creatine-gehalte van spieren in decerebratie-stijfheid, met en zonder behouden sympathische innervatie, op. Dit onderzoek kan bij gedecerebreerde dieren met éénzijdig verwijderde buikgrensstreng verricht worden.

2. Indien inderdaad de normale decerebratie-stijfte door impulsen ontstaat, welke zoowel langs de thoracaal-autonome (tonische) als langs de spinale (motorische) vezels afvloeien, terwijl de stijfte ook kan optreden, wanneer slechts deze laatste weg bewaard is, dringt zich de vraag op, of de stijfte ook ontstaat, wanneer alleen de autonome weg behouden, de spinale daarentegen onderschept is.

3. Indien inderdaad de normale decerebratie-stijfte zich door verhoogden spiertonus, toegevoegd aan de tetanische verkorting, onderscheidt van de stijfte, optredend bij ontwortelde grensstreng, kan men zich afvragen, of dit verschil der factoren, welke de stijfte onderhouden, niet op eenige wijze tot uiting komt, bijv. in de mate, den duur, het uithoudingsvermogen der stijfte, enz. Aan deze vraag knoopt zich een tweede vast: Is het zuiver „toeval" geweest, dat Dusser de Barenne in 5 van zijn 9 gevallen de stijfte na ontworteling van de grensstreng verdwijnen zag? Waar het optreden der stijfte zelve niettegenstaande de ontworteling, mogelijk is gebleken, rijst de vraag waarom de stijfte dan slechts in zoo weinig (4), en niet in alle gevallen is ontstaan.

Daar het antwoord op deze drie vragen van groot gewicht voor ons inzicht in het geheele tonusvraagstuk kan schijnen, heb ik de onderzoekingen van Dusser de Barenne weer opgevat en de drie hierboven neergeschreven vragen aan proefnemingen getoetst.

Inrichting en uitslag der proeven.

1. Proeven betreffend de vraag, of de ontherseningsstijfte in de achterpoot optredend bij éénzijdig verwijderde buikgrensstreng, in mechanischen zin verschilt van die, welke in den poot aan de zijde der behouden grensstreng verkregen wordt.

Voor de beantwoording dezer vraag heb ik de proeven van Dusser de Barenne op katten herhaald. Alleen in zooverre gewijzigd, dat ik ze altijd in twee tijden verrichtte; en tusschen de voorafgaande verwijdering van de buikstreng eenerzijds en de onthersening gewoonlijk een langen tijd liet verloopen, wisselend tusschen 3 uren en ettelijke weken. De bedoeling hiervan was de decerebratie te verrichten, wanneer de nevengevolgen der grensstreng-wegname (als o.a. ook shock) zoo veel mogelijk verdwenen waren.

De uitslag dezer proeven bevestigde volkomen het door Dusser de Barenne vastgestelde feit, dat de ontherseningsstijfte bij dieren met eenzijdig verwijderde buikstreng in alle vier de pooten kan optreden. Eigenlijk kan ik zelfs zeggen dat de stijfte in mijn proeven *altijd* optrad ook in den achterpoot derzelfde zijde waar de buikgrensstreng was weggenomen. Verschillen in stijfte waren weliswaar soms te bemerken, echter van onbestendigen aard. Soms was in een proef de achterpoot aan de zijde van de behouden grensstreng korten tijd stijver, om een oogenblik later weer minder stijf aan te voelen. Afgezien van het bezwaar dat voor de bepaling der stijfte slechts subjectieve criteriën in aanmerking komen, hangt de stijfte ook der achterpooten van verschillende voorwaarden af. Hieronder noem ik de richting waarin de ontherseningssnêe loopt; de ligging van het lichaam (rugligging, r. zij, l. zij, enz.); de stand van den kop: de beproevende passieve buigbewegingen die men van te voren aan de pooten heeft ondernomen om hun stijfte, de beproevende knijpende aftastingen, welke men van te voren aan de spieren heeft verricht om haar hardheid (spanning) te bepalen.



Fig. 1. (Kat 2) Ontherseningsstijfte nadat de grensstreng in de buikholte sedert 9 dagen aan de rechterzijde was weggenomen.

Van eenig vast verband tusschen de afwezigheid aan éene zijde van de buikgrensstreng en een mindere stijfte in den achterpoot aan dezelfde zijde is mij niets gebleken.

Evenmin is iets stelligs gebleken van een verschil in duur of in

het uithoudingsvermogen der stijfte aan de beide achterpooten. Ik pleegde om dit te onderzoeken de onthersende katten op hun rug in een trog te plaatsen. Zij bleven dan zoo uren lang met stijf omhoog gestoken pooten liggen. (Vergel. fig. 1 (kat 12) en fig. 2 (kat 18)). Eenig verschil in duur der stijfte is nooit gebleken. Ook niet in het uithoudingsvermogen ervan, wanneer in de rugligging gelijke gewichten van 50 en 100 gram aan de voeten der achterpooten gehangen werden. (Men vergel. fig. 3 en 4 (kat 19).



Fig 2. (Kat 18) Ontherseningsstijfte nadat de grensstreng in de buikholte sedert 40 dagen aan de linkerzijde was weggenomen.

Met deze, trouwens nog al primitieve, ten dienste staande middelen, is het dus na de onthersening niet mogelijk eenig verschil aan te toonen tusschen den stijftetoestand der spieren van den achterpoot aan de zijde waar de buikgrensstreng behouden is en waar zij weggenomen is.

Evenmin is het mij mogelijk aan te geven waaraan het te wijten is, dat in zijn proeven Dusser de Barenne de ontherseningsstijfte na ontworteling van de buikgrensstreng zoo vaak verdwijnen zag. Ik kan hier slechts vermelden, dat ik éénmaal (kat 4) de bestaande ontherseningsstijfte, na uitrukking van de buikgrensstreng, uit beide achterpooten verdwijnen zag. Deze uitslag doet slechts de vraag rijzen in hoeverre interoceptieve prikkels eenen invloed (in dit geval



Fig. 3. (Kat 19) Onthерseningsstijfte nadat de grensstreng 3 maanden en 18 dagen van te voren, rechts was weggenomen.

een remmenden: ingewandshoek ?) op de proprioceptieve reflexstijfte na onthersening uitoefent.



Fig. 4. Dezelfde kat als van fig. 3. Er hangt nu een gewicht van 100 G. aan elken achterpoot.

2. Proeven betreffende de vraag, in hoeverre ontherseningsstijfte kan optreden bij behouden sympathische, maar opgeheven motorische innervatie der achterpootspieren.

Het voornemen: alleen de motorische snel alteratieve prikkels van uit het ruggemerg naar de achterpootspieren te onderscheppen: den

voor de tonische impulsen in den zin van DE BOER bestemden weg ongerept te laten, is moeilijk uitvoerbaar.

Met de motorische spinale vezels toch treden uit de ventrale wortels van het ruggemerg tevens de „praeganglionaire" vezels van den sympathicus. Deze mogen dus niet mede doorgesneden worden. Op het eerste gezicht kan deze moeilijkheid onoverkomelijk schijnen. Neemt men echter aan, dat de sympathische tonische innervatie der dwarsgestreepte skeletspieren dezelfde wetmatigheid bezit als die aller andere sympatische innervaties, dan is de oplossing zeer gemakkelijk. Naar LANGLEY ons geleerd heeft, treden namelijk praeganglionaire vezels voor den sympathicus slechts over een bepaald beperkt gebied uit het ruggemerg uit, en wel voornamelijk uit het thoracale gedeelte. Vandaar den naam: „thoracaal autonoom zenuwstelsel", door LANGLEY aan den sympathicus gegeven. Bij de kat is het meest caudale ruggemergssegment, waar nog praeganglionaire thorocaal-autonome vezels uittreden, volgens LANGLEY, afgezien van segmentale verschuivingsvariaties, gemiddeld L IV—V. De achterpootspieren en voornamelijk de strekspieren, waarop het bij de decerebratiestijfheid aankomt, ontvangen haar motorische zenuwvezels hoofdzakelijk uit L IV, V, VI en VII. Doorsnijdt men de ventrale wortels van deze segmenten, dan mag men dus onderstellen, dat men niet alle praeganglionaire sympathische vezels voor de achterpootspieren doorgesneden heeft, de weg der tonische impulsen voor deze spieren uit het ruggemerg over den sympathicus mag dus dan als ten deele of geheel ongerept ondersteld worden.

Nu wil ik hier onmiddellijk aan toevoegen, dat een dergelijke verzorging van de tonusinnervatie der ledemaatspieren a priori hoogst onwaarschijnlijk te noemen is. Onder het weinige dat wij van spiertonus afweten, behoort wel de zekerheid, dat een fijn gegradueerde afpassing ervan bij vele inwerkingtredingen der spieren plaats vindt. Dit maakt het wel zeer onwaarschijnlijk aan te nemen, dat de eerste regeling van den tonus voor bijv. de achterpootspieren vanuit de borstsegmenten van het ruggemerg geschieden zou, en niet van uit de segmenten, waar de motorische kernen dier spieren gelegen zijn en de aanvoerende, den tonus mede onderhoudende en regelende impulsen, met de segmentale dorsale wortels intreden. Op grond van deze overweging zou men er toe neigen te onderstellen, dat de praeganglionaire tonusvezels voor de ledematen overal samen met de „motorische" vezels het ruggemerg verlaten.

Zekerheid bestaat hierover echter nog allerminst, zoodat ik mij gerechtigd oordeelde voorloopig de door LANGLEY vastgestelde gegevens ook van toepassing te achten op de sympathische tonusinner-

vatie. Deze gedachtengang volgend heb ik bij een kat uitsluitend de ventrale wortels van L IV—VII en van S I aan éene zijde doorgesneden en het dier later gedecerebreerd.

De uitslag van deze proef is met enkele woorden te zeggen: na de onthersening trad goede stijfte op in de beide voorpooten en in den achterpoot, welker ventrale wortels ongerept waren. In den achterpoot welker ventrale wortels doorgesneden waren, trad misschien een aanduiding van stijfte in den M. quadriceps op, in de overige spieren geen spoor. De aanduiding van stijfte in den quadriceps kan haar verklaring daarin vinden, dat de ventrale wortel van L III niet was doorgesneden en dus motorische impulsen van uit het ruggemerg deze spier langs de gewone spinale musculo-motorische vezels bereiken konden.

Men zou dus geneigd zijn hieruit te besluiten, dat welk ook het aandeel der ongerepte sympatische innervatie aan het ontstaan der ontherseningsstijfte zijn moge, de stijfte door de sympathische zenuwverzorging alleen niet tot stand kan komen.

Hier rijst dus allereerst de vraag of de ontherseningsstijfte misschien in het geheel niet door tonusvermeerdering ontstaat, wat volgens de chemische gegevens van Pekelharing wel het geval is. En voorts, of misschien de opzet van mijn proef onjuist was, waarbij werd aangenomen dat de praeganglionaire sympatische tonusvezels niet lager dan L. III uittreden. De oplossing van de laatste vraag ligt op ontleedkundig gebied. Over de eerste heb ik getracht eenig inzicht te verkrijgen door de overige hier nog te beschouwen proeven.

3. Proeven. Betreffende de vraag of creatinevermeerdering aantoonbaar is bij ontherseningsstijfte optredend, na wegname van de grensstreng.

Ten slotte heb ik de chemische vraag aan de orde gesteld. Pekelharing heeft het creatine-gehalte vergeleken van spieren van een poot in ontherseningsstijfte, met dat van spieren van den anderen poot waarin de stijfte voorkomen was door doorsnijding der dorsale ruggemergswortels, en vond dan een belangrijk hooger creatinegehalte in de spieren van den poot welke de stijfte vertoond had.

Ik heb nu doen vergelijken het creatine gehalte van spieren van stijve achterpooten waarvan de sympathische innervatie eenzijdig was opgeheven, met dat van dergelijke pooten met ongerepte autonome innervatie.

Hiertoe werden katten met lang van te voren eenzijdig vernielde buikstreng, onthersend. Na enkele uren van stijfte der beide achterpooten, werden blokjes strekspier uitgesneden uit de beide M. quadriceps

femoris en ter controle ook uit de beide M. triceps brachii. Hierin werd het creatine-gehalte als creatinine bepaald en het chemische tonuscriterium van PEKELHARING en het anatomo-experimenteele van BOEKE en DE BOER aan elkander te toetsen. Met dit onderzoek heeft de 1e assistent voor de biochemie van mijn laboratorium, Dr. B. C. P. JANSEN zich willen belasten. De bijzonderheden van zijn onderzoek zal hij zelf afzonderlijk openbaarmaken: de slotsom ervan, welke hij mij welwillend ter beschikking stelt luidt: „Er is na ontherseningsstijfte nooit eenig verschil in creatinegehalte gevonden tusschen de spieren van den achterpoot met behouden en die der poot met opgeheven sympathische innervatie”.

Samenvatting der uitkomsten.

Het is duidelijk dat wij na dezen uitslag weer vast zitten. Wat het voorafgaande onderzoek toch aan feiten geleerd heeft, is het volgende:

1. Na eenzijdige wegname van de buikstreng kan niet alleen ontherseningsstijfte in beide achterpooten optreden, zooals reeds DUSSER DE BARENNE aangetoond had, maar treedt deze regelmatig op wanneer de nevengevolgen (schok) enz. van de uitrukking van de sympatische buikgrensstreng voorbij zijn.

2. De ontherseningsstijfte in de achterpooten optredend aan de zijde waar de sympathische buikgrensstreng uitgerukt is, vertoont geen vaststelbare mechanische verschillen met de stijfte van den poot waar de grensstreng ongerept is, noch wat graad, noch wat duur, noch wat uithoudingsvermogen ervan betreft.

3. Gedurende de ontherseningsstijfte verschilt het creatinegehalte der strekspieren van den achterpoot aan de zijde waar de sympathische buikgrensstreng uitgerukt is, niet van dat van den poot met ongerepte sympathische innervatie.

4. De ontherseningsstijfte van spieren zonder sympatische innervatie, verschilt dus noch in chemische, noch in mechanische kenmerken, van die van spieren met ongerepte sympatische innervatie.

Theoretische beschouwing over de verkregen uitkomsten.

Een theoretische gevolgtrekking uit deze feiten te maken is nu verre van eenvoudig. Men kan de volgende onderstellingen vormen:

a. Het chemische tonuscriterium is onjuist, of liever: de vermeerdering van het creatine gehalte van een spier, welke bijwijlen tonus-vermeerdering vergezellen kan, wordt daar niet door veroorzaakt, is geen zeker criterium ervan. Ontherseningsstijfte zou dan

uitsluitend berusten op tetanische verkorting der spieren (versmelting der enkelvoudige spinale musculomotorische verkortingsimpulsen) en tonusvermeerdering er geen deel aan hebben. Deze onderstelling laat het anatomische tonus-critericum van BOEKE—DE BOER ongerept, maar laat de vraag open, wat de creatinevermeerdering bij ontherseningsstijfte veroorzaakt.

b. Het chemische tonuscriterium is juist, en men mag vermeerdering van het creatine-gehalte in een spier als een uitdrukking van verhoogden tonus opvatten. De ontherseningsstijfte wordt dus in elk geval, ook bij weggenomen sympathicus, voor een deel door vermeerderden tonus veroorzaakt. Deze onderstelling ontkent dus de juistheid van de leer van BOEKE—DE BOER, dat de tonusinnervatie, langs afzonderlijke sympathische baan zou geschieden.

c. Ten slotte kan men de oplossing nog anders zoeken. LANGELAAN [1]) heeft onlangs getracht de opvatting te verdedigen, dat het oude begrip „tonus" eigenlijk twee verschillende eigenschappen van de spier omvat. Hij onderscheidt een „contractielen tonus" en een „plastischen tonus" en neemt aan, dat de eerste rechtstreeks van uit het ruggemerg langs de spinale motorische zenuwvezels onderhouden wordt, de tweede middellijk n.l. over het thoracaal-autonome, sympatische zenuwstelsel, in den zin van BOEKE—DE BOER.

Men zou nu de bij de ontherseningsstijfte opgedane ervaring zóó kunnen duiden, dat deze uitsluitend op tetanisch versmolten enkelvoudige spierschokken plus spinalen contractilen tonus berust, en de plastische sympathische tonus er geen deel aan heeft [2]). Neemt men nu nog aan, dat de creatinevermeerdering uitdrukking is van den „contractielen" en niet van den „plastischen tonus" dan redt deze formuleering schijnbaar zoowel het chemische als het anatomo-experimenteele criterium en past alles netjes in een schema.

Naar aanleiding van deze drie onderstellingen kunnen echter de volgende opmerkingen gemaakt worden.

Gaan wij allereerst na de verschillende tonische uitingen, welke tot heden onderzocht zijn geworden op haar innervatie en scheikundige verschijnselen. DE BOER heeft proefondervindelijk bewezen, dat onder invloed van de sympathische innervatie staan: de, als tonische spierverkorting opgevatte z.g. „neus" van FUNKE; BRONDGEEST's tonus, en de lijkverstijving. Van de tweede veratrinetop kon

---

[1]) BRAIN, **38**, 275. 1915.

[2]) LANGELAAN besluit aan het slot van zijn stuk (l. c.) andersom. Naar mij voorkomt wordt dit veroorzaakt door een niet geheel juiste waardeering der in de literatuur vaststaande feiten. Men vergelijke hiervoor DUSSER DE BARENNE (PFLÜGER Archiv. CLXVI, 145, Bonn, 1916).

hij bewijzen, dat deze van uit het ruggemerg, bij doorsneden rami communicantes kan optreden. Door DUSSER DE BARENNE is hetzelfde aangetoond voor de ontherseningsstijfte en ik kan dit geheel bevestigen. PEKELHARING heeft creatinevermeerdering aangetoond bij den tweeden veratrinetop, bij de contractuur optredend na $CaCl_2$-vergiftiging: bij den door de inwerking van koude optredenden vermeerderden tonus: bij ontherseningsstijfte: bij de willekeurige (tonische ?) stijfte der skeletspieren (stramstaan): bij warmtecontractuur: bij de lijkverstijving. JANSMA [1]) vond verminderd creatine-gehalte in de achterpootspieren na wegname van de sympathische buikstreng bij kikkers.

Wij zien dus, dat twee tonische verschijnselen onder sympathischen invloed staan en tevens tot vermeerderde creatinevorming leiden: BRONDGEEST's tonus en lijkverstijving. Twee andere voeren tot creatine-vermeerdering, doch worden zeker niet langs sympathischen weg geïnnerveerd: de veratrinecontractuur en de ontherseningsstijfte. De overige tonische verschijnselen zijn slechts in één opzicht: of alleen t.o. van de innervatie, of alleen t.o. van het chemisme onderzocht, en gedoogen dus geene vergelijking.

Voor BRONDGEEST's tonus en voor de lijkverstijving kloppen dus de beide tonus-criteriën: het innervatieve en het chemische, op elkander. Hier vindt men dus als uiting van de scheikundige processen welke het tonusverschijnsel onderhouden, vermeerderde creatinevorming, terwijl tevens bewezen is, dat de autonome innervatie op het verschijnsel invloed oefent. Voor de veratrinecontractuur en de ontherseningsstijfte, kloppen de twee criteriën niet, sluiten zij elkander zelfs uit. Hier toch wordt het tonische verschijnsel wèl vergezeld van creatinevorming, maar blijkt het niet onder invloed van den sympathicus te staan.

Hieruit blijkt duidelijk dat wij er niet komen door als tonuscriterium uitsluitend het innervatieve of uitsluitend het chemische te nemen, of liever, als men wil, dat men den tonus niet omschrijven kan, noch alleen door het innervatieve noch alleen door het chemische criterium. Houdt men zich aan het criterium, dat de meeste ongeveer gelijkwaardige verschijnselen omvat en verklaart, dan verdient het creatine-criterium de voorkeur boven het sympathicus-criterium.

Blijft LANGELAAN's denkbeeld, twee soorten tonus naast elkaar aan te nemen. Daar wij twee tonus-criteriën aan elkander wilden toetsen zou men meenen, dat men met de aanname van twee soorten tonus

[1]) Zeitschrift für Biologie **65**, 365. 1914.

altijd uit moest komen. Men behoeft dan slechts aan te nemen, dat een „tonische” uiting van een spier, in bepaalde gevallen uitsluitend van de „plastische” soort is, in andere uitsluitend van de „contractieele”, en soms van beide tegelijk, zijn kan, om schijnbaar alle moeilijkheden op te lossen.

Schijnbaar, want inderdaad, blijven ook dan zoo als uit het voorafgaande blijkt, de tegenstrijdigheden voortbestaan. Gaat men uit van de ontherseningsstijfte en de veratrinecontractuur, welke zeker niet door den sympathicus maar wel door de musculo-motorische vezels geïnnerveerd worden, dan moet men dezen tonus contractieel noemen en vindt dien in beide gevallen vergezeld van creatinever-

	Chemisme, creatine vermeerderd		Innervatie		Tonustype	
	wèl	niet	Sympathisch	Musculo-motorisch	Plastisch	Contractiel
Ontherseningsstijfte ..	+		zeker niet	+	zeker niet	+
Lijkverstijving	+		+		+	
Brondgeest's tonus...	+		+		+	
Stranstaantonus	+		?	+		+
2e veratrinetop	+		zeker niet	+	zeker niet	+
Warmte-CaCl2 contr.	+		niet onderzocht			
Koude-tonus	+					
Neus van Funke	(niet onderzocht)		+		+	

meerdering. De willekeurige stijfte (stramstaan) past in dit kader; zij voert tot creatinevermeerdering; men kan aannemen, dat zij langs de musculomotorische vezels geïnnerveerd wordt (alhoewel men de deelname van het autonome stelsel natuurlijk niet kan uitsluiten) en kan haar dus tot de contractiel-tonische verschijnselen rekenen. Maar „BRONDGEEST's tonus" is zeker voor een deel, zoo niet geheel afhankelijk van de sympathische innervatie. Men zou dezen dus plastischen tonus moeten noemen en verwachten, dat hij niet met creatinevermeerdering gepaard zou gaan. Volgens JANSMA is dit echter wel het geval. Evenmin kloppen de gegevens voor de lijkverstijving.

Ook de schematiseering: contractiele tonus = musculo-motorische innervatie = creatinevermeerdering en: plastische tonus = autonome innervatie = geen creatinevermeerdering, kan men dus niet doorvoeren. Dit blijkt nogmaals duidelijk uit nevenstaand tabelletje, waar ik alle hier besproken feiten in heb ondergebracht. (Zie p. 938.)

Uit dit tabelletje leert men, dat men de woorden plastischen en contractielen tonus kan gebruiken als synoniemen voor autonoom en musculomotorisch geïnnerveerden tonus, maar dat zij de tegenstelling tusschen het chemische en het innervatieve criterium niet opheffen. Wil men een voorloopig alle gegevens verzoenend woordschema maken, dan zou men kunnen zeggen: alle tot heden daarop onderzochte tonische verschijnselen in dwarsgestreepte spieren, voeren tot creatinevermeerdering en berusten dus waarschijnlijk op een allen gemeenschappelijk, gelijksoortig scheikundig grondproces. Dit kan echter in verschillende gevallen langs verschillende zenuwbanen in de spier opgewekt en onderhouden worden: in enkele langs autonome, in andere langs musculo-motorische zenuwvezels.

Scheikunde. — De Heer SCHREINEMAKERS biedt eene mededeeling aan over: „*In-, mono- en divariante evenwichten.*" XIV.

22. *Het optreden van drie indifferente phasen; het evenwicht M is constant singulier.*

In de vorige mededeelingen hebben wij het optreden van twee indifferente phasen behandeld; wij zullen thans in het kort het optreden van drie indifferente phasen beschouwen.

Wij nemen weer de twee reactievergelijkingen:

$$a_1F_1 + \ldots + a_pF_p + a_{p+1}F_{p+1} + \ldots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$\mu_1a_1F_1 + \ldots + \mu_pa_pF_p + \mu_{p+1}a_{p+1}F_{p+1} + \ldots = 0 \quad . \quad (2)$$

61

waarin a_1 en μ_1 positief zijn en tevens:

$$\mu_1 > \ldots > \mu_p > \mu_{p+1} > \mu_{p+2} > \ldots \quad (3)$$

Stelt men:

$$\mu_p = \mu_{p+1} = \mu_{p+2} = \mu$$

dan gaat (2) over in:

$$\mu_1 a_1 F_1 + \ldots + \mu a_p F_p + \mu a_{p+1} F_{p+1} + \mu a_{p+2} F_{p+2} + \ldots = 0 \quad (4)$$

Om de reactie tusschen de phasen van het evenwicht (F_p) te vinden, moet men F_p uit (1) en (4) elimineeren; hierbij verdwijnt echter niet alleen F_p maar ook F_{p+1} en F_{p+2}. Wij krijgen dus niet eene reactie tusschen $n+1$ phasen, maar tusschen de $n-1$ phasen:

$$F_1\, F_2 \ldots F_{p-1}\, F_{p+3} \ldots F_{n+2}.$$

Voor de reactie tusschen de phasen van de evenwichten (F_{p+1}) en (F_{p+2}) vindt men dezelfde betrekking tusschen deze $n-1$ phasen. In elk der andere reactievergelijkingen voor de monovariante evenwichten treden echter $n+1$ phasen op.

De phasen F_p, F_{p+1} en F_{p+2} zijn dus de indifferente phasen; de $n-1$ andere phasen zijn de singuliere.

Wij hebben thans vier singuliere evenwichten nl.:

$$(M) = F_1 + \ldots + F_{p-1} + F_{p+3} + \ldots + F_{n+2}$$
$$(F_p) = (M) + F_{p+1} + F_{p+2}$$
$$(F_{p+1}) = (M) + F_p + F_{p+2}$$

en

$$(F_{p+2}) = (M) + F_p + F_{p+1}.$$

De drie indifferente phasen kunnen in (1) al of niet hetzelfde teeken hebben. (In het eerste geval $+ + +$ of $- - -$, in het tweede geval $+ + -$, $- - +$, $+ - -$, $- + +$, $+ - +$ of $- + -$). Even als in Med. X kan men nu aantoonen: hebben in eene reactievergelijking twee indifferente phasen hetzelfde (of tegengesteld) teeken, dan hebben ze ook in alle andere reactievergelijkingen hetzelfde (of tegengesteld) teeken.

Even als in Med. X kan men aantoonen: hebben de drie indifferente phasen hetzelfde teeken, dan is het singuliere evenwicht M transformabel; hebben ze niet hetzelfde teeken, dan is het evenwicht M niet transformabel.

Op dezelfde wijze als in Med. X volgt nu:

1°. De drie indifferente phasen hebben hetzelfde teeken of met andere woorden het singuliere evenwicht M is transformabel. Kurve (M) is eenzijdig; de vier singuliere kurven vallen samen in dezelfde richting.

2°. De drie indifferente phasen hebben niet hetzelfde teeken of

met andere woorden het singuliere evenwicht M is niet transformabel. Kurve (M) is tweezijdig; van de 3 andere singuliere kurven vallen 2 (nl. zij die hetzelfde teeken hebben) samen met de eene richting der (M)-kurve; de derde valt samen met de andere richting der (M)-kurve.

Met behulp dezer regels kan men weer, even als in Med. X, de hoofdtypen der P,T-diagrammen afleiden; wij laten dit echter aan den lezer over en zullen slechts een enkel voorbeeld nader beschouwen.

Wij nemen een ternair stelsel met de komponenten W (W = water) A en B. In het invariante punt trede het evenwicht

$$A + B + Ys + L_q + G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

op, waarin L_q de vloeistof q (fig 1) en G den damp voorstelt. Bestaat G alleen uit waterdamp, dan kan in het evenwicht (5) ook de reactie $Ys \rightleftarrows G$ optreden. A, B en L_q zijn dan de indifferente, Ys en G de singuliere phasen. Wij hebben dan de singuliere kurven:

$(M) = Ys + G$ [Kurve (M) in fig 3]
$(A) = B + Ys + L + G$ [qb in fig. 1; $qb = (A)$ in fig. 3]
$(B) = A + Ys + L + G$ [qa in fig. 1; $qa = (B)$ in fig. 3]
$(L) = A + B + Ys + G$ [Kurve (L) in fig. 3]

en verder de kurven:

$(Ys) = A + B + L + G$ [qc in fig 1; (I) in fig. 3]
$(G) = A + B + Ys + L$ [Kurve (G) in fig. 3]

Met behulp der voorafgaande beschouwingen kunnen wij het P,T-diagramtype afleiden; wij zullen dit echter eerst op eene andere wijze doen.

Beschouwen wij nl. het geval dat de damp G niet alleen uit water bestaat, maar ook nog een weinig der komponenten A en B bevat. Wij hebben dan het evenwicht:

$$A + B + Ys + L_q + G_{q_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

waarin G_{q_1} den damp q_1 voorstelt (fig. 1). Het punt q_1 ligt in de nabijheid van het punt W. De vijf phasen van evenwicht (6) vormen nu een concentratiediagramtype zooals in fig. 5 (II), het P,T-diagramtype moet dus zijn zooals in fig. 6 (II). [Men bedenke dat de fig. 4 (II) en 6 (II) met elkaar verwisseld moeten worden]. Daar q_1 in fig. 1 in de nabijheid van W ligt, snijdt de lijn qq_1 of WB en AB of WA en BA. Uit fig. 6 (II) blijkt dat de kurven (I), (A) en (B) nu een driekurvigen bundel moeten vormen, zooals in fig. 2. Neemt men aan dat de lijn qq_1 de lijnen WB en AB snijdt, dan moet kurve (B) tusschen de kurven (A) en (I) liggen. Men ziet nu gemakkelijk (o.a. ook nog uit de diagonale volgorde der kurven)

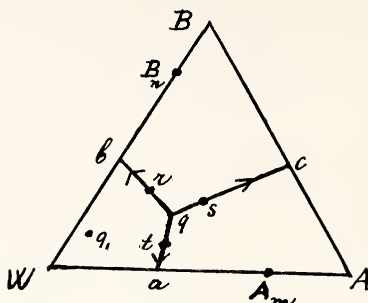


Fig. 1.

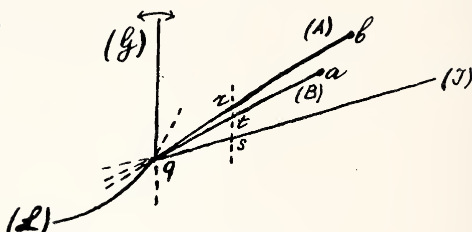


Fig. 2.

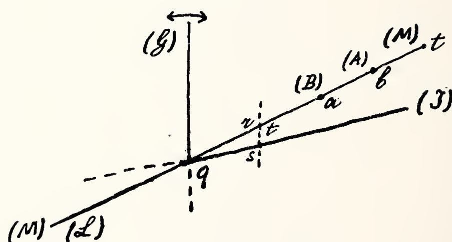


Fig. 3.

dat men een P,T-diagram krijgt, zooals in fig. 2 geteekend. [De punten a en b zijn de eindpunten der kurven (B) en (A) en stemmen met de punten a en b van fig. 1 overeen; het eindpunt c van kurve (I) is in fig. 2 niet geteekend].

Uit fig. 2 blijkt, dat bij dezelfde temperatuur de dampspanning van $(A) = B + Ys + L + G$ grooter is dan die van $(B) = A + Ys$

$+ L + G$ en deze weer grooter dan die van $(Ys) = A + B + L + G$; dit is een gevolg van de aanname dat de lijn qq_1 de lijn WB snijdt. [Dit blijkt ook op de volgende wijze. Wij nemen in fig. 1 de 3 punten r, s en t zoo, dat $T_r = T_s = T_t$ en verder 3 punten r_1, s_1 en t_1 (deze zijn in fig. 3 niet geteekend), die de bij r, s en t behoorende dampen voorstellen. rs is dan de verzadigingskurve onder eigen dampdruk van B, r_1 s_1 is de bijbehoorende dampverzadigingskurve. Uit de drukverandering langs deze kurve volgt $P_r > P_s$. Beschouwt men ook de andere kurven, dan vindt men $P_r > P_t > P_s$].

Gaat men nu over tot het geval dat de damp Gq_1 in (6) alleen waterdamp bevat, dan gaat evenwicht (6) over in (5). In fig. 1 valt q_1 dan met W samen, zoodat het singuliere evenwicht $(M) = IJs + G$ optreedt. Daar A, B en L nu indifferente phasen worden, worden (A), (B) en (L) dus singuliere kurven, die dus moeten samenvallen. Uit fig. 2 blijkt dat dit samenvallen alleen zoo kan gebeuren, dat de stabiele deelen van (A) en (B) samenvallen en dat (L) samenvalt met de meta-stabiele deelen van (A) en (B). Men krijgt dan fig. 3, waarin de (M)-kurve dus tweezijdig is.

De ligging der kurven in fig. 3 is in overeenstemming met de regels, die wij in de algemeene beschouwingen hebben afgeleid. Daar men het singuliere evenwicht $(M) = IJs + G$ niet in het invariante evenwicht (5) kan omzetten, is (M) dus niet transformabel, zoodat (M) tweezijdig moet zijn.

Neemt men eene reactie. waarin de 3 indifferente phasen A, B en L optreden, b.v.

$$L \rightleftarrows A + B + G \quad \text{dus} \quad A + B + G - L = 0$$

dan blijkt dat de 3 indifferente phasen niet hetzelfde teeken hebben. Hieruit volgt ook weer dat kurve (M) tweezijdig moet zijn. Daar A en B hetzelfde teeken hebben, moeten de kurven (A) en (B) in de eene richting en kurve (L) in de andere richting met de (M)-kurve samenvallen. Dit alles is in overeenstemming met fig. 3, die wij omgekeerd ook uit deze gegevens hadden kunnen vinden.

Men kan fig. 3 ook nog op eene andere wijze afleiden, die wij in het kort zullen aangeven. Wij teekenen eerst in een P,T-diagram de kurve $(M) = IJs + G$; deze eindigt in het tripelpunt t (fig. 3) van het zuivere water. De kurven $(A) = B + IJs + L + G = (M) + B + L$ en $(B) = A + IJs + L + G = (M) + A + L$ gaan van q uit naar hoogere T en moeten met de (M)-kurve samenvallen.

Kurve $(L) = A + B + IJs + G = (M) + A + B$ moet eveneens

met de (M)-kurve samenvallen, maar gaat van q uit naar lagere temperaturen.

Kurve $(I) = A + B + L + G$ gaat van q uit eveneens naar hoogere temperaturen maar moet beneden de kurven (A) en (B) liggen. Om dit laatste aan te toonen nemen wij weer de drie punten r, s en t in fig. 1. Daar langs de isothermen rs en ts de dampdruk van s uit toeneemt, moeten de kurven (A) en (B) in fig. 3 dus boven kurve (I) liggen.

Bovenstaande beschouwingen gelden ook als men de komponenten A en B door hunne hydraten A_m en B_n vervangt, mits oplossing q binnen den driehoek $W A_m B_n$ ligt en niet te dicht bij de lijn $A_m B_n$. Is dit wel het geval, dan kan men de richtingen der kurven op dezelfde wijze bepalen als b.v. in mededeeling XIII.

Leiden, *Anorg. Chem. Lab.* (*Wordt vervolgd.*)

Physiologie. — De Heer HAMBURGER biedt, mede namens den Heer R. BRINKMAN, een mededeeling aan, getiteld: „*Experimenteele onderzoekingen over het doorlatingsvermogen der nieren voor glukose*[1]).

I. DE VERHOUDING VAN K EN Ca IN DE DOORSTROOMINGS-VLOEISTOF.

1. *Inleiding.*

Nog steeds is de zoowel voor physiologen als voor klinici belangrijke vraag onopgelost, waarom bij een normaal individu de urine geheel of nagenoeg geheel vrij van suiker is, zoolang het suikergehalte van het bloedvocht een zekere concentratie niet overschrijdt, en waarom eerst dan glukosurie optreedt, wanneer hyperglykaemie aanwezig is.

Twee verklaringen kan men zich denken:

Men kan zich voorstellen, dat het normale glomerulus-epithelium een bloedvocht verdraagt, dat $\pm 0.1\,^0/_0$ glukose bevat, zonder er voor permeabel te worden, doch van een hoogere concentratie niet alle glukose tegenhoudt. Deze voorstelling schijnt niet aanlokkelijk, want is het niet wel wat gedwongen om aan te nemen, dat cellen, die in permanente aanraking verkeeren met een 0.1 procents oplossing van een physiologische niet-elektrolyt als glukose, een verandering zouden ondergaan door een 0.2 procents oplossing[2]).

[1]) Uitvoeriger mededeelingen zullen elders verschijnen.

[2]) Wij gaan hier op de voorstelling van een volmaakte permeabiliteit van het normale glomerulus-epithelium voor glucose met terugresorptie er van door de nierbuisjes niet in, evenmin als op een oxydatie der glucose in de nier.

De tweede verklaring, die veel verdedigers heeft gevonden, neemt aan, dat de bloedsuiker in het serum niet in vrijen toestand aanwezig is, doch in normale omstandigheden geheel wordt vastgehouden in den vorm van een colloidale verbinding (LÉPINE's sucre virtuel), welke de glomerulus-membraan niet kan passeeren. Is het bindmiddel in niet voldoende hoeveelheid in het serum aanwezig, dan blijft een deel der glukose in vrijen toestand circuleeren en wordt door het glomerulus-epithelium doorgelaten, m. a. w. er ontstaat glukosurie. Er zijn reeds verschillende kolloidale glukoseverbindingen aangewezen (jecorine, lecithine-glukose, globuline-glukose).

Tegen dit vasthouden van suiker door een in het serum aanwezige stof zijn echter bezwaren aangevoerd. Men heeft serum tegen glukose-oplossingen laten dialyseeren (ASHER, RONA en MICHAËLIS) en vond, dat ten slotte het procentgehalte der glukose aan beide zijden van de membraan gelijk werd. Van een vasthouden van suiker in colloidalen vorm kon dus geen sprake zijn. Deze uitspraak heeft veel indruk gemaakt en het schijnt, dat men daardoor op een dood punt is gekomen.

Wij hebben ons echter afgevraagd, of het wel geoorloofd is uit laatstbedoelde proeven met perkamentmembranen gevolgtrekkingen te maken voor het glomerulus-epithelium. Immers zou het best mogelijk zijn, dat verbindingen van glukose met een of andere serumstof wel door een perkamentmembraan, doch niet door een membraan van glomerulus-epithelium gaan. Het is toch uit de proeven van BECHHOLD overvloedig gebleken, dat bepaalde colloïde deeltjes door een zekere membraan wel worden doorgelaten, doch door een andere met kleiner poriën-wijdte niet.

Wij experimenteerden daarom met celloïdine membranen van verschillend celloïdine-gehalte en ultrafiltreerden daardoor, bij 4 à 5 atmospheren druk, serum waaraan bekende hoeveelheden glukose waren toegevoegd; doch het reductievermogen der ultrafiltraten gaf geen recht te besluiten dat een colloïdale glukose verbinding door het ultrafilter teruggehouden was.

Onzen gedachtengang vervolgende, achten wij het nu aanbevelenswaardig langs systematischen weg te onderzoeken, of in weerwil van de resultaten der genoemde diffusie- en ultrafiltratieproeven de tweede opvatting toch nog de juiste was.

In de eerste plaats zou dan, wat tot dusverre nog niet was onderzocht, moeten blijken, dat *vrije* glukose door de nier wordt doorgelaten. Om dit na te gaan, zou het bloedvaatstelsel der nier moeten doorstroomd worden met RINGER-vloeistof, waaraan suiker was toegevoegd. Bleek dan, dat de vloeistof, die uit de ureteren

vloeide dezelfde concentratie aan suiker bevatte als de doorstroomingsvloeistof, en zou dan verder blijken, dat een suikerhoudende RINGER-vloeistof, waaraan tevens serum was toegevoegd, een suiker*vrije* kunstmatige urine leverde, dan ware, zoo meenden wij, bewezen, dat in serum een stof voorhanden is, die de suiker bindt in een vorm, welke door het glomerulus-epithelium niet wordt doorgelaten, en dan ware verder opnieuw een onderzoek in te stellen naar den aard dier stof.

Alvorens tot de beschrijving der proeven over te gaan, willen wij een paar opmerkingen maken van technischen aard.

Enkele opmerkingen van technischen aard.

Voor de proeven werden uitsluitend kikvorschen gebruikt en wel groote mannelijke exemplaren van den Rijnvorsch. Het ruggemerg werd door een naald vernield en alle organen, behalve de nieren, testes en blaas ineens verwijderd. Dan werd een fijne injectie-naald in de aorta communis gebracht en in iederen ureter een canule. Het vocht, dat door het bloedvaatstelsel gevoerd wordt, moet rijkelijk voorzien zijn van zuurstof. De drukking bedroeg 60—80 cM. water. Op deze wijze stroomt 200—300 c.c. vloeistof per uur door de nieren. De hoeveelheid vocht, welke in dien tijd uit den ureter vloeit, beloopt 0,5 c.c. of minder. Dit vocht is te beschouwen als een glomerulusprodukt, want laat men bij denzelfden druk vocht door de vena Jacobsonii vloeien, dan wordt geen vocht in de ureteren afgescheiden. Bij hoogeren druk ontstaat wel eenig vocht, doch uiterst langzaam.

Afbinding van de vena Jacobsonii heeft geen invloed op het glukosegehalte der urine. Dit maakt het wel zeer waarschijnlijk, dat bij deze proeven de nierkanaaltjes weinig met de glukosebeweging te doen hebben.

De glukosebepaling van doorstroomingsvloeistof en nierprodukt geschiedde door de keurige mikromethode van I. BANG [1]). Deze veroorlooft in 0.1 c.c. vloeistof het glukosegehalte tot 0.006 % nauwkeurig te bepalen.

2. *Het doorlatingsvermogen van de kikvorschnier voor glukose, welke in* RINGER-*vloeistof is opgelost.*

1e Proevenreeks.

Gelijk boven gezegd, moest in de eerste plaats de fundamenteele vraag worden beantwoord, of bij doorstrooming eener glukose hou-

[1]) I. BANG. Methoden zur Mikrobestimmung einiger Blutbestandteile. Wiesbaden J. F. BERGMANN 1916.

dende RINGER-vloeistof de glukoseconcentratie der urine gelijk zou worden aan die der doorstroomingsvloeistof. Uit herhaalde proeven bleek, dat de glukoseconcentraties in beide vloeistoffen volmaakt dezelfde waren. Wij geven hier enkele van de verkregen cijfers. Iedere proef werd minstens driemaal herhaald, alle gaven dezelfde uitkomsten.

20 tot 26 Januari 1916.

1. Nieren doorstroomd van uit de aorta met RINGER-oplossing, die 0,1 % glucose bevat, onder een druk van ± 50 c.c. Reductie doorstroomingsvloeistof 0,098 %. Reductie (in glukoseconcentratie uitgedrukt) der urine linker nier 0,095 %, rechter nier 0,095 %.

2. Doorstrooming van uit de aorta met RINGER-oplossing, bevattende precies 0,05 % glucose. Druk 60 c c. water. Reductie urine links 0,05 %, rechts 0,045 %.

3. Doorstrooming van uit aorta met zuivere RINGER-oplossing. De urine vertoont geen reductie.

Deze resultaten vormden een naar het scheen betrouwbaren grondslag voor verder onderzoek. Verwacht werd nu, dat bij toevoeging van serum aan de glukosehoudende RINGER-vloeistof de vrije glukose geheel of gedeeltelijk zou vastgelegd worden, m. a. w. dat het reductievermogen van de uretervloeistof geringer zou zijn dan dat van de doorstroomingsvloeistof.

3. *Het doorlatingsvermogen van de nieren voor glukose, wanneer deze in een mengsel van serum en* RINGER-*vloeistof is opgelost.*

2e Proevenreeks.

Voor de hier bedoelde proeven werd paarde- of runderserum verdund met de 2-, 3-, 4- en 5-voudige hoeveelheid RINGER-vloelstof, aan welke mengsels telkens een bekende hoeveelheid glukose werd toegevoegd. De afscheiding van het uretervocht ging uiterst langzaam, doch kon verbeterd worden door toevoeging van ureum.

Wij laten hier eenige van de vele experimenten volgen.

1. Kikkernier doorstroomd met een vloeistof, bestaande uit 50 c.c. paardeserum + 150 c.c. RINGER + glucose + ureum. Reductie van dit mengsel 0,17 %, reductie urine 0,086 %. Er is dus 0,09 % glucose teruggehouden (= de hoeveelheid glucose in normaal paardeserum).

2. Doorstrooming met: 75 c.c. runderserum + 225 c.c. RINGER + glucose + ureum. Reductie er. doorstroomingsvloeistof 0,21 %, reductie der urine rechts 0,12 %, links 0,105 %.

3. Doorstrooming met: 60 c c. paardeserum + 240 c.c. RINGER + glucose + ureum. Reductie doorstroomingsvloeistof 0,14 %. Reductie urine rechts 0,03 %, links 0,028 %.
Bij 5-voudige serumverdunning wordt dus nog 0,11 % glucose tegengehouden

Op dezelfde manier wordt bij een 6-voudige verdunning 0,07 %, bij een 7-vou-

dige 0,06 % glukose tegengehouden, maar bij een 8-voudige verdunning *bijna niets meer.*

Men ziet, dat zoolang de verdunning van het serum niet verder gaat dan tot het 8-voudige, vrij wat suiker wordt teruggehouden (0.17—0.086, 0.21—0.11, 0.21—0.105, 0.14—0.03, 0.14—0.028.)

Bij sterkere verdunning is de suikerretentie geringer, en bij een 8-voudige verdunning is de retentie = 0.

Getracht werd nu de oorzaak van dit vrij scherpe keerpunt op te sporen, doch te midden van dit reeds uitvoerig geworden onderzoek, waarop wij te dezer plaatse niet verder zullen ingaan, was de voorraad der RINGER-vloeistof uitgeput en moest nieuwe vervaardigd worden. Weldra bleek echter, dat het retentievermogen van de nier voor glukose in de serum-RINGER-mengsels thans geheel anders was dan in de talrijke vorige proeven. Men moest denken aan de mogelijkheid, dat de RINGER-vloeistof niet geheel beantwoordde aan de vroeger gebruikte. Was wellicht het Calciumgehalte een ander? Men spreekt dikwijls van een Chloorcalciumoplossing van bepaalde concentratie, zonder er bij te voegen, of deze gemaakt is van watervrij $CaCl_2$ dan wel van $CaCl_2 . 6$ aq. Inderdaad bleek, dat toevoeging van een weinigje $CaCl_2$ aan de nieuwe RINGER-vloeistof een belangrijken invloed had op de glukoseuitscheiding; thans immers was de glukoseconcentratie van het uretervocht gelijk aan die der doorstroomingsvloeistof. Deze waarneming, die door parallelproeven werd bevestigd, was aanleiding om te onderzoeken of bij doorstrooming der nieuwe serumvrije RINGER-oplossing, alle glukose zou doorgelaten worden, zooals dit met de oorspronkelyk gebruikte RINGER-vloeistof het geval was geweest.

Tot onze bevreemding bleek nu, dat bij doorstrooming met de nieuwe RINGER-vloeistof glukose door de nieren werd teruggehouden. *Onder die omstandigheden was het noodig een systematisch onderzoek te verrichten over den invloed, die verandering van de samenstelling der* RINGER-*vloeistof op het doorlatingsvermogen der nier zou uitoefenen.* Tot dit onderzoek bepaalt zich de onderhavige mededeeling. Later zullen wij weder op den invloed van toevoeging van serum terugkomen.

Wijziging in de verhouding van de hoeveelheid K en Ca in de RINGER-*vloeistof.*

3e Proevenreeks.

Gelijk uit de volgende tabel blijkt, werd alleen de hoeveelheid $CaCl_2$ gewijzigd, terwijl de hoeveelheid KCl konstant bleef.

	$^0/_0$ NaCl	$^0/_0$ $NaHCO_3$	$^0/_0$ KCl	$^0/_0$ $CaCl_2$ (zonder kristalwater)	$^0/_0$ Reductie	
					Circul. vl.	Urine
1)	0.7	0.02	0.01	0.005	0.09	0.09
2)	0.7	0.02	0.01	0.0075	0.095	**0.065**
3)	0.7	0.02	0.01	0.010	0.09	0.08
4)	0.7	0.02	0.01	0.015	0.09	0.09

Ieder der 4 proeven is driemaal genomen met precies hetzelfde resultaat.

Men ziet, dat bij het gebruik eener oplossing van $CaCl_2$ van 0,005 $^0/_0$ geen glukose wordt teruggehouden; gebruikt men daarentegen een oplossing van 0,0075 $^0/_0$, dan wordt 0,095—0,065=0,03 $^0/_0$ glukose terugghouden. Stijgt het $CaCl_2$ gehalte tot 0,010 $^0/_0$, dan wordt nog slechts 0,01 $^0/_0$ teruggehouden, daarentegen bij 0,015 $^0/_0$ $CaCl_2$ wederom niets.

De gunstigste verhouding tusschen de concentraties van KCl en $CaCl_2$ bedraagt dus 4 : 3, wat omgerekend op het aantal atomen wordt K : Ca = 2 : 1. Dat het hier gaat om de verhouding van K tot Ca en niet om de absolute hoeveelheid Ca, blijkt uit de volgende tabel. Immers men ziet, dat ook bij een geringe verhooging van het K-percentage de hoeveelheid Ca moet vermeerderd worden.

$^0/_0$ NaCl	$^0/_0$ $NaHCO_3$	$^0/_0$ KCl	$^0/_0$ $CaCl_2$	$^0/_0$ Reductie	
				Circul. vl.	Urine
0.7	0.02	0.01	0.0075	0.095	**0.065**
0.7	0.02	0.015	0.0075	0.08	0.08
0.7	0.02	0.014	0.011	0.10	**0.065**

Het verdient de aandacht, dat ook het bloedsuikergehalte van den winterkikvorsch (deze zijn voor de beschreven proeven gebruikt) 0,03 $^0/_0$ bedraagt. Bij den zomerkikvorsch is de concentratie 0,05 $^0/_0$. *Dienovereenkomstig bleek ook, dat de nieren van zomerkikvorschen bij doorstrooming met glukose houdende* RINGER-*vloeistof* 0,05 $^0/_0$ *glukose tegenhielden,* hetgeen met de temperatuur samenhangt. Wij komen op dien invloed van de temperatuur nog met een enkel woord terug.

5. *De verhouding van Na : K ; Ca.*

4e Proevenreeks.

Ter voorzetting van de proeven moest een nieuw aangekomen zending kikvorschen gebruikt worden. De Ringer-vloeistof, die voor de doorstrooming gebruikt werd, bestond weder uit NaCl 0,7 %, $NaHCO_3$ 0,02 %, KCl 0,01 %, $CaCl_2$ 0,0075 %, glukose 0,09 %. Tot onze verbazing werd thans weinig of in het geheel geen glukose teruggehouden. Toen werd de mogelijkheid overwogen, of wellicht ook de hoeveelheid Na invloed kon uitoefenen. Het antwoord blijkt uit de volgende tabel.

% NaCl	% $NaHCO_3$	% KCl	% $CaCl_2$	% Reductie	
				Circul. vl.	Urine
0.7	0.02	0.01	0.0075	0.09	0.09
0.7	0.02	0.01	0.010	0.102	0.085
0.7	0.02	0.01	0.012	0.105	0.085
0.7	0.02	0.01	0.0075	0.085	0.085
0.6	0.02	0.01	0.0075	0.085	0.060
0.6	0.02	0.01	0.0075	0.010	0.070
0.6	0.02	0.01	0.005	0.09	0.070
0.6	0.02	0.01	0.0025	0.085	0.075
0.6	0.02	0.01	0.010	0.12	0.115

Men ziet o.a., dat in afwijking met het resultaat van de tabel der vorige proevenreeks waarin KCl : $CaCl_2 = 4 : 3$, en waarbij 0.03% glukose werd teruggehonden, dit hier niet het geval is. Wel wordt bij de thans gebruikte kikvorschen iets teruggehouden bij genoemde verhouding, maar geen 0.03%. Er wordt 0.02% ternggehonden, wanneer KCl : $CaCl_2 = 4 : 4$ of $1 : 1$ wordt gebruikt.

Wat was de oorzaak van het verschil in gedrag tusschen de nieuwe bezending kikvorschen en de vroegere? Gedacht werd aan de temperatnur, waarbij de laatste bezending kikvorschen bewaard werden. Deze bedroeg 8° C.; vroeger was de temperatuur hooger geweest. Dat nu inderdaad het waargenomen verschil aan de temperatuur moet toegeschreven worden, blijkt uit het feit, dat men om hetzelfde resultaat te verkrijgen aan de doorstroomingsvloeistof een weinigje

$CaCl_2$ moet toevoegen, wanneer de nier door ijs wordt afgekoeld. Wil men dan echter toch de verhouding KCl : $CaCl_2$ = 4 : 3 konstant laten, dan moet het NaCl van 0.7 op 0.6°/₀ gebracht worden.

Men leert hieruit, dat aan iedere gesteldheid van het glomerulus-epithelium, zal dit in staat zijn om het maximum van glukose terug te houden, een bepaalde verhouding van Na, K en Ca beantwoordt.

Het is niet onwaarschijnlijk, dat ook de anionen bij het evenwicht een rol spelen, doch in ieder geval krijgt men den indruk, dat de verhouding der kationen de leiding heeft.

Door het feit, dat storing in het evenwicht der kationen van grooten invloed is op het doorlatingsvermogen der nier voor suiker, laten zich nog twee belangrijke waarnemingen verklaren, die tot dusverre niet begrepen werden.

In de eerste plaats vonden UNDERHILL en CLOSSEN [1]), dat wanneer men bij een konijn in een oorvena een oplossing van $CaCl_2$ spuit, naast hypoglykaemie glukosurie optreedt. Het ligt thans voor de hand om te denken aan een stoornis in het evenwicht tusschen Na, K en Ca.

In de tweede plaats is eenige jaren bekend, dat ook door uranium glukosurie kan ontstaan [2]). Nu hebben ZWAARDEMAKER en FEENSTRA gevonden [3]), dat in de RINGER-vloeistof, die de kloppingen van het kikvorschhart onderhoudt, het K door het eveneens radioactieve uranium kan worden vervangen. Gelijk uit de hierna volgende mededeeling zal blijken, konden wij constateeren, dat ook in de physiologische doorstroomingsvloeistof van de nier het K door een aequiradioactieve hoeveelheid uraan kan worden vervangen. Het is dus niet gewaagd om de uraanglykosurie te beschouwen als te zijn veroorzaakt door een evenwichtsstoornis, teweeg gebracht door een stoornis in het normale K-gehalte.

Opmerking verdient, dat de door $CaCl_2$- en de door Uraaninspuiting veroorzaakte glycosuriën de beide eenige zijn, van welke met zekerheid kan gezegd worden, dat zij van renalen aard zijn. Zoo zou dan ook bij warmbloedige dieren een evenwichtsstoornis in het relatieve kationengehalte van het doorstroomingsvocht (hier bloedplasma) de oorzaak zijn van een veranderde permeabiliteit van het glomerulus-epithelium voor suiker.

SAMENVATTING.

1. Wanneer men kikvorschnieren bij 7°—10° C. doorstroomt

[1]) UNDERHILL en CLOSSON. Americ. Journal of Physiol. **5**, p. 321, 1916. Gecit. naar BANG. Der Blutzucker 1913 p. 103.

[2]) POLLACK, Arch. für exp. Path. u. Pharmakol. **64** p. 415, 1911. Zie ook: BANG, Der Blutzucker.

[3]) ZWAARDEMAKER en FEENSTRA. Deze Verslagen 1916, 28 April, 27 Mei, 30 September.

met een glukosehoudende RINGER-vloeistof, waarin de K- en Ca-atomen voorkomen in de verhouding van 2 : 1, dan wordt zooals blijkt uit een vergelijking van de glukoseconcentratie van doorstroomingsvloeistof en uretervocht, 0.03 °/₀ glucose door de nieren tegengehouden.

2. Wordt de verhouding K : Ca eenigszins gewijzigd, dan is de glukoseretentie geringer, om bij verdere wijziging tot 0 te dalen, m.a.w. dan bevat de urine een even groote concentratie aan glukose als de doorstroomingsvloeistof.

3. Blijkbaar heeft men hier te doen met veranderlijkheid in de permeabiliteit van het glomerulusepithelium voor glukose, welke permeabiliteit door quantitatieve bepalingen scherp is vast te stellen.

Januari 1917. *Physiologisch Laboratorium te Groningen.*

Physiologie. — De Heer HAMBURGER biedt, mede namens den Heer R. BRINKMAN, een mededeeling aan, getiteld: „*Experimenteele onderzoekingen over het doorlatingsvermogen der nieren voor glukose.*

II. VERVANGING VAN HET IN DE DOORSTROOMINGSVLOEISTOF BENOODIGDE KALIUM DOOR URANIUM EN RADIUM.

Uit onze vorige mededeeling is gebleken, dat wanneer een kikvorschnier doorstroomd werd met een glukosehoudende RINGER-vloeistof, van de samenstelling NaCl 0.7 °/₀, $NaHCO_3$ 0.02 °/₀, KCl 0.01 °/₀, $CaCl_2$ 0.0075 °/₀, 0.03 °/₀ glukose werd teruggehouden. Nu hebben ZWAARDEMAKER en FEENSTRA, gebruik makende van de door N. R. CAMPBELL gedane waarnemingen, dat kalium het eenige in het lichaam voorkomende radioactieve element is, gevonden dat in de RINGER-vloeistof, die de kloppingen van het kikvorschhart onderhoudt, het kalium door uranium, radium en thorium en wel in aequiradioactieve doses kan vervangen worden [1]). Het scheen ons van belang te onderzoeken, of voor de bovengenoemde doorstroomingsvloeistof hetzelfde het geval is ten aanzien van de nier. Zou ook hier uranium en radium in de plaats kunnen treden voor kalium, en zoo ja, in welke verhouding, in moleculaire of in radioactieve?

Zoo werd dan in de RINGER-vloeistof, die gelijk gezegd 100 m.Gr. KCl per L. bevatte, het KCl vervangen door 15 m.Gr. $U(NO_3)_4$ per L.

[1]) F. P. FEENSTRA. Zittingsversl. der Kon. Akad. v. Wetensch. 28 April 1916.
F. P. FEENSTRA. „ „ „ „ „ „ 27 Mei 1916.
H. ZWAARDEMAKER „ „ „ „ „ „ 30 Sept. 1916.
Vergl. ook ZWAARDEMAKER, BENJAMINS en FEENSTRA, ibid. 10 Nov. 1916.

En inderdaad bleek toen ook hier de maximum hoeveelheid glukose te worden teruggehouden. Voegt men echter in plaats van 15 m.Gr. uranium-nitraat 25 m.Gr. toe, dan wordt nog slechts zeer weinig glukose teruggehouden. Brengt men 35 m.Gr. uraniumnitraat in de L. kaliumvrije RINGER-oplossing, dan wordt in het geheel geen glukose meer teruggehouden.

Dezelfde vervangbaarheid konden wij ook voor radiumbromideoplossingen konstateeren.

1 capsule van de Allgem. Radiogen Gesellschaft bevat $\frac{1}{5} \times 10^{-3}$ m.Gr. $RaBr_2$. Deze werd opgelost door verwarming in 100 cc. gedistilleerd water, dat met een weinigje HCl zuur gemaakt was. Nadat deze oplossing met kaliumvrije NaOH-oplossing geneutraliseerd was, werd $2\frac{1}{2}$ cc. van de verkregen vloeistof in 1 L. K-vrije RINGER-oplossing gebracht. Inderdaad was de aldus verkregen, met een weinigje glukose bedeelde, vloeistof in staat 0.03 % glukose terug te houden. De hoeveelheid $RaBr_2$ in deze vloeistof aanwezig, bevatte dus 5×10^{-6} m.Gr. $RaBr_2$ per L., dezelfde hoeveelheid, die door ZWAARDEMAKER en FEENSTRA voor het onderhouden van den hartslag van den kikvorsch is aangegeven.

Gebruikt men in plaats van 5×10^{-6} m.Gr. $RaBr_2$ per L., 7×10^{-6}, dan is de glukoseretentie verminderd; eveneens is dit het geval bij gebruik van $3\frac{1}{2} \times 10^{-6}$.

Het blijkt dus, dat kalium, uranium en radium het retentievermogen van de glomerulusmembraan voor glukose influenceeren in aequiradioactieve doses.

Nadere proeven zullen wel leeren, dat men de grenzen scherper kan vaststellen dan boven is geschied.

Door deze onderzoekingen wordt licht geworpen op de tot dusverre onverklaarde uraanglykosurie. Men heeft hier hoogstwaarschijnlijk te doen met een stoornis in het relatieve gehalte der in het bloedvocht aanwezige metaalatomen, waarvan het kalium door toevoeging van een blijkbaar in zekeren zin verwant metaal (uraan) of radium een vermeerdering heeft ondergaan.

Met deze verklaring voor het ontstaan van glucosurie door inspuiting van een weinig uranium-nitraat is niet in tegenspraak het gunstig therapeutisch effect, dat men bij diabetes heeft waargenomen door toediening van uraan (HUGHES en WEST)[1]); maar dan zou bij die diabetesgevallen het kaliumgehalte van het bloedvocht verminderd moeten geweest zijn. Echter ontbreken ons daaromtrent gegevens.

Groningen, Januari 1917. *Physiologisch Laboratorium.*

---

1) Gecit. uit CAMMIDGE. Glycosuria and allied conditions. London, EDWARD ARNOLD 1913, p. 339.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: „*Twee nulstelsels, die door een net van kubische krommen worden bepaald.*

§ 1. Een net $[c^3]$ van kubische krommen bepaalt op een willekeurige rechte f een involutie I_3^2 van den derden graad en den tweeden rang. Deze bezit drie groepen, waarin de drie punten zijn samengevallen; f is dus stationaire raaklijn voor drie krommen c^3. Voegt men de drie buigpunten als nulpunten F aan f toe, dan ontstaat een nulstelsel $N_{3,3}$. Immers, in den bundel (c^3), die een punt F tot basispunt heeft, komen drie krommen voor, waarop F buigpunt is; elk punt heeft dus drie nulstralen. In dit nulstelsel zullen we de nulstralen door i, hun nulpunten door I aanduiden.

De bovengenoemde I_3^2 heeft verder een neutraal puntenpaar, dus twee punten, die met elk punt van f een groep der I_3^2 vormen. Dit paar wordt natuurlijk gevormd door twee basispunten van een in $[c^3]$ begrepen bundel. Worden deze twee punten als nulpunten B van $f \equiv b$ beschouwd, dan ontstaat een nulstelsel $N_{8,2}$; immers aan elk punt B worden dan toegevoegd de overige acht basispunten B^* van den door B bepaalden bundel (c^3), zoodat B nulpunt is van acht nulstralen [1]).

§ 2. Laat men i om een punt P wentelen, dan beschrijven de drie nulpunten I een kromme $(P)^6$, die driemaal door P gaat. Door P gaan 18 raaklijnen t, die de kromme elders raken. De I_3^2 op t heeft in het raakpunt D tevens een neutraal dubbelpunt; immers het samenvallen van twee drievoudige punten gaat steeds gepaard met het samenvallen der punten van het neutrale paar [2]).

Daar D twee samengevallen basispunten vertegenwoordigt, is er een c^3, die D tot dubbelpunt heeft; de meetkundige plaats der punten D is de kromme van JACOBI van het net, Δ^6.

---

[1]) Heeft $[c^3]$ 7 basispunten, dan wordt dit nulstelsel vervangen door een $N_{1,2}$. Men vergelijke mijn mededeeling „*Vlakke lineaire nulstelsels*" (Verslagen XXI, 1070).

[2]) Wordt de involutie voorgesteld door

$$x_1x_2x_3 + a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + b(x_1 + x_2 + x_3) = 0\,,$$

dan vindt men de drievoudige punten uit

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx = 0,$$

de neutrale punten uit

$$x_1x_2 + a(x_1 + x_2) + b = 0 \quad \text{en} \quad ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) = 0.$$

Deze vallen samen als $b = 0$ is; maar dan zijn tevens in $x = 0$ twee drievoudige punten vereenigd.

De 18 raaklijnen t zijn tevens raaklijnen uit P naar de kromme $(P)^{10}$, die door het nulstelsel $N_{8,2}$ is bepaald en in P een achtvoudig punt bezit.

De krommen $(P)^6$ en Δ^6 hebben buiten de 18 raakpunten der rechten t nog 18 punten D^* gemeen. Blijkbaar is PD^* een der raaklijnen d,d' in D^* aan de c^3, die D^* tot dubbelpunt heeft. De dubbelpuntsraaklijnen der rationale krommen van het net omhullen dus een kromme van de 18de klasse [1]) (kromme van ZEUTHEN).

De paren raaklijnen d,d' bepalen op een rechte l een symmetrische verwantschap [18], die dubbele coïncidenties heeft in de 6 op l gelegen punten D. De overige coïncidenties zijn afkomstig van raaklijnen in keerpunten; het net bezit dus 24 krommen met een keerpunt.

Beschouwen wij nog de verwantschap (36, 18), die door de rechten t en d op l wordt bepaald. Ook hier zijn de 6 op l gelegen punten D dubbele coïncidenties; de overige 42 zijn afkomstig van rechten t, die zich met een der dubbelpuntsraaklijnen d vereenigd hebben. In het overeenkomstig punt $D \equiv B^{(3)}$ hebben de krommen van een bundel (c^3) blijkbaar drie samengevallen punten gemeen.

Het net bevat dus 42 *bundels, waarvan de krommen elkaar osculeeren.*

§ 3. Laat men een punt I de rechte p doorloopen, dan omhullen zijn nulstralen i een kromme $(p)^6$ van de zesde klasse, die p tot drievoudige raaklijn heeft. De overige twee nulpunten van i zullen daarbij een kromme π beschrijven, waarvan we den graad kunnen bepalen door na te gaan hoeveel punten ze met p gemeen heeft. Hiertoe behooren vooreerst de 6 op p gelegen punten D, want op de bij D behoorende basisraaklijn t vertegenwoordigt D twee punten I. Verder heeft π blijkbaar dubbelpunten in elk der drie nulpunten van p; zij is bijgevolg van den 12^{en} graad.

Hieruit volgt, dat de krommen $(p)^6$ en $(q)^6$, die door de rechten p en q zijn aangewezen, 12 raaklijnen i gemeen hebben, waarop telkens een nulpunt op p, een ander nulpunt op q ligt. Ook hebben ze de drie nulstralen van het punt pq als raaklijnen gemeen. De overige 21 gemeenschappelijke raaklijnen kunnen slechts afkomstig zijn van figuren c^3, die uit een kegelsnede c^2 en een rechte s zijn samengesteld. Het aantal dier figuren bedraagt dus 21. De 21 rechten s zijn *singuliere stralen* van $N_{3,3}$; immers elk punt van s is als buigpunt I, dus als nulpunt van s te beschouwen.

[1]) Voegt men aan elk punt D de beide raaklijnen $d\,d'$ toe, dan ontstaat een overeenkomst (1,2) tusschen de punten van Δ^6 en de raaklijnen van $(d)^{18}$. Uit de correspondentieformule van ZEUTHEN vindt men dan dat $(d)^{18}$ van het geslacht 31 is.

De kromme $(p)^6$ is van den graad 24, wordt dus door haar drievoudige raaklijn in 18 punten gesneden. Voor elk dier punten vallen twee nulstralen i samen; de punten, welke deze eigenschap hebben, vormen dus een kromme γ^{18}. Op deze kromme liggen natuurlijk de 24 keerpunten en de 42 drievoudige basispunten $B^{(3)}$ (§ 2).

§ 4. De rechten s zijn tevens singuliere nulstralen voor het nulstelsel $N_{8,2}$. Immers op s bepalen de netkrommen een kubische involutie, waarvan elke groep drie tot eenzelfden bundel behoorende basispunten bevat. Voor elke der vier coïncidenties D dezer I_3 is s een basisraaklijn t; deze punten liggen dus op Δ^6. De overige snijpunten van s en Δ^6 vindt men in de dubbelpunten der figuur (c^2,s).

Als het basispunt B de rechte p doorloopt, omhullen zijn acht nulstralen b een kromme $(p)^{10}$, van de 10^e klasse, met dubbelraaklijn p. Tevens beschrijven de aan B toegevoegde basispunten B^* een kromme van den 8^{en} graad, π^8, die met p de beide nulpunten van p en 6 punten D gemeen heeft. Hieruit volgt, dat de krommen $(p)^{10}$ en $(q)^{10}$ acht raaklijnen gemeen hebben, die ieder een nulpunt op p en het tweede nulpunt op q bezitten. Ook hebben die krommen de acht nulstralen van het punt pq gemeen. De overige gemeenschappelijke raaklijnen worden geleverd door de 21 *singuliere nulstralen* s; deze zijn derhalve *dubbelraaklijnen* der kromme $(p)^{10}$.

Hieruit volgt, dat $(p)^{10}$ van den graad $90-22 \times 2$ of 46 is, zoodat p 42 punten B bevat, waarvoor twee der toegevoegde basispunten B^* in een punt D zijn samengevallen. De zeventallen van basispunten, die aan de dubbele basispunten D zijn toegevoegd, liggen dus op een kromme van den graad 42; zij is de *vertakkingskromme* β^{42} der involutie, waarvan de groepen uit 9 basispunten van een bundel (c^3) bestaan. Deze uitkomst kan ook door de volgende overweging worden verkregen. De kromme π^8 heeft met Δ^6 zes op p gelegen punten gemeen; de overige 42 snijpunten dier krommen zijn dubbele basispunten D, waarvoor een der toegevoegde basispunten op p ligt.

De kromme β^{42} raakt Δ^6 in elk der 42 drievoudige basispunten $B^{(3)}$; immers zulk een punt kan op twee wijzen worden beschouwd als samenvalling van een dubbel basispunt $B^{(2)}$ met een der daaraan toegevoegde basispunten B^*. De overige snijpunten van β^{42} en Δ^6 vormen 84 paren van dubbele basispunten. Het net bevat dus 84 *bundels, die ieder twee basisraaklijnen* t bezitten, waarvan dus de krommen c^3 elkaar in twee basispunten aanraken.

§ 5. De kromme $(t)^{18}$, die omhuld wordt door de basisraaklijnen

t, is, evenals Δ^6, van het geslacht 10; haar singuliere raaklijnen moeten dus gelijkwaardig zijn met 126 dubbelraaklijnen. Zij worden blijkbaar vertegenwoordigd door de 21 singuliere stralen s, die immers viervoudige raaklijnen van $(t)^{18}$ zijn. De *graad* van $(t)^{18}$ is dus 54.

Laat men een punt I de singuliere rechte s doorloopen, dan omhullen zijn nulstralen i een kromme $(s)^6$; want de snijpunten van s met een kromme $(P)^6$ zenden ieder een nulstraal door P. Maar door elk punt van s gaan nog slechts twee nulstralen, omdat s nulstraal is voor elk van haar punten. Dus is s viervoudige raaklijn van $(s)^6$, en s bevat vier punten S, waarvoor twee nulstralen met s samenvallen.

Analoog is s viervoudige raaklijn van de kromme $(s)^{10}$, die omhuld wordt door de zestallen van nulstralen b, behoorende bij de punten B van s (twee vallen steeds met s samen). De vier raakpunten van s zijn gemakkelijk aan te wijzen: zij vormen de twee paren van basispunten, die in de I_8 zijn toegevoegd aan de dubbelpunten der figuur (c^2, s). Immers door elk dier dubbelpunten D gaat een basisraaklijn t; voor ieder der bij D behoorende, op s gelegen, basispunten zijn dus *drie* nulstralen b met s vereenigd.

De beide zooeven bedoelde basisraaklijnen t zijn tevens gemeenschappelijke raaklijnen van $(s)^6$ en $(s)^{10}$; de overige worden vertegenwoordigd door s (die er 16 vervangt) en door de overige 20 singuliere nulstralen, die dubbelraaklijnen van $(s)^{10}$ zijn.

§ 6. Wij zullen thans onderstellen, dat alle krommen van $[c^3]$ door een punt S gaan. Het net bevat dan een kromme d^3, welke in S een dubbelpunt heeft, en met elke andere c^3 van het net een bundel bepaalt, waarvan de krommen elkaar in S aanraken. Elke rechte door S is dus basisraaklijn van een bundel, en d^3 is de meetkundige plaats van de zeventallen der bij S behoorende basispunten. In S heeft ook Δ^6 een dubbelpunt.

De veranderlijke basispunten B vormen nu een nulstelsel $N_{7,2}$, dat in S een *singulier punt* heeft. Immers elke rechte b door S bevat twee nulpunten: het punt S en het derde snijpunt van b met d^3.

Tevens is S *singulier punt* voor het nulstelsel $N_{3,3}$, want elke rechte door S is stationaire raaklijn voor een c^3, die S tot buigpunt heeft.

Laat men een rechte b om P wentelen, dan beschrijven haar nulpunten B thans een kromme $(P)^9$, met zevenvoudig punt P, die blijkbaar door S gaat. Door P gaan nu slechts 16 basisraaklijnen t; deze zijn ook raaklijnen aan de kromme $(P)^6$, die door $N_{3,3}$ is be-

paald. Maar P moet op 18 raaklijnen van $(P)^6$ liggen (§ 2); hieruit volgt, dat PS twee dier raaklijnen vervangt, dus *stationaire raaklijn* is, met S als buigpunt van $(P)^6$. Dit wordt bevestigd door de opmerking, dat $(P)^6$ en $(P)^9$ in P 21, in de raakpunten der 16 rechten t 32 punten gemeen hebben, zoodat ze elkaar in S moeten snijden. Hierdoor is de mogelijkheid uitgesloten, dat $(P)^6$ in S een dubbelpunt zou hebben.

De nulstralen b der punten van een rechte p omhullen thans een kromme van de 9e klasse, welke p tot dubbelraaklijn heeft. Beschouwen wij de raaklijnen, welke ze door S zendt. Daarvan worden drie aangewezen door de punten, welke p met δ^3 gemeen heeft. De overige zes moeten bestanddeelen s^* van samengestelde figuren c^3 zijn. Van de 21 rechten s gaan dus *zes* door S. Op elke dier zes rechten bepaalt het net een involutie I_2 van toegevoegde basispunten B, B^*; zulk een singuliere rechte is dus *enkelvoudige raaklijn* van $(p)^9$, terwijl de overige singuliere rechten ook nu *dubbelraaklijnen* zijn.

De krommen $(p)^9$ en $(q)^9$ hebben dus gemeen de 7 nulstralen van het punt pq, de 8 nulstralen, die ieder een nulpunt op p, het andere op q hebben, de 6 singuliere nulstralen s^* en de 15 singuliere nulstralen s, die voor de beide krommen dubbelraaklijnen zijn ($7 + 8 + 6 + 15 \times 4 = 81$).

§ 7. Heeft het net twee basispunten S_1 en S_2, dan is hun verbindingslijn wel bestanddeel van een figuur (c^2, s) dus singulier voor $N_{3,3}$, maar *geen* singuliere nulstraal van $N_{6,2}$. Elke der beide *singuliere nulpunten* S_1, S_2 draagt thans 5 singuliere nulstralen s^* en de nulstelsels $N_{6,2}$ en $N_{3,3}$ hebben buitendien nog 10 singuliere nulstralen s.

Onderstellen we nu, dat het net k basispunten S heeft. De veranderlijke basispunten B der bundels (c^3) bepalen dan een nulstelsel $N_{8-k,2}$. Elk singulier punt S draagt $(7-k)$ singuliere nulstralen s^*; immers van de $(10-k)$ raaklijnen, welke de kromme $(p)^{10-k}$ door S zendt, worden er weer drie aangewezen door de snijpunten van p met de kromme c^3, die in S een dubbelpunt heeft. De rechten, welke de punten twee aan twee verbinden, zijn *niet* singulier voor $N_{8-k,2}$ (wél voor $N_{3,3}$). Het aantal singuliere nulstralen s bedraagt dus $21 - k(7-k) - \frac{1}{2}k(k-1)$ of $\frac{1}{2}(7-k)(6-k)$. Deze rechten zijn dubbelraaklijnen van de kromme $(p)^{10-k}$.

De volgende tabel bevat voor het nulstelsel $N_{8-k,2}$ het aantal *singuliere nulpunten*, het aantal *singuliere nulstralen* s (die een I_3 van nulpunten dragen) en het aantal *singuliere nulstralen* s^* (die een I_2 van nulpunten bevatten).

k	s	s^*
0	21	0
1	15	6
2	10	10
3	6	12
4	3	12
5	1	10
6	0	6
7	0	0

De kromme $(P)^{10-k}$ heeft in P een $(8-k)$-voudig punt, ligt dus op $2(9-k)$ van haar raaklijnen t. De *basisraaklijnen* omhullen dus een kromme van de klasse $2(9-k)$.

De kromme $(P)^6$, die bij $N_{3,3}$ behoort, heeft in elk der k singuliere punten S een buigpunt, met *stationaire raaklijn* PS (§ 6).

§ 8. Het net $[c^3]$ onderscheidt zich van een algemeen net $[c^n]$ daarin, dat in het laatste geen figuren voorkomen samengesteld uit een rechte en een c^{n-1}. In verband hiermee heeft het nulstelsel $N_{3,3(n-2)}$, dat door de buigpunten wordt bepaald, in het algemeen *geen singuliere stralen*.

Laat men I de rechte p doorloopen, dan omhullen zijn nulstralen i een kromme van de klasse $3(n-1)$. De bij p en q behoorende krommen hebben buiten de drie nulstralen van het punt pq nog $(9n^2-18n+6)$ raaklijnen gemeen; deze zijn hier de nulstralen i, die een nulpunt op p en een ander op q hebben. Hun aantal is dus tevens de graad der kromme π beschreven door de nulpunten der rechten i, waarvan een nulpunt op p ligt.

De snijpunten van π met p vormen drie groepen. Vooreerst is elk der $3(n-2)$ nulpunten van p een $(3n-7)$-voudig punt van π. Een tweede groep bestaat uit de snijpunten van p met de kromme Δ van Jacobi, die van den graad $3(n-1)$ is. De derde groep bestaat uit $(18n-33)$ punten, waar een c^n *vier* op elkaar volgende punten met haar raaklijn gemeen heeft. Hieruit volgt, dat de *undulatiepunten* van een net een kromme van den graad $(18n-33)$ vormen. [1])

De kromme (P) is van den graad $3(n-1)$ en heeft in P een drie-

[1]) Een andere afleiding van dit getal vindt men in mijn mededeeling: „*Kenmerkende getallen voor netten van algebraïsche krommen*" (Verslagen XXIII, 864).

voudig punt; door P gaan dus $(9n^2—21n)$ van haar raaklijnen. Deze vormen thans twee groepen: de eerste bestaat uit basisraaklijnen t, de tweede uit raaklijnen u in undulatiepunten.

Nu snijdt (P) de kromme Δ in $3(n—1)(2n—3)$ punten D, waarvan een der beide raaklijnen door P gaat (klasse der kromme van ZEUTHEN) [1]), dus in $9(n—1)^2—3(n—1)(2n—3)$ of $3n(n—1)$ punten D, waarvoor de basisraaklijn t door P gaat.

Hieruit volgt dan, dat P gelegen is op $(9n^2—21n)—(3n^2—3n)$, dus op $(6n^2—18n)$ raaklijnen u. De *vierpuntige raaklijnen* omhullen derhalve een kromme van de klasse $6n(n—3)$ [2]).

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling van Dr. K. W. WALSTRA aan: „*Over een afbeelding van het cirkelveld op de ruimte*".

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

§ 1. De cirkels in het vlak XOY worden voorgesteld door

$$C \equiv X^2 + Y^2 - 2aX - 2bY + c = 0.$$

Beschouwen wij a, b en c als de coördinaten x, y, z van een punt, dan wordt een overeenkomst één aan één verkregen tusschen de cirkels van een vlak en de punten der ruimte. Het beeldpunt van een cirkel verkrijgt men door in het centrum een loodlijn op het vlak te plaatsen en daarop als coördinaat uit te zetten de *macht* van het punt O t. o. v. den cirkel.

Voor den straal heeft men $r^2 = a^2 + b^2 - c$.

Cirkels met gelijken straal worden dus afgebeeld door de punten van een omwentelingsparaboloïde, met vergelijking $x^2 + y^2 - z = r^2$.

De beelden der puntcirkels liggen op het *grensoppervlak* G,

$$x^2 + y^2 = z,$$

een *omwentelingsparaboloïde*, die het vlak XOY in O aanraakt.

§ 2. Een cirkelbundel wordt aangewezen door $C_1 + \lambda C_2 = 0$. Voor het exemplaar λ heeft men

$$(1 + \lambda)a = a_1 + \lambda a_2,\ (1 + \lambda)b = b_1 + \lambda b_2,\ (1 + \lambda)c = c_1 + \lambda b_2.$$

Hieruit volgt voor de beeldpunten

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}.$$

[1]) Zie mijn mededeeling „*Over netten van algebraische vlakke krommen*" (Verslagen XIII, 710.)

[2]) Verslagen XXIII, 863.

Een cirkelbundel wordt dus afgebeeld door een rechte.

Haar snijpunten met G zijn de beelden der puntcirkels van den bundel. Het oneindig verre punt der beeldrechte vertegenwoordigt de *machtlijn* van den bundel.

Een raaklijn aan G is het beeld van een cirkelbundel, waarvan de grenspunten zijn samengevallen; *elke twee punten van een raaklijn zijn dus de beelden van twee elkaar rakende cirkels.*

Dit kan aldus worden bevestigd. Is d de afstand der middelpunten van *twee cirkels* met stralen r en r', dan is $d = r \pm r'$ of

$\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \pm \sqrt{a'^2 - b'^2 - c'}$.

Na eenige herleiding volgt hieruit voor de beeldpunten

$$\left(xx' + yy' - \frac{z + z'}{2}\right)^2 = (x'^2 + y'^2 - z')(x^2 + y^2 - z),$$

welke betrekking uitdrukt, dat de beeldpunten op een raaklijn van G liggen.

§ 3. Een *cirkelnet* wordt voorgesteld door $C_1 + \lambda C_2 + \mu C_3 = 0$. Voor de beeldpunten volgt hieruit

$(1 + \lambda + \mu)\, x = x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3$ enz. dus

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Een cirkelnet wordt dus door een vlak afgebeeld.

Vlakke doorsneden van G hebben cirkels tot horizontale projecties. Immers de doorsnede van $x^2 + y^2 = z$ met $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ heeft tot projectie de figuur voorgesteld door $x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y - \gamma = 0$.

De puntcirkels van een cirkelnet liggen dus op een cirkel; deze eigenschap is omkeerbaar.

Het net, dat met $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ overeenkomt, heeft tot vergelijking

$$X^2 + Y^2 - 2aX - 2bY + (\alpha a + \beta b + \gamma) = 0,$$

waar a en b veranderlijke parameters zijn. Schrijven we hiervoor

$$X^2 + Y^2 + a(\alpha - 2X) + b(\beta - 2Y) + \gamma = 0,$$

dan blijkt, dat alle cirkels gelijke macht n.l. $\frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma$ hebben in het punt $(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta)$, dus in het middelpunt van den cirkel, die de puntcirkels van het net bevat.

Met een raakvlak van G komt overeen een net van cirkels, die door een vast punt gaan. Immers, met $2x_1x + 2y_1y = z + z_1$ komt overeen een net, waarvan alle cirkels in het punt (x_1, y_1) de macht $x_1^2 + y_1^2 - z_1$, d. i. *nul*, hebben.

Twee cirkelbundels worden, in het algemeen, door twee elkaar kruisende rechten afgebeeld. Hebben ze evenwel een cirkel gemeen, dan liggen hun beelden in een vlak, dus hun vier puntcirkels op een cirkel; de bundels behooren dan tot een net.

§ 4. Voor twee orthogonale cirkels is $d^2 = r_1^2 + r_2^2$ dus

$$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = (a_1^2 + b_1^2 - c_1) + (a_2^2 + b_2^2 - c_2)$$

of

$$2a_1a_2 + 2b_1b_2 = c_1 + c_2.$$

Voor de beeldpunten is dus $2x_1x_2 + 2y_1y_2 = z_1 + z_2$, d. w. z. *de beelden van twee orthogonale cirkels worden door het grensoppervlak harmonisch gescheiden.*

Met het verband tusschen pool en poolvlak komt dus overeen, dat alle cirkels, die een gegeven cirkel loodrecht snijden, een net vormen.

Met de betrekking tusschen twee toegevoegde poollijnen komt overeen, dat de cirkelbundels kunnen worden gerangschikt in paren zoo dat elke cirkel van een bundel door elken cirkel van den anderen loodrecht wordt gesneden.

Met een poolviervlak komt overeen een viertal cirkels, die paarsgewijs orthogonaal zijn. (Hiervan zijn slechts drie reëel).

§ 5. Wanneer de cirkel C den cirkel C_1 diametraal snijdt, heeft men $d^2 = r^2 - r_1^2$ of

$$(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 = (a^2 + b^2 - c) - (a_1^2 + b_1^2 - c_1).$$

Voor de beeldpunten is dus

$$2x_1x + 2y_1y - z = 2x_1^2 + 2y_1^2 - z_1.$$

De cirkels, die een gegeven cirkel diametraal snijden, vormen dus een net.

Volgens § 3 heeft dit net tot machtpunt $\frac{1}{2}\alpha = x_1$, $\frac{1}{2}\beta = y_1$, d. i. het centrum van C_1 (wat te verwachten was), en in dat punt de macht $z_1 - x_1^2 - y_1^2 = - r_1^2$.

§ 6. De cirkels, die een gegeven cirkel C_1 raken, hebben hun beelden op den omhullingskegel van G, die het beeld van C_1 tot top heeft (§ 2). Drie omhullingskegels hebben acht punten gemeen; deze zijn de beelden van acht cirkels, die drie gegeven cirkels aanraken.

De cirkels, welke aan twee cirkels C_1 en C_2 raken, worden afgebeeld door een kromme ϱ^4 van den vierden graad; een cirkelnet bevat dus vier exemplaren, die C_1 en C_2 aanraken. De omhullingskegels, welke de beeldpunten van C_1 en C_2 tot toppen hebben, raken G langs kegelsneden, die twee punten gemeen hebben, n.l. de beelden van de snijpunten van C_1 en C_2.

De snijpunten van ϱ^4 met een raakvlak van G zijn de beelden van vier cirkels, die door een gegeven punt gaan en C_1, C_2 aanraken (§ 3).

De cirkels, die een gegeven rechte aanraken, worden afgebeeld door een cylindervlak, dat G omhult en waarvan de rechten loodrecht zijn op de gegeven rechte, dus evenwijdig aan het vlak XOY.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan van Dr. CHS. H. VAN OS, over: *„Een viervoudig oneindig stelsel van puntengroepen in de ruimte"*.

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

Zij gegeven een bundel (a^3), bestaande uit kubische oppervlakken a^3. Een willekeurige rechte l wordt door vier oppervlakken a^3 van den bundel aangeraakt. Daar de ruimte ∞^4 rechten l bevat, zijn er ∞^4 viertallen raakpunten. Wij zullen dit stelsel van viertallen aanduiden door S^4.

§ 1. Nemen wij voor de rechte l een rechte g, die op één der oppervlakken a^3 gelegen is, dan vallen de vier genoemde oppervlakken met dit oppervlak a^3 samen, terwijl de raakpunten onbepaald worden. Deze rechten g zijn dus *singuliere rechten* van S^4. Zij vormen een regeloppervlak R, waarvan wij den graad zullen bepalen.

Een rechte g snijdt een tweede oppervlak a^3 in drie punten, die op de basiskromme ϱ^9 van den bundel (a^3) liggen; de rechten g zijn dus *trisecanten* der kromme ϱ^9. Beschouwen wij omgekeerd een trisecante van ϱ^9, dan zal het oppervlak a^3, dat door een willekeurig punt dezer trisecante gaat, er vier, dus oneindig veel punten mee gemeen hebben, zoodat de trisecante een rechte g is.

Door een willekeurig punt gaan 18 bisecanten van ϱ^9 [1]), het geslacht van ϱ^9 bedraagt dus $\frac{1}{2} \times 8 \times 7 - 18 = 10$. Projecteeren wij dus de kromme ϱ^9 uit een harer punten, dan krijgen wij als projectie een kromme van den achtsten graad, met $\frac{1}{2} \times 7 \times 6 - 10 = 11$ dubbelpunten. Door het genoemde punt gaan dus 11 trisecanten van ϱ^9, zoodat het oppervlak R de kromme ϱ^9 tot 11-voudige kromme heeft.

Een oppervlak a^3 snijdt het oppervlak R nu volgens de kromme ϱ^9 en volgens de 27 op a^3 gelegen rechten g; de *graad* van R bedraagt dus 42.

---

1) Zie b.v. ZEUTHEN, *Lehrbuch der abzählenden Geometrie*, blz. 46.

§ 2. Elke rechte l door een gegeven punt P bevat één groep van S^4; deze viertallen punten vormen een oppervlak Π. Nemen wij voor de rechte l een rechte, die het door P gaande oppervlak a^3 in P aanraakt, dan zal één der punten van de bijbehoorende groep in P vallen. Het oppervlak Π gaat dus door P en raakt daar het door P gaande oppervlak a^3 aan, omdat de raaklijnen van Π in P ook de raaklijnen van a^3 in P zijn. Het oppervlak Π heeft dus in P een enkelvoudig punt. Elke door P gaande rechte l heeft dus met Π tezamen vijf punten gemeen. Dit oppervlak is dus van den vijfden graad. Gemakkelijk ziet men, dat het niets anders is dan het *poolopperolak* van P ten opzichte van den bundel (a^3).

Gaat de rechte l door een punt Q van ϱ^9, dan zullen twee der oppervlakken a^3, die l aanraken, samenvallen tot het oppervlak, dat l aanraakt in het punt Q; de bijbehoorende snijpunten van l en Π vallen dus ook samen. Het oppervlak Π gaat dus door ϱ^9 en raakt langs deze kromme den kegel aan, die ϱ^9 uit P projecteert.

De rechten l, waarbij een der punten van het daarop gelegen viertal in P valt, zijn de raaklijnen in P van het door P gaande oppervlak a^3. De meetkundige plaats van de overige punten dezer groepen is blijkbaar de doorsnede van het oppervlak Π met het raakvlak in P, dus een *kromme van den vijfden graad*, die in P een *dubbelpunt* heeft.

§ 3. Beschouwen wij een rechte l, die de kromme ϱ^9 in een punt P snijdt, dan zullen twee der oppervlakken a^3, die l aanraken, samenvallen tot het oppervlak, dat l in P aanraakt. Laten wij dus de rechte l om P draaien, dan zullen steeds 2 punten der op l gelegen groep in P vallen, zoodat de rechte l het bij P behoorende oppervlak Π^5 buiten P nog slechts in twee punten snijdt. Dit oppervlak Π^5 heeft dus thans in P een *drievoudig punt.*

De punten van ϱ^9 zijn dus *singuliere punten* van S^4; immers zij behooren elk tot ∞^2 groepen, terwijl een willekeurig punt tot ∞^1 groepen behoort.

Nemen wij thans voor het punt P het conische punt van een der 32 nodale oppervlakken a^3. Voor elk der rechten l door P behoort dit oppervlak dan tot de oppervlakken a^3, die l aanraken, zoodat een der punten van de op l gelegen groep in P valt. Dit punt P is dus eveneens een singulier punt van S^4. Elke rechte door P snijdt het bij P behoorende oppervlak Π^5 in drie buiten P gelegen punten; dit oppervlak heeft dus in P een *conisch punt.*

§ 4. Wij zullen thans de *coïncidenties* van S^4 beschouwen. Indien

twee der oppervlakken a^3 samenvallen, die een rechte l aanraken, zullen twee van de coïncidenties samenvallen van de involutie, die door den bundel (a^3) op de rechte l wordt uitgesneden. Dit kan 1e hierdoor gebeuren, dat in een der coïncidenties dezer involutie drie toegevoegde punten samenvallen. De rechte l is dan *hoofdraaklijn* van een der oppervlakken a^3.

De dragers der op deze wijze gevormde coïncidenties, dus de hoofdraaklijnen der oppervlakken a^3, vormen een stralencomplex van den 9den *graad*; immers de stralen van dezen complex, die in een plat vlak gelegen zijn, zijn buigraaklijnen van een bundel van kubische krommen, volgens welke dit vlak den bundel (a^3) snijdt; en deze buigraaklijnen omhullen een kromme van de 9e klasse.

In § 2 is gebleken, dat een willekeurig punt P tot ∞^1 groepen van S^4 behoort. De overige punten dezer groepen liggen op een vlakke kromme van den vijfden graad, die in P een dubbelpunt heeft. Deze groepen worden gevormd door de snijpunten der c^5 met de door P gaande rechten. Beschouwt men nu de beide raaklijnen aan de door P gaande takken van c^5, dan heeft elk dezer raaklijnen in P drie samenvallende punten met c^5 gemeen. P is dus een coïncidentie van de beide op deze rechten gelegen groepen van S^4. Een willekeurig punt P behoort dus tot 2 coïncidenties van S^4.

Aan de genoemde c^5 kan men uit P nog $5 \times 4 - 2 - 4 = 14$ raaklijnen trekken. Hiertoe behooren de verbindingslijnen van P met de 9 snijpunten van het vlak van c^5 met de basiskromme ϱ^9 [1]). Is Q het raakpunt van een der overige 5 raaklijnen, dan ziet men gemakkelijk, dat in Q twee der snijpunten samenvallen van de rechte PQ met de kromme c^5, zoodat Q een coïncidentie is. Een willekeurig punt P behoort dus tot *vijf* groepen, die een buiten P gelegen coïncidentie Q hebben.

Tusschen deze punten P en Q bestaat blijkbaar een verwantschap (5, 4); want bij elke coïncidentie Q behooren twee punten P, en elk punt Q behoort tot 2 coïncidenties.

§ 5. Beschrijft het punt P een plat vlak V, dan zullen de punten Q een oppervlak φ beschrijven; doorloopt het punt Q een plat vlak V, dan doorloopt P een oppervlak Φ.

Om de graden dezer oppervlakken te vinden, onderzoeken wij hun doorsneden met het vlak V. Doorloopt het punt P het vlak V en ligt Q er eveneens in, dan ligt de rechte PQ in dit vlak. Daar deze rechte de drager is van de in Q gelegen coïncidentie, is zij een

[1]) Zooals later zal blijken, zijn deze rechten eveneens dragers van coïncidenties, welke echter op andere wijze ontstaan dan de in deze § beschouwde.

buigraaklijn van een der krommen van den bundel, volgens welken het vlak V den bundel (a^3) snijdt, terwijl Q het bijbehoorende buigpunt is. De meetkundige plaats dezer buigpunten Q is een kromme ι^{12} van den twaalfden graad.

Om de m.p. der bijbehoorende punten P te vinden, merken wij op, dat, wanneer een rechte l een waaier beschrijft, de punten van de op l gelegen groep van S^4 een kromme van den vijfden graad beschrijven. De buigraaklijnen PQ omhullen een kromme van de 9de klasse; de punten van de op PQ gelegen groep beschrijven dus een kromme van den graad $9 \times 5 = 45$. Hiertoe behoort de kromme ι^{12}, 2 maal geteld, omdat in Q twee punten van een groep samenvallen. De restkromme, dat is de m.p. der punten P, is dus van den graad 21.

Deze kromme is de doorsnede van het vlak V met het oppervlak Φ. Dit oppervlak is dus van den 21^{en} *graad.*

De kromme ι^{12} is de doorsnede van het vlak V met het oppervlak ψ. Nu behoort echter een willekeurig punt Q van het oppervlak ψ bij één punt P van het vlak V, terwijl het punt Q van de kromme ι^{12} bij twee punten P behoort. De kromme ι^{12} is dus een dubbelkromme van het oppervlak ψ. Dit oppervlak is dus van den graad 24.

De graad 21 van het oppervlak Φ geeft het aantal malen dat het punt Q in een plat vlak V is gelegen en het punt P op een willekeurige rechte l. Hij geeft dus ook den graad van de kromme, die door het punt Q wordt doorloopen, als het punt P een rechte l beschrijft.

Evenzoo zal, als het punt Q een rechte l beschrijft, het punt P een kromme van den graad 24 doorloopen.

§ 6. Gaat een rechte l door een punt Q van de basiskromme ϱ^9, dan zullen twee der oppervlakken a^3, die l aanraken, samenvallen tot het oppervlak a^3, dat l in Q aanraakt. Elke snijlijn van ϱ^9 is dus ook drager van een coïncidentie van S^4.

Zulk een snijlijn wordt buiten ϱ^9 nog door twee oppervlakken a^3 aangeraakt; de raakpunten zijn door S^4 aan Q toegevoegd. Valt één dezer raakpunten met Q samen, dan zullen in Q *drie toegevoegde punten* der S^4 samenvallen. Het bij dit raakpunt behoorende oppervlak a^3 heeft dan in Q 3 samenvallende punten met l gemeen. De hoofdraaklijnen, die door een punt Q van de kromme ϱ^9 gaan, vormen een kegel van den derden graad; immers, een vlak V door het punt Q snijdt den bundel (a^3) volgens een bundel, die in Q een basispunt heeft, en de kromme ι^{12}, die de m.p. der buigpunten

van de krommen van dezen bundel is, heeft in Q een drievoudig punt.

Op elke beschrijvende van dezen kegel ligt nog een punt S dat door S^4 aan Q is toegevoegd; deze punten vormen een kromme σ, welke éénmaal door Q gaat. Immers, beschouwen wij de raaklijn t in Q aan de kromme ϱ^9. Een willekeurig oppervlak α^3 snijdt de raaklijn t buiten Q nog slechts in één punt, er is dus geen enkel oppervlak α^3, dat t buiten Q aanraakt. De vier, op t gelegen toegevoegde punten van S^4 vallen dus met Q samen. Het punt S, dat op de rechte t ligt, valt dus ook met Q samen en men ziet, dat de kromme σ door Q gaat en hier de rechte t aanraakt.

Een plat vlak V door het punt Q snijdt den bovengenoemden kubischen kegel volgens drie beschrijvenden, die elk één punt S bevatten. Het punt Q en deze drie punten S zijn de snijpunten van het vlak V met de kromme σ; deze kromme is dus van den *vierden* graad.

§ 7. In § 3 is gebleken, dat, als T een conisch punt van een oppervlak α^3 is, dit punt een singulier punt van S^4 moet zijn; immers, is l een willekeurige rechte door T, dan zal het genoemde oppervlak α^3 in T twee punten met de rechte l gemeen hebben. Nemen wij nu voor de rechte l een der raaklijnen van het oppervlak α^3 in het punt T, dan zullen twee der oppervlakken, die l aanraken, met het genoemde oppervlak α^3 samenvallen en is T dus een coïncidentie. De beide andere punten van de bijbehoorende groep zijn de snijpunten der rechte l met het oppervlak Π^5, dat bij het punt T behoort. Deze raaklijnen l vormen een quadratischen kegel, die het oppervlak Π^5 volgens een kromme van den tienden graad snijdt. Tot deze kromme behooren echter, zooals men gemakkelijk inziet, de 6 door T gaande rechten, die op het oppervlak α^3 liggen. De restdoorsnede, d.i. de m. p. van de punten der bovengenoemde groepen, is dus een kromme van den *vierden* graad.

§ 8. De punten, die met een willekeurig punt P tot eenzelfde groep van S^4 behooren, vormen een kromme c^5 van den vijfden graad. Doorloopt het punt P een rechte l; dan zullen deze krommen een oppervlak Δ beschrijven, waarvan wij den graad zullen bepalen.

Hiertoe onderzoeken wij de doorsneden van Δ met het oppervlak Π^5, dat bij een punt P der rechte l behoort.

Deze oppervlakken Π^5 vormen een bundel. Immers, door een willekeurig punt X der ruimte gaat één oppervlak α^3 en het raakvlak in X aan dit oppervlak snijdt de rechte l in één punt P, dat

met X tot eenzelfde groep van S^4 behoort. Door dat punt gaat dus werkelijk maar één oppervlak Π^5.

De laatste redeneering geldt niet, als men X op de basiskromme ϱ^9 kiest; het ligt dan n.l. op ∞^1 raakvlakken van oppervlakken a^3. De kromme ϱ^9 is dus een deel van de basiskromme van den bundel (Π^5).

Evenmin geldt die redeneering, als het genoemde raakvlak door de rechte l gaat. De rest der basiskromme van den bundel (Π^5) is dus de m.p. van de raakpunten der raakvlakken door de rechte l aan oppervlakken a^3. Deze kromme moet van den 16^{en} graad zijn, daar zij met ϱ^9 samen de basiskromme van den bundel (Π^5) vormt. Dit is werkelijk zoo, want een vlak V door l snijdt de genoemde kromme in de vier punten, waarin l door oppervlakken a^3 wordt aangeraakt, en in de 12 punten, waarin het vlak V door oppervlakken a^3 wordt aangeraakt.

De vlakken π, waarin de krommen c^5 gelegen zijn, die bij de punten der rechte l behooren, omhullen een ontwikkelbaar oppervlak van de vijfde klasse. Deze vlakken toch zijn de raakvlakken in de punten P der rechte l aan de door deze punten gaande oppervlakken a^3. Vier van deze raakvlakken gaan door l, omdat l vier oppervlakken a^4 aanraakt; door een willekeurig punt van l gaan dus tezamen vijf dezer vlakken.

Door een willekeurig punt van een der bovengenoemde krommen ϱ^9 en ϱ^{16} gaan dus vijf vlakken π, dus vijf krommen c^5. Deze krommen zijn dus 5-voudige krommen van het oppervlak A. Een oppervlak Π^5 snijdt het oppervlak A nu volgens deze vijfvoudige krommen en volgens de op Π^5 gelegen kromme c^5, dus te zamen volgens een kromme van den graad $5 \times 9 + 5 \times 16 + 5 = 130$; de graad van A is dus 26.

Elk punt van A behoort blijkbaar tot een groep van S^4, waarvan een der punten op de rechte l ligt. Een tweede rechte m snijdt het oppervlak A in 26 punten. *Er zijn dus 26 groepen van S^4, waarvan twee punten op twee gegeven rechten liggen.*

§ 9. Een plat vlak V snijdt het oppervlak A^{26} volgens een kromme c^{26} van den 26^{en} graad. Elk punt dezer kromme behoort tot een groep, waarvan een der punten op de rechte l ligt; de andere punten dezer groepen vormen een kromme λ, waarvan wij den graad zullen bepalen.

Hiertoe zoeken wij de snijpunten dezer kromme λ met het vlak V. Deze zijn de volgende:

1^e. De rechte l snijdt het vlak V in een punt P. De kromme c^5,

die bij dit punt P behoort, heeft in P een dubbelpunt en snijdt het vlak V verder in drie punten, die op de kromme c^{26} liggen. De verbindingslijn van een dezer punten met het punt P bevat twee punten der kromme λ, die in het vlak V liggen; men vindt zoo 6 snijpunten van λ met het vlak V.

2°. Doorloopt een punt Q het vlak V, dan vallen voortdurend in Q twee coïncidenties van S^4; de overige, bij deze coïncidenties behoorende, punten beschrijven, zooals in § 5 gebleken is, een oppervlak van den 21^{en} graad; dit wordt door de rechte l in 21 punten gesneden. De coïncidenties, die bij een dezer snijpunten behooren, zijn blijkbaar punten der kromme c^{26}, die met een der bijbehoorende punten van de kromme λ zijn samengevallen. Men vindt zoo dus 21 snijpunten van de kromme λ met het vlak V.

3°. Het vlak V snijdt de basiskromme ϱ^9 in 9 punten Q. Door elk dezer punten gaan vijf krommen c^5, zoodat dit punt bij vijf punten P der rechte l behoort. De verbindingslijnen met deze punten P dragen elk een in Q gelegen coïncidentie, zoodat telkens in Q een punt van c^{26} met een bijbehoorend punt van λ samenvalt. Elk dezer 9 punten van Q is dus een vijfvoudig punt der kromme λ, men vindt zoo dus 45 snijpunten van λ en V.

Het totale aantal snijpunten van λ en V bedraagt dus $6 + 21 + + 45 = 72$; dit is dus de graad van λ.

Een tweede vlak V' snijdt de kromme λ in 72 punten; *er zijn dus* 72 *groepen van* S^4, *waarvan twee punten in twee gegeven platte vlakken liggen en één derde punt op een gegeven rechte lijn ligt.*

§ 10. Blijkens het voorafgaande zijn er ∞^2 groepen van S^4, waarvan twee punten in twee gegeven vlakken V en V' liggen. De overige punten dezer groepen vormen een oppervlak van den 72^{en} graad, immers een rechte lijn l bevat 72 dezer punten.

Onder deze groepen zijn er ∞^1, die een coïncidentie hebben, welke buiten de vlakken V en V' ligt. De m.p. dezer coïncidenties is een kromme σ, waarvan wij den graad zullen bepalen. Hiertoe zoeken wij het aantal snijpunten van de kromme σ met het vlak V.

Het vlak V' snijdt het vlak V volgens een rechte l. Deze bevat 21 punten P, waarbij een in het vlak V gelegen coïncidentie Q en nog een tweede punt van het vlak V behooren; deze 21 punten zijn de snijpunten van de rechte l met het oppervlak Φ, dat bij het vlak V behoort. De 21 bijbehoorende punten Q zijn blijkbaar snijpunten van het vlak V met de kromme σ.

Het vlak V snijdt de kromme ϱ^9 in 9 punten Q. Er zijn ∞^1 groepen van S^4, waarvan in Q drie punten samenvallen; zooals in

§ 6 bleek, is de m.p. van de overige punten dezer groepen een biquadratische ruimtekromme. Deze snijdt het vlak V' in vier punten. Er zijn dus vier groepen, waarvan een punt in V' ligt, terwijl de drie andere punten zijn samengevallen in het snijpunt van den drager met het vlak V. Men kan dit blijkbaar zoo beschouwen, dat een punt van het vlak V met een daaraan toegevoegde coïncidentie is samengevallen; elk dezer groepen levert dus een snijpunt van het vlak V met de kromme σ. Het aantal dezer groepen bedraagt blijkbaar $9 \times 4 = 36$.

De graad van S bedraagt dus $21 + 36 = 57$.

Een derde vlak V'' snijdt de kromme σ in 57 punten. *Er zijn dus 57 groepen van S^4, die in een gegeven vlak V'' een coïncidentie hebben, terwijl de twee andere punten in twee gegeven vlakken V en V' liggen.*

§ 11. Het oppervlak van den 72^{en} graad, gevormd door de overige punten der groepen, waarvan twee punten in twee gegeven vlakken V en V' liggen, wordt door een derde vlak V'' volgens een kromme c^{72} gesneden. Er zijn dus ∞^1 groepen van S^4, waarvan drie punten in drie gegeven platte vlakken liggen. De vierde punten dezer groepen vormen een kromme μ, waarvan wij den graad zullen bepalen. Hiertoe zoeken wij de snijpunten van de kromme μ met het vlak V.

Het vlak V snijdt de vlakken V' en V'' volgens twee rechten l' en l''. Het oppervlak A^{26}, dat bij de rechte l' behoort, wordt door de rechte l'' in 26 punten gesneden. Twee dezer punten liggen op de rechte l', die een dubbelrechte van A^{26} is; de 24 overige geven 24 groepen van S^4, waarvan twee punten resp. op de beide rechten l' en l'' zijn gelegen.

De dragers dezer groepen liggen in het vlak V, en de overige twee punten van elk dezer groepen zijn snijpunten van het vlak V met de kromme μ. Men vindt zoo dus 48 snijpunten.

Er zijn 57 groepen van S^4, die in V een coïncidentie hebben, terwijl de beide andere punten van die groepen in de vlakken V' en V'' liggen. In elk dezer coïncidenties is een punt van V met het bijbehoorende punt van μ samengevallen; men vindt zoo dus 57 snijpunten van V en μ.

Het vlak V snijdt de kromme ϱ^9 in 9 punten. Elk dezer punten Q draagt ∞^2 coïncidenties van S^4; de overige punten dezer groepen liggen op het pooloppervlak H^5 van het punt Q. Dit oppervlak snijdt het vlak V' volgens een kromme γ^5; onder de genoemde groepen zijn er dus ∞^1, waarvan één punt in het vlak V' ligt; de overige punten dezer groepen vormen een kromme η. Deze

kromme η snijdt het vlak V' in de 9 punten, waarin V' de kromme ϱ^9 snijdt; immers, in elk dezer snijpunten heeft de bijbehoorende groep een coïncidentie, zoodat daar telkens een punt van V' met het bijbehoorende punt van η samenvalt. De kromme η is dus van den 9^{en} graad.

Het vlak V'' snijdt de kromme η^9 in 9 punten. Bij elk der 9 snijpunten van V en ϱ^9 vindt men dus 9 groepen, welke in het genoemde snijpunt een coïncidentie hebben, terwijl de beide andere punten in de vlakken V' en V'' liggen. Gemakkelijk ziet men, dat deze coïncidenties weer snijpunten zijn van het vlak V met de kromme μ; men vindt zoo dus 81 snijpunten.

Het totale aantal snijpunten van V en μ bedraagt dus $48 + 57 + 81 = 186$. Dit is dus de graad van μ.

Een vlak V''' snijdt de kromme μ in 186 punten. *Er zijn dus 186 groepen van S^4, waarvan vier punten in vier gegeven platte vlakken liggen.*

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt, namens den Heer Dr. E. L. BACKMAN te Upsala, tijdelijk te Utrecht, eene mededeeling aan over: „*De olfactologie der methylbenzolreeks.*"

(Mede aangeboden door den Heer PEKELHARING).

Onder een homologe reeks verstaat men een reeks stoffen, wier atomistische samenstelling geleidelijk in dezelfde richting op zeer bepaalde wijze verandert. Zulke stoffen geven, als zij riekend zijn, gelijk bekend, ook een reuk, die allengs en bijna continu wordt gewijzigd. De reukgewaarwordingen, die zij te voorschijn roepen, vormen evengoed als de atomistische samenstellingen een reeks. De vraag of zich tusschen de termen dezer reeks ook compensaties van gewaarwordingen voordoen heeft een algemeen-physiologisch belang.

Tot dusverre zijn slechts in enkele homologe reeksen de minima perceptibilia der termen vastgesteld (HAYCRAFT [1]), ZWAARDEMAKER [2]), J. PASSY [3])) en zeer onlangs het ladingsverschijnsel (ZWAARDEMAKER [4])). In de ditmaal voorgelegde mededeeling zijn voor een tot dusverre niet onderzochte reeks de minima perceptibilia, de binnen de reeks mogelijke samenvoegingen, de snelheid van verbreiding, de adsorptie aan electrisch geladen metaalvlakken en de intensiteit der nevelelectrici-

1) HAYCRAFT. Brain II 1888 p. 166.

2) ZWAARDEMAKER. Die Physiologie des Geruchs. Leipzig, 1894 p. 238.

3) J. PASSY. Compt. rendus. Mai 1892, Mai 1893.

4) ZWAARDEMAKER. Zitt.versl. dezer Akad. van 27 Mei 1916 Deel 25 p. 3.

teit der termen behandeld. In het algemeen werd de door ZWAARDEMAKER uitgewerkte methodiek van onderzoek in acht genomen [1]).

Het minimum perceptibile werd in de reukkast (l. c p. 56) bepaald, zeer kleine hoeveelheden reukstof in waterige oplossing onder voorzichtige verwarming in de ruimte van 64 Liter verdampend. Eerst 3 à 4 min. na de volledige vervluchtiging vond de waarneming plaats. Tusschen twee waarnemingen werd de kast gelucht en de wand met krijt en handdoek van aanhangenden geur bevrijd. In dezelfde kast, doch nu met een achterwand van filtreerpapier, waarop de verzadigde waterige oplossing gebracht werd, vonden de metingen van de snelheid van verbreiding door diffusie plaats. Door een reeks bepalingen werd de tijd opgespoord, vereischt om in het midden van den tegenovergestelden wand een duidelijke reukgewaarwording te verkrijgen.

Ter quantitatieve vaststelling der nevelelectriciteit, door elk der termen bij verstuiving voortgebracht, diende een glazen versproeier en een ronde aluminiumplaat van 20 cM. doorsnee, die met een electroscoop van EXNER verbonden was. Zoowel de versproeier als de buitenmantel van den electroscoop, waren met de aarde verbonden, de aluminiumplaat daarentegen zorgvuldig door een voet van paraffine geïsoleerd. Steeds werden 10 cub. cM. onder een overdruk van 2 atmospheren door gecomprimeerde lucht versproeid. Door bepaling van de capaciteit van den electroscoop met opvangplaat en de grootte der uitslagen bij opeenvolgende voltspanningen kon ik gemakkelijk het aantal coulombs, dat als lading op de schijf per cub. cM. versproeide vloeistof verkregen werd, berekenen. Onder deze bepaalde proefvoorwaarden werd door verstuiving van zuiver water geen lading verkregen. De volgorde der metingen was deze, dat in elke proefreeks eerst de optimale afstand tusschen versproeier en aluminiumschijf opgezocht werd, waarbij men van de grootst mogelijke lading verzekerd kon zijn. Dan werden bij dezen afstand een tiental metingen gedaan. In de tabellen vindt men een gemiddelde, dat uit de uitslagen van den electroscoop door omrekening de lading in coulombs per cub. cM. versproeide vloeistof aangeeft.

De adsorptie der reukstoffen werd voor electrisch geladen metaalvlakten nagegaan. Hiertoe werd de volle geur, die een volledig uitgeschoven magazijncylinder (l. c. p. 65) kan verschaffen, door een vernikkeld metalen buis van 10 cM. lengte en 0.8 cM. wijdte geleid en wel gedurende 5 min., terwijl de overigens geïsoleerde buis op 220 volt opgeladen was. De metalen buis was daarbij in twee onder-

[1]) Verg. TIGERSTEDT's Hdb. d. physiol. Methodik. Bd. 3 p. 46.

ling geïsoleerde stukken verdeeld, zoodat de beide deelen tegengesteld geladen konden worden. Na het einde der 5 min. werd met behulp van den reukzin nagegaan of en voor hoelang geur aan den buiswand bleef hangen. De snelheid, waarmee de lucht, die door magazijncylinder en vernikkelde buis streek, doorgezogen werd, was zoodanig, dat per minuut 6 Liter passeerden.

De bepaling der odorimetrische coefficienten, zoowel als de compensatie- en mengproeven, vonden met behulp van eenige praecisieolfactometers van ZWAARDEMAKER plaats. Daarbij was de snelheid van luchtstroom steeds dezelfde (6 Liter per minuut) en ook werden de ruikproeven slechts genomen, nadat de doorstrooming nauwkeurig $^1/_4$ minuut had geduurd. Op dat oogenblik werd de verbinding met de zuigpomp verbroken, de toegang naar den olfactometrischen cylinder afgesloten, en door een kort zijbuisje aan het reservoir, dat ongeveer 100 cub. cM. groot is, werd geroken. Elke proefreeks omvatte een aantal experimenten op denzelfden dag, met die van andere dagen samengevoegd. In de tabellen zijn slechts gemiddelden aangegeven. De olfactometrische cylinders waren steeds daags te voren met een verzadigde waterige oplossing der termen van de homologe reeks gevuld.

Minima perceptibilia der methylbenzolreeks.

benzol	5,3	10^{-6}	gram per Liter lucht
toluol	2,0	10^{-6}	,, ,, ,, ,,
xylol	0,8	10^{-6}	,, ,, ,, ,,
pseudocumol	0,2	10^{-6}	,, ,, ,, ,,

durol heeft in geconcentreerde waterige oplossing zoo goed als geen reuk.

Deze uitkomsten in grammoleculen omgerekend geven het volgende

benzol	6,80	10^{-8}	grammolecule per Liter lucht
toluol	2,17	10^{-8}	,, ,, ,, ,,
xylol	0,76	10^{-8}	,, ,, ,, ,,
pseudocumol	0,18	10^{-8}	,, ,, ,, ,,

Door deze bepalingen wordt HAYCRAFT's regel, dat in de homologe reeksen der organische chemie de reuk van de laagste naar de hoogere termen aanvankelijk geleidelijk toeneemt, volledig bevestigd. Door een voortgezet invoeren van methylgroepen wordt de hoeveelheid materie, tot het voortbrengen van een nauw waarneembare reukgewaarwording vereischt, geleidelijk verminderd. De toename der reukintensiteit is zelfs ten naaste bij evenredig aan het aantal ingevoerde methylgroepen. De reukintensiteit van toluol is ongeveer

3 maal sterker dan die van benzol, de reukintensiteit van xylol ongeveer 3 maal sterker dan die van toluol en de reuksterkte van pseudocumol ongeveer 4 maal sterker dan die xylol. Dan komt echter een daling, want niet slechts bezit een verzadigde oplossing van durol (± 1 : 200,000) in water een bijkans niet merkbaren reuk, maar ook in kristallijnen toestand riekt durol aanmerkelijk zwakker dan pseudocumol. Het is derhalve duidelijk, dat de reukintensiteit van durol zwakker moet zijn dan die van pseudocumol. Terwijl door voortgaande methyleering de reukintensiteit derhalve aanvankelijk stijgt, wordt zij ten slotte weer zwakker. Dit is ook de verhouding in de reeks der vetzuren en alcoholen.

Snelheid van verbreiding door diffusie over een afstand van 40 cM. bij 19° C.

De tijd, noodig om zich op merkbare wijze tot op een afstand van 40 cM. te verbreiden, is als volgt:

voor	benzol	1 min.	15	sec.
	toluol	1 ,,	15	,,
	xylol		60	,,
	pseudocumol		60	,,

Ter berekening van de ware diffusiesnelheid heeft men dit uit den aard der zaak met de spanning van verzadigden damp en met de reukintensiteit in verband te brengen. (Verg. l.c. p. 47.)

De electrische verstuivingslading.

Allereerst werd de verstuivingslading der verzadigde oplossingen bepaald. Zulke oplossingen kunnen wel is waar niet zonder meer onderling vergeleken worden, want de oplosbaarheid van de termen der methylbenzolreeks in water loopt tamelijk uiteen, maar de waarden zijn technisch bruikbaar. Ik vond het volgende:

	Optimale afstand	Electrische lading in coulombs per cub. cM.
Benzol	35 cM.	116.4×10^{-11}
Toluol	25 „	$92.1 \times 1.^{-11}$
Xylol	40 „	74.5×10^{-11}
Pseudocumol	35 „	32.3×10^{-11}
Durol	33 „	24.1×10^{-11}

Onmiddellijk vergelijkbaar zijn de verstuivingsladingen van aequimoleculaire oplossingen. De beide hoogste termen zijn echter zoo weinig oplosbaar, dat de eerste term in die extreme verdunning geen lading zou verschaffen. Daarom moet men in groepen onderzoeken, waarbij alleen de 3 eerste termen van de reeks werkelijk aequimoleculair genomen kunnen worden.

	Conc.		Optimale afstand	Electr. lading in coulombs per cub. cM.
Benzol	$\frac{1}{1200}$	normaal	30 cM.	18.9×10^{-11}
Toluol	$\frac{1}{1200}$	"	35 "	18.9×10^{-11}
Xylol	$\frac{1}{1200}$	"	43 "	28.7×10^{-11}
Pseudocumol	$\frac{1}{4800}$	"	35 "	18.4×10^{-11}
Durol	$\frac{1}{200000}$	"	35 "	18.0×10^{-11}

Men bespeurt hoe bij voortgezette methyleering de electrische ladingen van aequimoleculaire oplossing eerst langzaam, later zeer snel stijgt. Hiermee gaat min of meer een meer onoplosbaar worden in water parallel.

Het vermogen geadsorbeerd te worden.

De adsorptiviteit der stoffen van de methylbenzol-reeks aan al of niet electrisch geladen metaalvlakten is opmerkelijk gering. Alleen benzol hecht zich eenigszins aan den metaalwand, de overige stoffen niet.

Olfactometrie

aan de Empfindungsschwelle.

De olfactiewaarden bleken de volgende:

Benzol	0.3 c.M.	beantwoordend aan de vroegere gevonden minima perceptibilia in grammoleculen („Empfindungsschwellen".)
Toluol	0.5 „	
Xylol	0.7 „	
Pseudocumol	0.8 „	

Hieruit laten zich de olfactometrische coëfficienten berekenen: voor benzol 3.3, voor tolnol 2.0, voor xylol 1,4, voor pseudocumol 1.3.

De qualitatieve indrukken, die men bij deze drempelbepalingen verkrijgt, loopen, de reeks doorgaande, duidelijk uiteen. Elk der termen

heeft zijn eigen kenmerkenden geur en het is in het geheel niet moeilijk ze, afgaande op den reuk, onderling te onderscheiden. Benzol en Toluol hebben niettemin eenige overeenkomst. Beide rieken empyreumatisch en wel toluol sterker. Xylol daarentegen heeft het empyreumatische bijkans geheel verloren en vertoont een aromatisch karakter. Dit laatste wordt sterker in pseudocumol. In dit opzicht hebben xylol en pseudocumol weder eenige overeenkomst. Mij schijnt het verschil tusschen xylol en pseudocumol grooter dan dat tusschen benzol en xylol. Ten slotte komt durol met een uitsluitend aromatischen, phenolachtigen geur.

De combinatieproeven.

Ik heb de overtuiging gekregen, dat de termen der methylbenzolreeks bij onderlinge vermenging in gasvorm zonder merkbaren wedstrijd, doch wel elkaar verzwakkend, menggeuren kunnen voortbrengen, die een onmiskenbare eenheid vormen, al kan men er het empyreumatische, resp. aromatische karakter der samengevoegde

Combinatie	Cylinderlengte	Gewaarwording
Benzol-toluol	0.30 en 0.50 cM.	toluolachtig
„ „	0.15 „ 0.25 „	„
„ „	0.07 „ 0.12 „	nul
Benzol-xylol	0.15 „ 0.35 „	zwak benzol-xylolachtig
„ „	0.07 „ 0.17 „	nul
Benzol-pseudocumol	0.20 „ 0.60 „	duidelijk pseudocumolachtig
„ „	0.15 „ 0.40 „	zwakke, onzekere geur
Toluol-xylol	0.40 „ 0.50 „	xylolachtig
„ „	0.25 „ 0.35 „	„
„ „	0.15 „ 0.25 „	nul
Toluol-pseudocumol	0.35 „ 0.60 „	duidelijk pseudocumolachtig
„ „	0.25 „ 0.40 „	„ „
„ „	0.15 „ 0.30 „	nul
Xylol-pseudocumol	0.50 „ 0.60 „	duidelijk pseudocumolachtig
„ „	0.45 „ 0.50 „	zwak mengsel van pseudocumol en xylol
„ „	0.35 „ 0.40 „	nul

bestanddeelen in terugvinden. Het is vrij onverschillig of men den nieuwen indruk als een complexen geur dan wel als een nieuwen, specifieken geur wil beschrijven, aangezien de specifieke energiën van den reukzin onbekend zijn. Psychologisch intusschen schijnt mij b.v. het mengsel van gasvormig benzol en gasvormig xylol, waarin zoowel een empyreumatische als een aromatische componente is waar te nemen, desniettemin een geheel. (Zie tabel p. 976).

Uit deze proeven volgt in de eerste plaats, dat bij de samenvoeging van twee geuren, die tot een homologe reeks behooren, zelfs dan een reukgewaarwording kan verkregen worden, wanneer elke geur op zichzelf beneden de drempelwaarde („Empfindungsschwelle") blijft. In het algemeen verkrijg ik duidelijke reukgewaarwordingen door twee halve olfactoriën, alzoo door de som van twee halve minima perceptibilia. Men heeft klaarblijkelijk met een summatieëffect te doen. Twee subliminale prikkels, tot dezelfde homologe reeks behoorend, addeeren zich en veroorzaken samen een reukgewaarwording. Dit verschijnsel kan men als een analogon van reeds op ander gebied in de physiologie gebleken summatiewerkingen beschouwen. Zelf b.v. heb ik indertijd gevonden, dat eenige rest-stikstofverbindingen van uiteenloopende chemische constitie hun overeenkomstige physiologische werking, een duidelijken invloed op hart en bloeddruk uitoefenen, ook dan wanneer ze in zoo kleine hoeveelheid ingespoten worden, dat zij elk op zichzelf geen werking kunnen uitoefenen [1]).

De uitkomsten van combinatieproeven met drie stoffen zijn als volgt:

Combinatie	Cylinderlengte	Gewaarwording
Benzol-toluol-xylol	0.15—0.25—0.35 cM.	duidelijk xylolachtig
„ „ „	0.07—0.12—0.17 „	nul
Benzol-toluol-pseudocumol	0.15—0.25—0.40 „	duidelijk pseudocumol-achtig
„ „ „	0.07—0.12—0.20 „	onzeker, onduidelijk
Toluol-xylol-pseudocumol	0.35—0.45—0.60 „	duidelijk pseudocumol-xylol-achtig
„ „ „	0.25—0.35—0.40 „	zwak pseudocumolachtig
„ „ „	0.20—0.45—0.50 „	„ „

Ook deze combinaties bevestigen de zooeven gewonnen ervaring. Voor zwakkere prikkels, kleiner dan de waarde van $^1/_2$ olfactie, laten zich, naar ik geloof, geen duidelijke summatieve gewaarwordingen vinden.

[1]) E. L. Backman. Dissert. Upsala 1912.

Ten slotte mogen eenige combinatieproeven met 4 reukprikkels volgen.

Combinatie	Cylinderlengte	Gewaarwording
Benzol-toluol-xylol-pseudocumol	1.80—3.00—4.20—4.80 cM.	Mengsel van benzol-toluol geur met xylol-peudocumol-geur. De laatste componente doordringend
Benzol-toluol-xylol-pseudocumol	1.20 2.00—2.80—3.20 cM.	Mengsel van benzol-toluolgeur met xylol-pseudocumolgeur. De laatste componente doordringend
Benzol-toluol-xylol-pseudocumol	0.15—0.25—0.35 -0.40 cM.	Mengsel van benzol-toluolgeur met xylol-pseudocumolgeur; de laatste componente doordringend
Benzol-toluol-xylol-pseudocumol	0.07 0.12—0.17—0.20 cM.	nul

Ook bij deze combinaties vormt elke gewaarwording een geheel. Toch is in de 3 eerste groepen de xylol-pseudocumol-geur overheerschend. Een samenvoeging van subliminale prikkels geeft ook nu een summatieve gewaarwording.

Alzoo: *Bij de samenvoeging van twee of meer subliminale stofhoeveelheden uit een homologe reeks ontstaat een duidelijk summatief reukeffect.*

Of een soortgelijke summatie ook bij superliminale hoeveelheden kan voorkomen is uiterst moeilijk te beoordeelen, hoewel het mij niet onwaarschijnlijk voorkomt.

De compensatieproeven.

Aanvankelijk werd een der olfactometrische cylinders van den tweevoudigen reukmeter een weinig voorgeschoven, zoodat een prikkel ter waarde van 6 olfactiën werd verkregen. Dan werd eerst eene kleine, later een grootere hoeveelheid van een andere stof ingekoppeld en het reukeffect van de luchthoeveelheden, die zich mengden, nagegaan. De bepalingen hadden met langer of korter pauzen plaats en werden verscheidene malen op denzelfden en op opeenvolgende dagen herhaald. Tusschen elke proef werden de cylinders volledig ingeschoven, ter verhindering van te groote vervluchtiging en tot herstel van het diffusieverschil in den cylinder, waarin de oppervlakkige lagen der riekende vloeistof anders in reukintensiteit zouden ver-

Cylinderlengten	Gewaarwording
1.8 cM. Benzol + 2.3 cM. Toluol	benzolachtig
1.8 „ „ + 2.4 „ „	zwakke, onbepaalde geur
1.8 „ „ + 2.5 „ „	„ „ „
1.8 „ „ + 2.6 „ „	toluolachtig
0.9 „ „ + 0.9 „ „	benzolachtig
0.9 „ „ + 1.0 „ „	„
0.9 „ „ + 1.1 „ „	zwakke, onbepaalde geur
0.9 „ „ + 1.2 „ „	„ „ „
0.9 „ „ + 1.3 „ „	„ „ „
0.9 „ „ + 1.4 „ „	toluolachtig
3.6 „ „ + 4.7 „ „	benzolachtig
3.6 „ „ + 4.8 „ „	zwakke, onbepaalde geur
3.6 „ „ + 4.9 „ „	„ „ „
3.6 „ „ + 5.0 „ „	toluolachtig
1.8 „ „ + 3.7 „ Xylol	benzolachtig
1.8 „ „ + 3.8 „ „	nul
1.8 „ „ + 3.9 „ „	nul
1.8 „ „ + 4.0 „ „	nul
1.8 „ „ + 4.1 „ „	xylolachtig
0.9 „ „ + 1.5 „ „	benzolachtig
0.9 „ „ + 1.6 „ „	zwakke, onzekere reuk
0.9 „ „ + 1.7 „ „	nul
0.9 „ „ + 1.8 „ „	nul
0.9 „ „ + 1.9 „ „	zwakke, onzekere reuk
0.9 „ „ + 2.0 „ „	xylolachtig
3.6 „ „ + 7.7 „ Toluol	benzolachtig
3.6 „ „ + 7.8 „ „	zwakke, onzekere reuk
3.6 „ „ + 7.9 „ „	nul
3.6 „ „ + 8.0 „ „	nul
3.6 „ „ + 8.1 „ „	nul
3.6 „ „ + 8.2 „ „	zwakke, onzekere reuk
3.6 „ „ + 8.3 „ „	xylolachtig

Cylinderlengten	Gewaarwording
1.8 cM. Benzol + 1.5 cM. Pseudocumol	benzolachtig
1.8 „ „ + 1.6 „ „	nul
1.8 „ „ + 1.7 „ „	nul
1.8 „ „ + 1.8 „ „	zwakke, onzekere reuk
1.8 „ „ + 1.9 „ „	pseudocumolachtig
0.9 „ „ + 0.6 „ „	benzolachtig
0.9 „ „ + 0.7 „ „	nul
0.9 „ „ + 0.8 „ „	nul
0.9 „ „ + 0.9 „ „	pseudocumolachtig
3.6 „ „ + 3.1 „ „	benzolachtig
3.6 „ „ + 3.2 „ „	zwakke, onzekere reuk
3.6 „ „ + 3.3 „ „	nul
3.6 „ „ + 3.4 „ „	nul
3.6 „ „ + 3.5 „ „	pseudocumolachtig
3.0 „ Toluol + 1.9 „ Xylol	toluolachtig
3.0 „ „ + 2.0 „ „	zwakke, onzekere reuk
3.0 „ „ + 2.1 „ „	nul
3.0 „ „ + 2.2 „ „	nul
3.0 „ „ + 2.3 „ „	nul
3.0 „ „ + 2.4 „ „	xylolachtig
1.5 „ „ + 0.8 „ „	toluolachtig
1.5 „ „ + 0.9 „ „	zwakke, onzekere reuk
1.5 „ „ + 1.0 „ „	„ „ „
1.5 „ „ + 1.1 „ „	nul
1.5 „ „ + 1.2 „ „	nul
1.5 „ „ + 1.3 „ „	zwakke, onzekere reuk
1.5 „ „ + 1.4 „ „	xylolachtig
6.0 „ „ + 4.3 „ „	toluolachtig
6.0 „ „ + 4 4 „ „	zwakke, onzekere reuk
6.0 „ „ + 4.5 „ „	nul
6.0 „ „ + 4.6 „ „	nul
6.0 „ „ + 4.7 „ „	zwakke, onzekere reuk

Cylinderlengten	Gewaarwording
6.0 cM. Toluol + 4.8 cM. Xylol	xylolachtig
3.0 „ „ + 1.9 „ Pseudocumol	toluolachtig
3.0 „ „ + 2.0 „ „	zwakke, onzekere reuk
3.0 „ „ + 2.1 „ „	nul
3.0 „ „ + 2.2 „ „	nul
3.0 „ „ + 2.3 „ „	zwakke, onzekere reuk
3.0 „ „ + 2.4 „ „	pseudocumolachtig
1.5 „ „ + 0.9 „ „	toluolachtig
1.5 „ „ + 1.0 „ „	nul
1.5 „ „ + 1.1 „ „	nul
1.5 „ „ + 1.2 „ „	nul
1.5 „ „ + 1.3 „ „	pseudocumolachtig
6.0 „ „ + 4.1 „ „	toluolachtig
6.0 „ „ + 4.2 „ „	zwakke, onbepaalde reuk
6.0 „ „ + 4.3 „ „	nul
6.0 „ „ + 4.4 „ „	nul
6.0 „ „ + 4.5 „ „	pseudocumolachtig
4.2 „ Xylol + 2.8 „ „	xylolachtig
4.2 „ „ + 2.9 „ „	zwakke, onbepaalde reuk
4.2 „ „ + 3.0 „ „	nul
4.2 „ „ + 3.1 „ „	nul
4.2 „ „ + 3.2 „ „	nul
4.2 „ „ + 3.3 „ „	nul
4.2 „ „ + 3.4 „ „	zwakke, onzekere reuk
4.2 „ „ + 3.5 „ „	pseudocumolachtig
7.0 „ „ + 5.0 „ „	xylolachtig
7.0 „ „ + 5.1 „ „	nul
7.0 „ „ + 5.2 „ „	nul
7.0 „ „ + 5.3 „ „	nul
7.0 „ „ + 5.4 „ „	nul
7.0 „ „ + 5.5 „ „	zwakke, onzekere reuk
7.0 „ „ + 5.6 „ „	pseudocumolachtig

minderen. We willen er nog den nadruk op leggen, dat steeds de op een voorafgaanden dag verkregen uitkomsten, op den volgenden teruggevonden werden.

In het algemeen werd vastgesteld, dat bij constant houden van de eene reukhoeveelheid en bij geleidelijk aangroeien van de andere de reukgewaarwording eveneens geleidelijk van den eenen geur in den anderen overgaat, doch dat daarbij altijd een gebied wordt aangetroffen, waarin de beide geuren elkaar wederkeerig verzwakken, ja zelfs geheel opheffen. In het algemeen is derhalve bij de vermenging van zeer bepaalde reukstofhoeveelheden een volkomen compensatie der gewaarwordingen verkregen. Slechts voor benzol en toluol is de compensatie onduidelijk. In alle proeven werd bovendien vastgesteld, dat in de nabijheid der volledige compensatie verzwakking van reukgewaarwording bestaat.

De gevonden verhoudingen tusschen de cylinderlengten van twee

Aantal olfactiën				Gewaarwording
Benzol	Toluol	Xylol	Pseudocumol	
3	2.4			(0)
6	4.9			(0)
12	9.7			(0)
3		2.5		0
6		5.6		0
12		11.4		0
3			1.0	0
6			2.0	0
12			4.2	0
	3	1.7		0
	6	3.2		0
	12	6.5		0
	3		1.4	0
	6		2.7	0
	12		5.5	0
		6	3.9	0
		10	6.6	0

stoffen, die compensatie geven. is voor een bepaald paar stoffen steeds dezelfde. Men vindt ze terug, wanneer men de cylinderlengten in olfactiewaarden heeft omgerekend. (Zie tabel p. 982.)

Uit dit onderzoek volgt derhalve dezelfde regel, die vroeger door ZWAARDEMAKER [1]) voor andere compensaties tusschen reukstoffen werd gevonden: *wanneer van eene reukstof a olfactiën door b olfactiën van eene andere gecompenseerd worden, zoo compenseeren elkaar evenzeer n × a en n × b olfactiën.* Het nieuwe en merkwaardige is hier, dat een typische compensatie werd aangetroffen tusschen reukstoffen, die tot eenzelfde homologe reeks behooren.

Men kan natuurlijk ook een volledige compensatie tusschen vier homologen verkrijgen. Hiervan moge een voorbeeld volgen met den viervondigen reukmeter opgenomen:

Aantal olfactiën				Gewaarwording
Benzol	Xylol	Toluol	Pseudocumol	
12	11.4	12	5.5	nul
12	11.4	10	5.5	pseudocumolachtig
12	8.6	12	5.5	benzolachtig
12	13.6	12	5.5	xylolachtig
12	0	12	0	benzol-toluol-geur

Een ander soortgelijke compensatie is b.v.: benzol 12, pseudocumol 4.2, toluol 12 en xylol 6.5 olfactiën. Ook deze samenvoeging geeft een volledige compensatie. Evenzeer kan toluol en pseudocumol met xylol alleen compenseeren: b.v. 14 olfactiën toluol en 3.9 olfactiën van pseudocumol met 13.5 (7.4 + 6.0) olfactiën van xylol.

SAMENVATTING.

1. Het minimum perceptibile der reukstoffen uit de methylbenzolreeks vertoont voor de eerste vier termen een bijkans proportioneel kleiner worden bij toenemende methyleering. De reukintensiteit neemt in de reeks dus aanvankelijk toe. Ook wordt de grens van meer empyreumatisch (benzol-toluol) meer aromatisch (xylol-pseudo-

[1]) H. ZWAARDEMAKER, die Physiologie des Geruchs, Leipzig 1895 S. 194, verg. de beperking tot de zone der cardinaalwaarden ZWAARDEMAKER in Tig. Hdb. d. Physiol. meth. Bd. III 1 p. 89. Buiten de zone der cardinaalwaarden zullen de logarithmen moeten worden genomen.

cumol), totdat tenslotte een phenolachtige reuk (durol) verschijnt. Terzelfdertijd neemt de reukintensiteit af, zoodat bij voortgezette methyleering misschien reuklooze verbindingen zullen ontstaan.

2. De snelheid van voortplanting van den geur door diffusie is voor de vier onderzochte homologen bijkans gelijk.

3. De electrische lading bij de verstuiving van aequimoleculaire oplossing der stoffen vertoont een aanvankelijk geringere, later snellere stijging bij het opklimmen in de reeks.

4. De adsorptie der onderzochte stoffen van electrisch geladen metaalvlakken is uiterst gering.

5. De vier onderzochte termen der reeks kunnen menggewaarwordingen geven, zonder een spoor van wedstrijd en den indruk verschaffend een geheel te vormen.

6. Samenvoegingen van twee of meer subliminale prikkels geven — ten minste in de onderzochte verhoudingen — een duidelijk summatie-effect. Toch schijnt het, dat men daartoe niet minder dan een halve olfactie van elke reukstof mag nemen.

7. De combinatie van twee of meer matig sterke prikkels uit de hier onderzochte homologe reeks geeft bij bepaalde verhouding een volledige compensatie der ter vermenging gebrachte geuren tot nul. Dit geschiedt zonder wedstrijd. Slechts, wanneer de reukstoffen veel op elkaar gelijken, zooals bij benzol en toluol, is de compensatie minder volledig.

Anatomie. — De Heer Winkler biedt eene mededeeling aan van den Heer D. J. Hulshoff Pol: *„De ontwikkeling der Fossa Sylvii bij Semnopithecus embryo's"*.

(Mede aangeboden door den Heer Bolk).

Ik was in de gelegenheid, gedurende de laatste jaren van mijn verblijf te Lawang-Java, in de bosschen, op de uitloopers van het Tengergebergte, een groot aantal semnopithecus maurus te schieten.

De uteri welke uit de geschoten apen waren gesneden, werden eerst in formaline oplossing bewaard, doch daarna, voor de reis naar Europa, in alcohol overgebracht. Ook later, nadat de hersenen uit de schedels waren genomen, bleven ze in alcohol.

Daar een vrij volledige serie aap-embryo-hersenen niet dikwijls gevonden wordt, is het te begrijpen, dat het door mij verzamelde materiaal enkele nieuwe gezichtspunten heeft gegeven.

Over de aapspleet en overgangswindingen, werd reeds eerder

mededeeling gedaan [1]). In deze verhandeling zal de ontwikkeling van de fossa sylvii beschreven worden, welke op enkele punten geheel afwijkt van wat bij menschelijke embryo's gevonden wordt.

Het is daarvoor voldoende de aapembryo's met de serie nummers 15, 14, 13*a* en 13*b*, 12, 11 en 10 te beschrijven, daar de groeve bij N°. 10 reeds de volle ontwikkeling bereikt heeft, en dan geheel overeenkomt met wat bij volwassen exemplaren gevonden wordt.

Alvorens hiertoe over te gaan, wil ik eerst in het kort in herinnering brengen, hoe de ontwikkeling plaats heeft bij den mensch.

In de door Ekker [2]) gegeven beschrijving, wordt er op gewezen, dat in de 3e maand, wanneer de hersenen 1.9—2.6 cM. lang zijn geworden, tusschen het frontaal en temporaal gedeelte, een inbochting ontstaat, zooals men die bij boonen vindt. Deze inham gaat van de basis naar de lateraal-vlakte over en Ekker beschrijft hem op bl. 208 als volgt: „stellt anfangs eine ganz flache etwa dreiseitige Grube dar, deren Spitze nach abwärts gegen die Hirnbasis, deren Basis nach aufwärts zieht".

In de 4e maand wordt de fossa sylvii *duidelijker afgeteekend*, daar de hersenmassa zich langs de randen er van begint op te werken: „welche nach unten und vorn gegen die Schädelbasis flach ausläuft".

De uitgroeiing der randen boven de iets lager liggende fossa sylvii, gaat in de 5e maand verder.

Een duidelijke afscheiding tusschen een voor- en achtergedeelte van deze groeve krijgt men in de volgende, dus zesde maand. Ook nu is deze fossa nog bijna geheel open, slechts het achterstuk heeft zich tot een fissura gesloten.

In de volgende maanden gaat het proces van operculiseering voort, zoodat in de 9e nog slechts het alleronderste gedeelte geopend is.

Retzius [3]) geeft in zijn werk eerst een overzicht over de door Cunningham gegeven beschrijving, welke de fissura lateralis als een bijna ronde groeve ziet beginnen, om daarna eerst in een driehoek over te gaan. Retzius zelf beschrijft haar ontstaan in het midden van de derde maand, als een halve maan of niervorm, ook wel als

---

[1]) D. J. Hulshoff Pol. „De aapspleet bij semnopitheci embryo's". Kon. Akademie v. Wetensch. Amsterdam 1916. Febr. „De verhouding van de overgangswindingen van Gratiolet tot de aapspleet". Kon Akad. v. Wetensch. Amst. 16 April 1916. „De aapspleet — sulcus lunatus — bij den mensch". Kon. Akad. v. Wetensch. Amst. 1916. Mei.

[2]) A. Ekker. Zur Entwicklungsgeschichte der Furchen und Windungen der Grosshirn-hemisphären im Foetus des Menschen. Archiv f. Anthropologie 1868.

[3]) D. Retzius. Das Menschenhirn. Stokholm 1896.

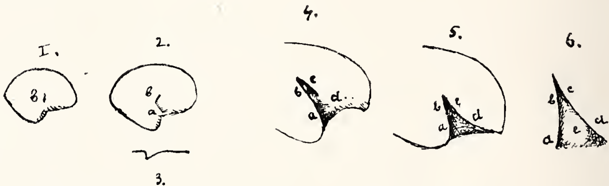
een spits toeloopenden hoek (Pl. I, fig. 28 en 29). Van een insula bemerkt men echter nog niet veel. Eerst in het begin van de 5e maand wordt het afgebakende gebied breeder.

Moge uit het bovenstaande volgen, dat de vorm waarin de fossa sylvii begint, niet steeds dezelfde is, op één punt bestaat overeenstemming en wel, dat deze groeve aan den lateralen *rand* begint, en, van den aanvang af aan, naar beneden toe openstaat.

Wanneer ik mij, wat betreft de foetale hersenen van anthropoiden, bepaal tot de onderzoekingen der allerlaatste tijden, dus die van Anthony [1]), dan vond hij bij een foetus van een gorilla van 6 à 8 md. „Le circulair superieur de Reil s'étend, du côté gauche, comme chez un foetus humain du même age, jusqu'au sillon limite antérieur de l'insula .... A droite, le circulair supérieur de Reil est conforme au type habituel observé chez les singes. C'est-a-dire qu'il n'atteint pas le sillon limite antérieur de l'insula."

Wat de foetale hersenen van een chimpanzé betreft [2]), overeenkomende met menschelijke hersenen van de 7e tot 8e foetale maand zoo zouden ook deze, wat betreft het „complex sylvin", afwijken. Van belang voor deze verhandeling is echter, dat de groeve in deze periode reeds geheel gesloten is.

Bij Semnopithecus embryo's is de verhouding geheel anders dan bij den mensch.



Wij zien toch bij N°. 15 (fig. 1), waarbij het embryo een lengte heeft van 9 cm., en het hersengewicht 2 gr. bedraagt, dat *op* de laterale *vlakte*, dus niet aan den rand ervan, een kleine inkerving te zien is (*b*). Deze bevindt zich boven de plaats, waar, aan den rand, het frontaal en temporaal gedeelte te samen komen. Deze inkerving is klein, doch duidelijk zichtbaar. Beziet men de omgeving van dit streepje goed, dan is een fijn lijntje zichtbaar, dat van het

[1]) Anthony, R. Sur un cerveau de foetus de gorille. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 161, p. 153 séance du 9 Aout 1915, Paris.

[2]) Id. Sur un cerveau de foetus de chimpansé. Comptes rendus des séances enz. t. 162, p. 604, séance 17 Avr. 1916, Paris.

streepje naar den lateralen rand toegaat. Dit vormt als het ware een verbinding tusschen het streepje-*b*- en dien rand.

De inkerving -*b*- heeft zich, (fig. 2) bij N°. 14 (lengte 11 cm., hersengewicht 3 gr.) tot een duidelijke groeve ontwikkeld. Ook bij dit embryo is de verbinding tusschen -*b*- en den lateralen rand, niet veel meer dan de verlenging van een groeve in den vorm van een streepje. Men ziet echter aan den achterkant reeds iets van een opstaanden rand.

Wat den vorm van de groeve -*b*- betreft, zoo is deze geheel verschillend van wat later bij de andere hersengroeven gevonden zal worden, daar de randen niet tegen elkander gelegen zijn, doch de voorste afgeplat is. Fig. 3 geeft ons een dwarsdoorsnede dezer groeve. We zien daarin, dat men van de achtervlakte steil naar beneden gaat, tot op den bodem van de groeve, doch aan den voorkant langs een glooiend vlak op het frontaal gedeelte overgaat.

Bij N°. 13*a* (lengte 13.5 cm., hersengewicht 9 gram) welke ongeveer van dezelfde grootte is als 13*b*, is de richting van de groeve geheel veranderd. Had ze in fig. 2 een richting eenigszins van onder-achter naar boven-voor, bij dit embryo (fig. 4) is de richting geheel veranderd, en loopt ze van onder-voor, naar boven-achter.

De achterrand van de toekomstige fissura sylvii is nu in zijn geheel gevormd, en steekt boven het voorliggende gedeelte uit. Deze begrenzing heeft het eigenaardige dat ze aan den benedenkant, dus bij -*a*- duidelijker geworden is dan bij -*b*-. Verder is bij dit embryo ook reeds een gedeelte van den voorrand van de fissura sylvii gevormd -*c*-, terwijl het lager gelegen gedeelte -*d*- gevormd wordt door den lobus frontalis. De geheele groeve is dus niet veel meer dan een haak, waarvan de lange zijde gevormd wordt door -*ab*- en de korte door -*c*.

Opmerkelijk is het nu, dat, terwijl het bovengedeelte *b*. van den achterwand van de fissura sylvii niet diep is, dit wel het geval is met het gedeelte *c*. Men zou op die wijze den indruk krijgen, dat dit laatste gedeelte overeenkomt met *b* uit fig. 2. Hiertegen zou pleiten, dat men zoowel in fig. 1 als 2, de bestaande groeve *b* door een oppervlakkige inkerving verbonden ziet met den lateralen rand, wat wel de groeve *a* uit fig. 4 zal zijn. Toch blijft de eerste opvatting mogelijk, wanneer men aanneemt, dat bij de verdere ontwikkeling, de plooi *a* (fig. 2), zich naar boven verlengt, van uit het hoekpunt bij *b* en deze laatste groeve dan als het ware aan den achterkant optilt en eveneens naar boven toe verschuift. Het hoekpunt tusschen *a* en *b* (fig. 2), zou dan hetzelfde zijn als tusschen *b* en *c* (fig. 4), met dat verschil dat het naar achter-boven verschoven

is. Waar in dit laatste figuur, *a* het oudste gedeelte is, en *b* het jongere, is het te begrijpen, dat *a* dieper is dan *b*. Deze opvatting zou ondersteund worden door het feit, dat de richting van *b* in fig. 1 een meer loodrechte is als in fig. 2, zoodat de stand dezer plooi zich in de drie ontwikkelingsstadiën voordoet als *b* in fig. 1 en 2, en *c* in fig. 4.

Daar echter tusschen fig. 2 en 4 de schakel ontbreekt, welke dit raadsel op zou kunnen lossen, zullen we slechts volstaan met te constateeren dat:

in fig. 2 het gedeelte *b* dieper is dan de verbinding *a* met den lateralen rand,

in fig. 4 juist het omgekeerde gevonden wordt, dus *a* dieper is dan *b* en dat ook *c* dieper is dan *b*.

Bij embryo 13*b* vermoedelijk van iets ouderen leeftijd dan 13*a*, vindt men den voorrand van de fissura Sylvii geheel gevormd (fig. 5), al mag de afscheiding bij *d* ook nog niet sterk ontwikkeld zijn. Het beeld dat nu gevormd is, komt geheel overeen met wat bij menschelijke vruchten ook wel wordt aangetroffen. (Retzius plaat I, fig. 33 en 35, plaat III, fig. 3), n.l. den driehoeksvorm met den top naar boven en de geopende basis naar beneden gericht.

Bij embryo N°. 12 (lengte 15 cm., hersengewicht 12 gr.) heeft de fossa Sylvii zich geheel gesloten en is de insula geoperculiseerd. Opent men de wanden van de groeve (fig. 6), dan blijkt dat het beeld, in fig. 5 gegeven, in grove trekken behouden is gebleven. Het operculum temporale blijft het sterkst ontwikkeld, veel sterker dan het operculum frontale bij *d*. Men ziet echter, in tegenstelling met fig. 5, dat de verbinding *bc* in de diepte gezonken is, terwijl de insula als een rond balletje naar boven toe komt uitpuilen (*c*), doch geheel door de opercula bedekt wordt.

Bij de verdere ontwikkeling, embryo N°. 11, lengte 18 cm., hersengewicht 21 gr., ziet men, dat het groevegedeelte, correspondeerende met *a* in fig. 6, zich meer in de diepte heeft geschoven, en dieper is komen te liggen dan het gedeelte *bc*.

In een nog latere foetale periode (embryo N°. 10, lengte 19 cm., hersengewicht 21 gr.) is er tusschen de opercula, correspondeerende met *ab* en *cd* in fig. 6 niet veel onderscheid meer. Het eenige opvallende is het sterk uitpuilen van de insula, als een knopvormige verhevenheid, boven haar omgeving. Ze is duidelijker zichtbaar dan men dat bij de volwassen apen vindt.

Uit het bovenstaande blijkt het groote verschil in ontwikkeling van de fossa Sylvii bij den mensch en den semnopithecus.

Bij den eersten gaat de ontwikkeling uit van de basis, waar deze

aan den lateralen rand grenst, en wel in den vorm van een cirkel of driehoek, welke zich eerst later naar boven toe, op de lateraal-vlakte, uitbreidt. Bij den semnopithecus vindt men net het omgekeerde; krijgt men dus eerst een groeve op de laterale vlakte (fig. 1 en 2), welke zich naar beneden toe ontwikkelt, om daarna aan den voorkant, doch eveneens op de laterale vlakte, een tweede afscheidingsgroeve te krijgen (fig. 4, sub *c*) welke zich ook naar beneden toe ontwikkelt (fig. 5), waarna eerst de vorm van een driehoek verkregen is, met naar beneden toe open basis.

Een tweede belangrijk verschil is de periode van volkomen operculiseering.

De lengte [1]) van embryo n°. 12, waarbij de fossa sylvii geheel gesloten was, bedraagt 15 cm. Waar een pas geboren semnopithecus een lengte heeft van 27 cm. is dat dus iets meer dan de helft ervan. Nu is de geheele lengte van een voldragen menschelijk foetus ± 53 cm. zoodat iets meer dan de helft daarvan op ± 29.5 cm. komt, wat dus wijzen zou op het *begin der zesde maand*.

Waar nu bekend is, dat bij menschen de geheele operculiseering eerst plaats heeft op het einde der 9[de] maand of kort na de geboorte, is ook dit dus een belangrijk verschil.

Een derde punt van belang is de periode waarin deze groeve zich het eerst aan de hersenoppervlakte vertoont.

Ik heb er op gewezen, dat de eerste aanduiding er van gevonden werd bij embryo n°. 15, met een lengte van 9 cm. Waar een pas geboren aapje 27 cm. meet, zou dat dus net het derde gedeelte van de lengte zijn. Nu is het derde gedeelte van de lengte van een voldragen menschelijke vrucht 17 à 18 cm. wat volgens RETZIUS overeen zou komen met het einde van de 4[de] maand.

Wanneer de lengteverhoudingen der aap-embryo's onderling, als gelijk worden aangenomen met die welke onderling bestaan tusschen de menschelijke vruchten, dan zou bij gelijke ontwikkeling, de eerste aanduiding van het ontstaan der fissura sylvii, ook bij den mensch eerst op het einde der 4[de] maand gevonden moeten worden.

Nu zijn de opgaven van ECKER en RETZIUS vrij gelijkluidend en geven zij de derde maand aan als de periode waar in de eerste aanduiding dezer groeve bij den mensch wordt aangetroffen. Dit

[1]) De lengte van de aap-embryo's werd genomen van het midden van het hoofd tot den staartwortel. De lengte van de menschelijke foeti berekent men tot de voeten. Dit verschil doet tot bovenstaande berekening niet af, aangezien de verhoudingen beperkt blijven tot de apen onderling en eveneens onderling onder de menschelijke vruchten.

zou dus een maand vroeger zijn, dan de overeenkomstige periode bij semnopithecus.

De conclusies waartoe ik vermeen te mogen komen, zijn dus de volgende:

1°. De fissura sylvii ontstaat bij semnopithecus op de laterale *oppervlakte*, en ontwikkelt zich verder naar den lateralen rand toe, wat bij den mensch net omgekeerd is.

2°. Het eerste wat men van deze fossa ziet, is een groeve, waaraan zich later, aan den voorkant, een tweede toevoegt, welke dan beide het insula gebied, temporaal en frontaal begrenzen.

3°. De eerste aanduiding van het ontstaan der groeve, vindt men, de berekening bij menschelijke vruchten volgend, eerst een maand later.

4°. De totale operculiseering van de insula wordt bij semnopithecus, de tijdrekening van den mensch volgend, in het begin der 6de maand gevonden.

Scheikunde. — De Heer Ernst Cohen biedt eene mededeeling aan van de Heeren J. Olie Jr. en A. J. Bijl over: „*Röntgenonderzoek van allotrope vormen.*" (Voorloopige mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer P. v. Romburgh).

In de „Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen"[1]) hebben Debye en Scherrer onderzoekingen gepubliceerd over „Interferenzen an regellos orientierten Teilchen in Röntgenlicht". Op grond van theoretische overwegingen was Debye[2]) n.l. tot de conclusie gekomen, dat de secundaire Röntgenstraling, die door een lichaam wordt uitgezonden wanneer een bundel Röntgenstralen dit lichaam treft, niet in alle richtingen even sterk zal zijn. De rangschikking der electronen in het atoom moet tengevolge hebben, dat in bepaalde richtingen die straling een maximale intensiteit zal bezitten. Ook wanneer de atomen niet geordend zijn, zal als resultante van alle secundaire straling een bepaalde verdeeling van de straling in de ruimte in maxima en minima van intensiteit ontstaan.

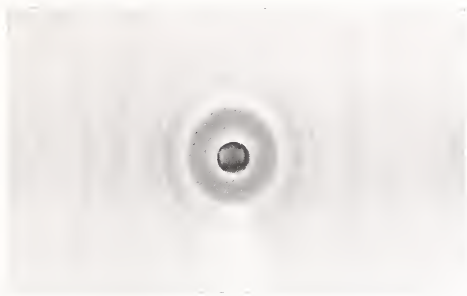
Debye verwachtte en verkreeg inderdaad bij zijn onderzoek met Scherrer resultaten, die duidelijk het bestaan van een dergelijke stralingsverdeeling (interferentie) bewezen. Maar naast het verwachte

1) Mathem-physikal. Klasse 1916 Heft 1, zie ook Phys. Zeitschr. **17**, 277 (1916).

2) Nachr. der K. Ges. der Wissensch. in Göttingen math.-physikal Klasse 1915.

J. OLIE Jr. en A. J. BIJL. „Röntgen-onderzoek van allotrope vormen." (Voorloopige mededeeling).

Graphiet.



Diamant.



verschijnsel deed zich in verschillende gevallen, n.l. daar, waar bij het onderzoek kristallijne stoffen betrokken waren geweest, een veel sprekender verschijnsel voor. Behalve n.l. de diffuse maxima en minima, die op de photo's als onscherpe vlekken verschenen, deden zich ook vrij scherpe lijnen voor, die meer aan een spectrum herinnerden. Debye en Scherrer toonden aan, dat dit verschijnsel niet verklaard moest worden uit de interferentie van de Röntgenstralen in het electronen-complex van het atoom, maar op analoge wijze uit de interferentie van die stralen bij het treffen op de kristallijne structuren in de macroscopisch ongeordende massa [1]) aanwezig. Dit in tegenstelling tot de algemeen geldende opvatting, dat Röntgen-interferentiebeelden slechts met groote, goed gevormde kristallen verkregen zouden kunnen worden. Uit de theoretische overwegingen zoowel als uit de experimenten blijkt, dat de maxima van stralingsintensiteit kegelvormige oppervlakken moeten vormen, waarvan de top in de secundaire stralingsbron moet liggen. De tophoeken van deze kegeloppervlakken kunnen allerlei waarden aannemen en de richting van de secundaire straling kan ook tegengesteld zijn aan die van den primairen bundel. Wordt een dun staafje, uit een of ander kristalpoeder geperst, loodrecht op de asrichting bestraald, terwijl het door een photographische film omgeven is, die cylindrisch is opgesteld zoodanig, dat de as van het staafje [2]) en die van den cylinder samenvallen en alleen een opening in de film blijft voor het doorlaten van den primairen stralenbundel, dan zal het photografische beeld een doorsnede van den cylinder met de verschillende kegeloppervlakken van maxima stralingsintensiteit weergeven.

De tophoeken der kegels en dus ook de onderlinge afstanden van de lijnen op de film, zijn afhankelijk van den kristalvorm der bestraalde stof en van den aard (golflengte) van de (homogene) primaire straling. Eenzelfde stof geeft bij bestraling met homogeen Röntgenlicht van kleine golflengte een andere interferentie-figuur dan bij bestraling met Röntgenlicht van grootere golflengte, d. w. z. bij grootere golflengte staan de lijnen minder dicht opeen.

Debye en Scherrer konden nu, wanneer de golflengte van het primaire homogene Röntgenlicht bekend was, uit de interferentiefiguur, verkregen door bestraling van een staafje uit kristalpoeder of quasi amorphe stof, den kristalvorm van die stof afleiden.

Naast de vele interessante zuiver physische quaesties waartoe deze

[1]) Fijn kristalpoeder of quasi amorphe stof.

[2]) De vorm is feitelijk niet van groot belang.

buitengewoon belangrijke ontdekking voert, doet zich, uit chemisch oogpunt beschouwd, wel in de eerste plaats de vraag voor: hoe zullen allotrope modificaties van eenzelfde stof zich bij bestraling met homogene X-stralen van dezelfde golflengte gedragen en zal het mogelijk zijn in eenzelfde stof naast elkaar voorkomende modificaties langs zuiver physischen weg aan te toonen?

We denken hier aan de dynamische allotropieën in het bijzonder.

Wij deelden Prof. DEBYE deze vragen, die wij ons dadelijk na het lezen van zijne publicatie gesteld hadden, mede en nu bleek, dat Prof. DEBYE deze questie ook overdacht had, doch wegens gebrek aan geschikt materiaal geen onderzoekingen in die richting had uitgevoerd. Ook naar zijne verwachting moest onderscheiding van allotrope vormen langs dezen weg zeer goed mogelijk blijken. Met de meeste bereidwilligheid liet Prof. DEBYE het onderzoek in deze richting geheel aan ons over, waarover wij hem hier, evenals voor de waardevolle wenken, de techniek van het onderzoek betreffend, onzen besten dank betuigen.

Als welhaast meest voor de hand liggend geval, werd door ons na eenige oriënteerende onderzoekingen, de allotropie van de koolstof Röntgenographisch onderzocht. Op de bijgaande foto's zijn weergegeven de interferentie-figuren verkregen door bestraling met Cu-stralen[1]) van een staafje geperst uit graphiet[2]) en van een staafje uit diamantpoeder[3]).

Ten duidelijkste blijkt alreeds qualitatief, hoe uiteenloopend de interferentie-figuren van deze beide allotrope vormen zijn, overeenkomstig de zeer verschillende kristalstelsels — diamant is regulair, graphiet monoklien — waarin deze voorkomen.

Wij verwachten dan ook, dat deze methode opheldering zal kunnen verschaffen in tal van gevallen waarin het twijfelachtig is of inderdaad allotropie bestaat of waar twee chemisch niet te scheiden vormen naast elkaar voorkomen. Ook in die gevallen waarin het niet zeker is of we met den amorphen dan wel met den kristallijnen toestand te doen hebben zal, zooals DEBYE zelf opmerkt, het Röntgenonderzoek opheldering kunnen verschaffen.

Nog moge de aandacht gevestigd worden op de mogelijkheid een qualitatieve Röntgenanalyse te verrichten van bijv. een mengsel of alliage zonder eenige opoffering van materiaal.

Omtrent de details van dit onderzoek en de verdere resultaten hopen wij elders mededeeling te doen.

Utrecht, 25 Jan. 1917. VAN 'T HOFF-*Laboratorium*.

[1]) Voor de αCu-lijn $\lambda = 1.549 \times 10^{-8}$.

[2]) Afkomstig van MOISSAN en bereid uit zuivere C in het electrisch fornuis.

[3]) Gemiddelde diameter der deeltjes 2 à 3μ.

Crystallographie. — De Heer MOLENGRAAFF biedt, namens den Heer A. L. W. E. VAN DER VEEN, een mededeeling aan over: „*Röntgenographie der kristallen*".

(Mede aangeboden door den Heer K. MARTIN).

Evenals de crystallographie thans zeer veel meer omvat dan het kristalbeschrijven, zoo is de Röntgenographie al spoedig uit het gebied der waarheid doorgedrongen in dat der hypothese, naar uit het volgende duidelijk zal worden:

LAUE [1]) vond dat een fijne cylindrische bundel Röntgenstralen door een kristal een verandering ondergaat, die afhankelijk is van de symmetrie van het kristal in de richting van de Röntgenstralen. Een lichtgevoelige plaat achter het kristal loodrecht op den primairen bundel gesteld, werd na vrij lange expositie ontleed op een aantal punten, die gerangschikt waren in overeenstemming met de symmetrie van het kristal. Aldus aangewend, is deze methode vergelijkbaar met de etsmethode, die reeds zoo lang is toegepast tot het analyseeren van kristallen.

Zonder verdere hypothesen is de Röntgenographie niet in staat ons meer te leeren en staat de methode, wat haar differentieerend vermogen betreft, in zeker opzicht achter bij de etsmethode, daar zij de 32 symmetrieklassen samenvat in een geringer aantal groepen, wier kristallen gelijk-symmetrische Röntgenogrammen geven. Deze gelijk-symmetrische beelden verschillen echter dermate wat de verdeeling der meest duidelijke stippen betreft, dat elk Röntgenogram typeerend voor de betreffende verbinding mag heeten en, naar ik hoop, binnen afzienbaren tijd als een snel reagens mag worden aangemerkt.

De formules, die LAUE, uitgaande van zijn interferentiehypothese en steunend op de hypothese der eenparige voortplanting van Röntgengolven binnen kristallen, opstelde, geven een vrij goede verklaring van de intensiteit der photographische vlekken en duiden op een materieel raster, zonder het materieel karakter van dit raster absoluut te bewijzen.

Voor het bepalen van afstanden blijkt deze methode minder nauwkeurig dan de reflectiemethode der BRAGG's [2]), die eveneens berust op een stelsel hypothesen, waarvan de eerstvolgende voorloopig al zeer aannemelijk schijnt:

1. Röntgenstralen reflecteeren tegen vlakken van een kristalraster.
2. Er heeft geen omkeeren der phase plaats. [5]) p. 22.
3. De massa van één waterstofatoom bedraagt: $1,64 \times 10^{-24}$ [5]) p. 22.

4. BRAGG's voor haliet aangegeven structuur is juist. [5]) p. 22.

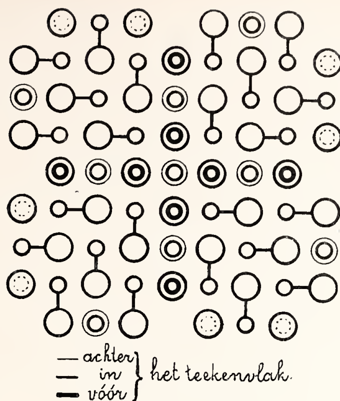
Na deze, en na verdere onderstellingen die van stof tot stof varieeren, komen de BRAGG's dan tot de keuze van een structuurmodel voor de onderzochte verbindingen en het is begrijpelijk dat de objectief daartegenoverstaande onderzoeker zich afvraagt of de diamant en de andere stoffen werkelijk zullen voldoen aan alle eischen, die wij hen stellen.

Toen de heer GROTH mij voor eenige jaren schreef, dat mijn onderzoek van diamant herhaald werd en mij later een overdruk zond [3]), waarin zijne nieuwere opvattingen groote toenadering tot de mijne vertoonen, toonde het diamantmodel der heeren BRAGG, dat tetraëdrische koolstofatomen een holoëdrisch kristal kunnen opbouwen. De waarde van deze laatste onderzoekingen vermindert, zoodra men aantoont dat ook andere samengestelde rasters de empirische resultaten even ongedwongen verklaren als het diamantmodel der Heeren BRAGG, een kwestie, die ik later hoop te beschouwen.

Ook van crystallographische zijde heeft het eenige bezwaren de structuur der kristallen dermate eenvoudig aan te nemen. Evenals lichtstralen de kristalstructuur veel te eenvoudig doen voorkomen, laat het zich aanzien, dat in de Röntgenogrammen toch veel is weggedoezeld van de détails, al is volgens de hypothese, de golflengte van een Röntgenstraal van dezelfde grootteorde als de rasterparameter. Op dit inzicht steunden ook de heeren A. SMITS en F. E. C. SCHEFFER toen zij schreven [7]) dat er in een kristalraster chemische bindingen voorkomen en daardoor chemische moleculen, een opvatting die ik niet deel. Indertijd vergeleek ik den afstand der materieele deeltjes van een vast en een gasvormig element, en schreef ik [5]) op p. 24: „Het chemisch molecuul is een embryonaal raster...". Daardoor zou tevens het meeningsverschil tusschen atomisten en molecisten opgeheven zijn.

De heeren SMITS en SCHEFFER trachtten een model te geven dat uit Na o—o Cl halters is opgebouwd en tevens een plagiëdrische symmetrie openbaart. Echter is dit model geen homogeen raster, zelfs niet in den uitgebreiden zin, door mij elders [4]) p. 177 en [6]) p. 155 genoemd, want niet alle materieele rechten daardoor gelegd, zijn periodieke puntreeksen, naar blijkt uit de bijgaande afbeelding van het vóórvlak van den door deze heeren bedoelden cubus, vervaardigd naar de regels door hen op p. 324 gegeven.

Deze stof zou dus macroscopisch niet homogeen wezen, dus zeker geen kristal zijn.



LITERATUUR.

1) LAUE, FRIEDRICH u. KNIPPING. 1913. Ann. d. Phys. **41**, p. 71.

2) W, H. BRAGG and W. L. BRAGG. 1913. „The reflection of X-rays by crystals". Proc. Royal Soc. A **88**, p 428.

3) P. VON GROTH. 1914. „Übér die theoretische und experimentelle Erforschung der Krystallstruktur". Zeitschr. f. Kryst. **54**, p. 65.

4) A. L. W. E. VAN DER VEEN. 1915. „De moleculair-structuur der kristallen". Handelingen v. h. 15e Ned. Natuur- en Geneesk. Congres, p. 176.

5) A. L. W. E. VAN DER VEEN. 1915. „Kristallographie". Openbare les gegeven als privaat-docent te Leiden.

6) A. L. W. E VAN DER VEEN. 1916, „Een kinetisch op te vatten kristalstructuur". Verh. v. h. Geol. Mijnb. Gen. v. Ned. en Kol. Geol. Ser. **3**, p. 153.

7) A. SMITS en F. E. C. SCHEFFER. 1916. De interpretatie der Röntgenogrammen van kristallen". Versl. Kon. Akad. v. W. **25**, II, p. 318.

Geologie. — De Heer MOLENGRAAFF biedt eene mededeeling aan van den Heer H. A. BROUWER: *„Over het ontbreken van werkende vulkanen tusschen Pantar en Dammer, in verband met de tektonische bewegingen in dit gebied."*

(Mede aangeboden door den Heer MARTIN.)

Het is een opvallend verschijnsel, dat op alle eilanden der Soendareeks, Sumatra-Java-Bali-Lombok-Soembawa-Flores-Lomblen-Pantar, werkende vulkanen voorkomen, terwijl ze verder oostelijk op Alor, Kambing, Wetter en Roma ontbreken, om daarna nog verder oostelijk wederom op te treden in de boogvormige reeks van vulkaaneilanden Dammer-Teon-Nila-Seroea-Manoek-Banda.

De vulkanen der Banda-zee liggen volgens VERBEEK[1]) op een afzonderlijke ellips, die door de, door hem over Wetter getrokken „strook der oudere gesteenten" wordt gescheiden van de reeks der vulkaandragende Kleine Soenda eilanden. We hebben in een mededeeling over de jongste bergvormende bewegingen in dit gebied[2]) de vulkaanboog der Banda Zee beschouwd als de, grootendeels onder zee gelegen, voortzetting van de reeks der Kleine Soenda eilanden en dan is het ontbreken van vulkanen in een bepaald gedeelte dezer reeks een bijzonder verschijnsel, dat door meer algemeene oorzaken dient te worden verklaard.

We noemen, in verband met de vulkanische verschijnselen, de volgende kenmerken der beide boogvormige eilandenreeksen in het oostelijk gedeelte van den Indischen archipel.

a. de vulkanen ontbreken geheel in den buitensten boog (eilandenreeks Timor-Tenimber eilanden-Ceram-Boeroe) en zijn beperkt tot den binnensten boog (eilandenreeks Flores-Wetter-Dammer-Banda.)

b. de werkende vulkanen ontbreken soms ook in den binnensten boog *en wel juist daar, waar de beide eilandenreeksen elkander het dichtste naderen, d.i. ten Noorden van Timor.* (vgl. fig. 1).

c. op het gedeelte van den binnensten boog, waar werkende vulkanen ontbreken, hebben vulkanische producten van thans niet meer werkende vulkanen een groote uitgebreidheid en ook in den buitensten boog (noordkust van Timor) komen ze voor.

Het eiland Lomblen bevat nog talrijke, ten deele werkzame, vulkanen; van het oostelijk gelegen eiland Pantar zijn zes zelfstandige eruptiepunten bekend, waarvan er nog slechts één (de Gg. Api) solfatarenwerkzaamheid vertoont, de Dĕlaki vertoont nog fraaien kegelvorm, maar is reeds tot den top begroeid. In het Oosten van Alor ligt een oude vulkaan, de 1655 M. hooge Piek van Alor[3]) en aan de zuidzijde ervan ligt nog een tweede, lagere top; beide vertoonen wel eenigszins den kegelvorm, maar den fraaien regelmatigen vorm hebben ze door langdurige erosie verloren. Op de nog verder oostelijk gelegen eilanden kennen we den ouden vulkaan van Poeloe Kambing ten Noorden van Timor Dilli, terwijl verder oostelijk op Lirang en Wetter diabazen, gabbro's en granieten reeds over groote oppervlakten door de erosie zijn ontbloot. Roma bestaat wederom,

---

[1]) R. D. M. VERBEEK, Molukken Verslag Jaarb. v. h. Mijnwezen 1908, Wet. Ged. Kaart N⁰. 1.

[2]) H. A. BROUWER, Over de bergvormende bewegingen in het gebied der boogvormige eilandenreeksen in het oostelijk deel van den O.-I. archipel. Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Nov. 1916.

[3]) R. D. M. VERBEEK, loc. cit. blz. 375.

voor zoover bekend, geheel uit vulkanische produkten, tuffen, breccieën, conglomeraten en vaste lava in gangen en stroomen,[1]) echter nog zonder werkzame eruptiepunten, welke verder oostelijk weer, het eerst op Dammer, bekend zijn.

Het schijnt dus, dat vanaf Wetter — d.i. dáár, waar de beide boogvormige eilandenreeksen in den oostelijken Indischen archipel elkander het dichtste naderen — zoowel westwaarts als oostwaarts de vulkanen steeds later hebben opgehouden te werken. We zullen hieronder nader terugkomen op het *verband tusschen het divergeeren der eilandenbogen en het langer voortduren der vulkanische werkzaamheid, naarmate de bogen zich verder van elkander verwijderen.*

d. Waar geen werkende vulkanen voorkomen, hebben opgeheven rifkalken in het beschouwde gebied een groote uitgebreidheid. Op het eiland Pantar worden de oudere vulkanen alle tot op zekere hoogte (bekend zijn ze op dit eiland tot 400 M.) boven zee door rifkalk bedekt, alleen de jonge vulkanen Dĕlaki en Iljasi awieng, met het nog werkzame eruptiepunt Gg Api hebben op hun voet geen kalk [2]). Op Alor schijnen de opgeheven rifkalken hoogten van 700 M. boven zee te bereiken, ze bedekken ook de producten van den nog eenigszins kegelvorm vertoonenden Piek van Alor. Op het verder oostelijk gelegen, ongeveer 1000 M. hooge vulkanische eiland Kambing worden de vulkanische producten tot groote hoogten (± 700 M.) door terrasvormigen rifkalk bedekt [3]). Omtrent de verbreiding der opgeheven rifkalken op Wetter en Roma is nog weinig met zekerheid bekend, langs de kusten komen ze op Wetter tot 80 à 100 M. boven zee voor, terwijl ze op Roma op belangrijke hoogten bekend zijn [4]). Voor zoover echter de eilanden ten Westen van Wetter betreft, bevestigt ook de verbreiding van opgeheven rifkalken onze aanname, dat de vulkanische werkzaamheid westwaarts steeds langer heeft voortgeduurd.

e. Of behalve in de richting der eilandenreeksen ook loodrecht daarop een verplaatsing der vulkanische werkzaamheid heeft plaats gehad, kan niet met voldoende zekerheid worden beoordeeld.

Men zou kunnen meenen, dat ze zich binnenwaarts heeft verplaatst, omdat de vulkanen thans slechts in den binnensten boog voorkomen, maar het tegenwoordige relief is door de jongste bodembewegingen ontstaan en het gebied ten Noorden der eilandenreeksen in fig. 1 wordt thans door zee bedekt. Het is mogelijk, dat de vulkanische

---

1) Id. blz. 435.

2) Id. blz. 15.

3) Id. blz 376.

4) Id. blz. 435.

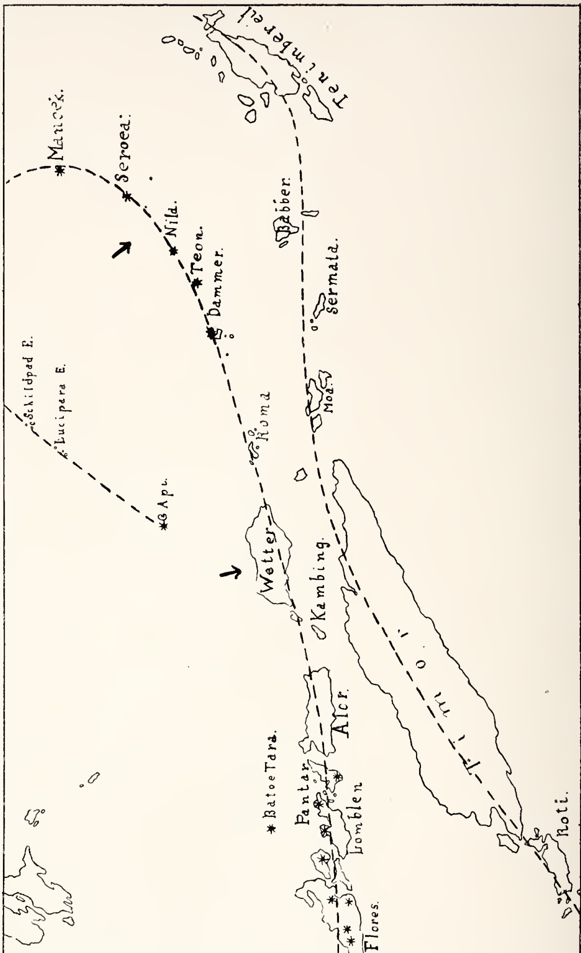


Fig. 1. Bergvormende bewegingen en vulkanische werkzaamheid in het zuid-oostelijk gedeelte van den O.-I. archipel.

— — — — — het verloop der antiklinale welvingen.

* centra der jongste vulkanische werkzaamheid.

werkzaamheid in tertiairen tijd over een breedere zone heeft plaats gehad, terwijl de werkzaamheid thans, bovendien met onderbrekingen, beperkt is tot een smaller gedeelte dezer zone, dat de binnenste eilandenboog omvat.

Na het vermelden dezer kenmerken zullen we in de eerste plaats bespreken het ontstaan en den vorm der beide boogvormige eilandenreeksen.

Ontstaan der eilandenreeksen.

We hebben reeds vroeger uiteengezet [1]), dat de oprijzing der eilandenreeksen, begrensd door diepe zeebekkens, als een gevolg van het hernieuwde optreden van krachtige bergvormende bewegingen wordt beschouwd en dat deze bergvormende bewegingen, evenals de tertiaire, zich uiten door een neiging tot bewegingen in de richting van het voorland. De druk heeft afwisselend sterker en zwakker gewerkt, terwijl ook in verschillende gedeelten van eenzelfde eilandenboog de intensiteit in een bepaalde periode niet overal even groot is geweest, zoodat sterker en zwakker rijzende (en ook plaatselijk dalende) gedeelten kunnen voorkomen. Om ons tot het thans meer in het bijzonder beschouwde gebied te beperken, zoo is b.v. op het eiland Timor gebleken, dat op een periode van krachtige bergvormende bewegingen, die tot in het mioceen heeft voortgeduurd, een periode van langdurige denudatie der boven zee verheven landmassa's is gevolgd. Een groot deel van het eiland is daarna weer door zee bedekt geweest en een plioceene formatie, waarvan de oudste afzettingen bestaan uit zuiveren globigerinenkalksteen zonder terrigene bestanddeelen, rust discordant op de oudere formaties, zooals door Molengraaff [2]) [3]) uitvoerig is uiteengezet. In plio-pleistoceenen tijd was een groot deel van Timor nog bedekt door een zee vol koraaleilanden en riffen, waaruit de hoogere bergen als eilanden omhoog staken, op een soortgelijke wijze als we dit thans b.v. nog waarnemen verder oostelijk in den Timor boog, oostelijk van Moa. Sindsdien had een opheffing boven zee plaats, die waarschijnlijk nog steeds voortduurt. De sporen dezer opheffingen vinden we op alle eilanden in het beschouwde gebied verbreid.

---

[1]) H. A. Brouwer, loc. cit.

[2]) G. A. F. Molengraaff, Folded mountain chains, overthrust sheets and block-faulted mountains in the East Indian archipelago. C. R. XIIe congr. géol. intern. Toronto. 1913, blz. 693.

[3]) Id. De jongste bodembewegingen op het eiland Timor en hunne beteekenis voor de geologische geschiedenis van den O. I. archipel. Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. 29 Juni 1912.

Het bovenstaande wijst op een verflauwen van den tangentieelen druk na de mioceene bergvormende bewegingen en op een hernieuwde versterking van dien druk in het plio-pleistoceen, voortdurend tot in de hedendaagsche periode.

Vorm der eilandenreeksen.

Voor een vollediger overzicht verwijzen we naar de kaart, gevoegd bij onze mededeeling over de bergvormende bewegingen in het besproken gebied[1]); uit fig. 1 blijkt echter reeds voldoende, dat de buitenste boog in het gedeelte Rotti—Timor—Babber zijne concave zijde naar het Australische continent heeft toegekeerd, terwijl de binnenste boog naar die zijde convex is. Verder vertoont de buitenste boog buitenwaartsche ombuigingen bij de Tenimber-eilanden en bij de Kei-eilanden, juist daar waar in het voorland (Australische continent met Sahoel bank en Arafoera zee) verdiepingen voorkomen. De binnenste eilandenreeks vertoont deze ombuigingen niet en heeft een regelmatig boogvormig verloop.

Indien we de beide boogvormige eilandenreeksen van den oostelijken Indischen archipel met elkander vergelijken, *dan heeft dus de buitenste boog zich veel vollediger aan de vormen van het voorland aangepast, dan de binnenste boog.*

In de bovengenoemde mededeeling hebben we de buitenwaartsche ombuigingen van den buitensten boog bij de Kei- en Tenimber-eilanden reeds vergeleken met het vooruitdringen der Penninische dekbladen der Alpen in de lagere gedeelten van het hercynische gebergte, waartegen ze werden opgeperst. De sterke bergvormende bewegingen in mioceenen tijd hebben zich op de Kei eilanden slechts zwak geuit, het eoceen is op Groot-Kei niet zeer sterk en het mioceen reeds niet meer geplooid[2]), terwijl verder westelijk de lagen reeds sterker schijnen te zijn geplooid, want op een nieuw eiland bij Oet (Klein Kei-groep) werden verbogen, ongeveer vertikaal staande, lagen van waarschijnlijk eoceenenmergel, kalksteen aangetroffen. Dit wijst er op, dat de voortzetting van het intensief geplooide en overschoven ketengebergte der Timor eilandenreeks in de richting van Ceram de sterke ombuiging ter hoogte van de Kei eilanden nog niet heeft vertoond. Het naderde dan daar meer tot den vorm van den tegenwoordigen binnensten boog met de jonge werkende vulkanen.

De kenmerken der thans optredende reeksen van rijzende eilanden en der tusschenliggende zeebekkens wijzen op een herleving der bergvormende bewegingen, welke in het mioceen de mesozoische en

[1]) H. A. Brouwer, loc. cit. fig. 1.

[2]) R. D. M. Verbeek. loc. cit. blz. 501.

ondere tertiaire sedimenten sterk in de richting van het voorland hebben bewogen. Ze zijn niet in strijd met de aanname, dat deze bewegingen weer plaats hebben in de richting van het voorland en bij voortduren dezer bewegingen zal de rijzing der eilandenreeksen gepaard gaan met een verdere verplaatsing in die richting, zooals sinds de mioceene bewegingen b.v. ter plaatse der Kei eilanden heeft plaats gehad. De zeebekkens zullen zich dan versmallen en het beginstadium der toekomstige liggende plooien vertoont zich aan de oppervlakte als antiklinale en synklinale golvingen, die in de richting van het voorland worden verplaatst.

Verband tusschen het vulkanisme en de bergvormende bewegingen.

Het verband tusschen eruptieve werkzaamheid en belangrijke bewegingen der aardkorst, zoowel wat betreft tijd als plaats dezer verschijnselen, is van algemeene bekendheid; slechts de wijzen, waarop de oorzaak van beide wordt verklaard, loopen uiteen. Vulkanische uitbarstingen vormen een speciaal onderdeel der eruptieve verschijnselen, waarvoor doordringing van de aardschors door het magma een vereischte is.

Bij plooiende bewegingen zullen, ter herstelling van het evenwicht, de verplaatsingen in de vaste aardschors met bewegingen van het vloeibare magma gepaard gaan.

Door ons wordt voor de jongste bodembewegingen in het beschouwde gebied der boogvormige eilandenreeksen in de Molukken aangenomen, dat deze in verband staan met plooiing op grootere diepte. Indien de tangentieele druk zich uit door de vorming van rechte plooien; dan zal het onder alzijdigen druk staande vloeibare magma door de korst met ongelijkmatige spanningsverdeeling in de eerste plaats een uitweg kunnen, doch niet behoeven te vinden bij de antiklinale ombuigingen, waar rekking optreedt, en werkende vulkanen zullen dan op den rug der gebergten (hier eilandenreeksen) kunnen voorkomen. Hetzelfde geldt ook voor scheeve plooien, zoolang het verband der lagen niet wordt verbroken; het is echter duidelijk, dat door verschillende redenen tijdens het plooiingsproces de vrije beweging van het vulkanische magma kan worden tegengegaan, zoo b.v. bij de vorming van waaierplooien, waar een magmareservoir kan worden afgesnoerd.

Bij verbreking van het verband der lagen worden de verhoudingen anders, de rekspanningen in de antiklinale en synklinale ombuigingen worden opgelost of verminderd en de toevoerkanalen van het vulkanische magma naar de oppervlakte, die door de rekspanningen worden in stand gehouden, zullen geleidelijk kunnen worden afgesloten.

Bij het ontstaan der plooibreuken zullen opschuivingen en bij bewegingen over grooten afstand overschuivingsbladen worden gevormd, waarbij lagen, die vroeger naast elkaar lagen, thans op elkaar komen te liggen; de aardkorst zal ter plaatse in dikte toenemen, een reden te meer, waarom de toevoer van het vulkanische magma zal kunnen worden afgesloten. Langs de op- of overschuivingsvlakken wordt een nieuwe weg geopend, waarlangs het magma de oppervlakte zal kunnen bereiken; in het algemeen zal dan het magma, indien het de oppervlakte bereikt, op een lager niveau en dus in het door ons beschouwde gebied onderzees langs den buitenrand der eilandenreeksen te voorschijn kunnen treden en bij de bewegingen in de richting van het voorland zullen de vulkanische producten weer geleidelijk door overschoven massa's worden bedekt.

Het kan voorkomen, dat de verbreking der lagen reeds dadelijk optreedt, zonder dat de lagen eerst worden gebogen, waarbij de zgn. op- en onderschuivingen worden gevormd. Het is duidelijk, dat hierbij het stadium, waarin het magma een uitweg kan vinden op den rug der plooiingsbogen, niet optreedt; de verstoringen van het evenwicht door verplaatsingen in den aardschors gaan hier reeds dadelijk met toename in dikte van de schors ter plaatse der bergvormende bewegingen gepaard. Uit de bovenstaande uiteenzettingen blijkt reeds voldoende, dat het magma tijdens plooiende bewegingen de oppervlakte kan bereiken, doch dat de plaats waar en de tijd, waarop de vulkanische werkzaamheid tijdens het plooiingsproces zal optreden van het karakter der plooiende bewegingen afhankelijk mag worden gesteld.

Ook zonder de hulp van bergvormende bewegingen kan het magma de oppervlakte bereiken. Door assimilatie van het nevengesteente of door „magmatic stoping" [1]) kan het magma zich in de omhullende vaste gesteenten omhoogwerken en ten slotte de oppervlakte bereiken, zooals door Daly [2]) b.v. voor het rhyolietplateau van het Yellowstone National Park, door Ussing [3]) voor Groenlandsche intrusies en door mijzelve [4]) voor de intrusie van den Pilandsberg in Transvaal wordt aangenomen. Deze mogelijkheid van vulkanische werkzaamheid zal op den voorgrond treden in rustperioden der bergvormende bewe-

[1]) R. A. Daly, Igneous rocks and their origin 1914. blz. 194.

[2]) Id. blz. 122.

[3]) N. V. Ussing, Geology of the country around Julianehaab, Greenland. Meddelelser om Gronland. Vol. XXXVIII, en Mus. de Min. et de Géol. de l'Université de Copenhague. Comm. Géol. No. 2. 1911.

[4]) H. A. Brouwer, Over het ontstaan der primaire parallelstructuur in lujaurieten. Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam. 8 Nov. 1912.

gingen en het bereiken der oppervlakte zal in het algemeen slechts daar mogelijk zijn, waar het magma door een betrekkelijk dunne korst wordt bedekt, omdat het anders reeds voordien te veel zal zijn afgekoeld of gestold en zijn bewegelijkheid zal hebben verloren. Op deze wijze zal men dus geen effusie moeten verwachten, waar de bergvormende bewegingen eene verdikking van de schors hebben doen ontstaan, dit wordt na overschnivingsbewegingen eerder mogelijk buiten de antiklinale-golvingen, voornamelijk aan de binnenzijde daarvan.

Indien we deze beschouwingen toepassen op de jongste bergvormende bewegingen en vulkanische werkzaamheid in het door ons beschouwde gebied, zoo blijkt, dat tijdens deze jongste bergvormende bewegingen in de buitenste eilandenreeks het magma de oppervlakte op den rug der antiklinale welvingen niet heeft bereikt. De tangentieele druk kan zich echter ook daar — althans in den aanvang — zeer goed hebben geuit door plooiing zonder verbreking van het verband der lagen. Hetzelfde geldt van het dicht bij de buitenste eilandenreeks gelegen eiland Wetter, voor zoover hieromtrent uit de thans bekende geologische gegevens kan worden geoordeeld.

De vulkanische gesteenten, die aan de binnenzijde dezer boog o.a. in Noord Nederlandsch-Timor en op Ambon voorkomen,[1]) zijn ouder dan deze bergvormende bewegingen en staan misschien in verband met de oudere plooiingen, die in mioceenen tijd hun maximum bereikten. In de binnenste eilandenreeks hebben oudere, maar tevens ook jong-vulkanische gesteenten een groote uitgebreidheid. De vulkanische werkzaamheid duurt tot in de hedendaagsche periode voort, maar schijnt, gelijk met het herleven der bergvormende bewegingen, misschien oorspronkelijk te zijn versterkt, maar daarna geleidelijk uit te dooven. Deze uitdooving heeft later plaats gehad, naarmate deze eilandenreeks zich verder van de buitenste en van het voorland verwijdert.

De aanname schijnt gewettigd, dat de plooiende bewegingen eerst in de, het dichtst bij het voorland gelegen, gedeelten het bovengenoemde karakter hebben verkregen, waardoor de verbinding van het magma met de oppervlakte wordt verbroken. We wijzen op de boven vermelde vollediger aanpassing der buitenste eilandenboog aan de vormen van het voorland. Hetzelfde zal dan geleidelijk het geval zijn op de oostelijk en westelijk van Wetter gelegen eilanden

[1]) Id. Geologische verkenningen in de oostelijke Molukken. Feestbundel Prof. Dr. G. A. F. Molengraaff. Verh. Geol. Mijnb. Gen. 1916. blz. 38.

der binnenste eilandenreeks, indien de plooiende krachten en de daarmee gepaard gaande beweging in de richting van het voorland voortduren. In de binnenste eilandenboog der Molukken zien we dan een voorbeeld van *uitdooving van vulkanische werkzaamheid op den rug der antiklinale welving tijdens hèrleving van bergvormende bewegingen.*

Geologie. — De Heer MOLENGRAAFF biedt eene mededeeling aan van den Heer H. A. BROUWER: „*Over den ouderdom der eruptiefgesteenten in de Molukken.*"

(Mede aangeboden door den Heer MARTIN.)

In het jongste geologische overzicht der Molukken van VERBEEK [1]) vinden we de verschillende eruptiefgesteenten in de volgende zes groepen ondergebracht:

1. *oude basische eruptiefgesteenten* van grootendeels prae-permischen ouderdom (azoïsch en palaeozoisch). Niet onmogelijk wordt het geacht, dat een gedeelte mesozoisch is. Petrografisch kunnen worden onderscheiden: peridotiet, serpentijn, gabbro, diabaas, diabaasporfieriet, met bijbehoorende tuffen, brecciën en schaalsteenen, dioriet en diorietporfieriet, de laatste twee zeer ondergeschikt, enz.

2. *granietgesteenten* waarschijnlijk alle ouder dan permisch.

3. *oud-meso-vulkanische eruptiefgesteenten.* Oudere melafieren, kwartsporfieren en kwartsporfierieten, waarschijnlijk ook enkele diabazen en diabaasporfierieten. Er wordt door VERBEEK op gewezen, dat het strenge bewijs voor de ouderdomsbepaling der tot deze groep gebrachte gesteenten nog niet kan worden gegeven; ook is het volgens hem mogelijk, dat een gedeelte nog tot de permformatie behoort.

4. *jong-meso-vulkanische eruptiefgesteenten* (*cretaceisch?*). andesieten, dacieten en zure bronziethoudende melafieren. Een gedeelte behoort misschien tot de oud-meso-vulkanische eruptiefgesteenten, een ander gedeelte is wellicht reeds oud-tertiair.

5. *tertiaire eruptiefgesteenten,* waarvan de ouderdom nergens tot in het eoceen schijnt op te klimmen, daar de nummulietenkalksteenen geheel vrij zijn van gruis van andesieten, hetwelk in de mioceene sedimenten zeer veelvuldig aanwezig is.

a. leuciet- en nefeliengesteenten (oud-mioceen of jonger), beschouwd als de oudste groep, in verband met de structuur van het

[1]) R. D. M. VERBEEK. Molukken Verslag Jaarb. v. h. Mijnwezen 1908. Wetensch. Ged. blz. 737 e.v.

vulkaantje Loeroes op Java met een onderen rand van leucietbazalt en een jongeren kegel van hoornblendeandesiet.

b. oude hoornblendeandesieten en glimmerandesieten met bijbehoorende tuffen en breccïën (mioceen). Ze treden zelfstandig op, zelden vormen ze den voet of oudsten rand der groote, ten deele nog werkzame vulkanen. De laatste zijn niet te scheiden van de jongere vulkanische producten en zijn daarom daarmede vereenigd.

c. oude pyroxeenandesieten en bazalten met bijbehoorende breccïën en tuffen (mioceen). Hiervoor geldt hetzelfde als onder *b* is vermeld.

6. *jong-vulkanische producten,* hoofdzakelijk kwartair, ook plioceen en recent. Ze vormen de jonge vulkanen, die zich van den jong-tertiairen tijd door het kwartair tot in de hedendaagsche periode hebben gevormd.

We zien uit het bovenstaande overzicht, dat van vele eruptiefgesteenten, die bij een bepaalde groep zijn ondergebracht, de ouderdom onzeker is. Door de onderzoekingen der laatste jaren zijn talrijke nieuwe gegevens bekend geworden, die een hernieuwde bespreking van den ouderdom der verschillende eruptiefgesteenten wenschelijk maken, hetgeen in de volgende bladzijden zal geschieden.

Ad. 1.

Het wordt door Verbeek niet onmogelijk geacht, dat een deel dezer gesteenten mesozoïsch is, maar hij kon hiervoor geen bewijzen bijbrengen. Het is volgens hem slechts op enkele punten duidelijk dat men met prae-permische gesteenten te doen heeft, zoo b.v. volgens hem op het eiland Letti, waar schaalsteen en diabaasbreccïën door permischen crinoïdenkalksteen zouden worden bedekt. Bovendien zou de peridotiet van Ambon, wegens het voorkomen van graniet-gangen, ouder dan laatstgenoemde gesteenten moeten zijn, terwijl de granieten zelve reeds ouder dan permisch zouden zijn, omdat de zandsteenformatie van Ambon, die als van permischen of in ieder geval jong-palaeozoischen ouderdom werd beschouwd, uit graniet-gruis is opgebouwd.

We kunnen naar aanleiding hiervan opmerken:

a. het motief voor een prae-permischen ouderdom op het eiland Letti vervalt, de permische kalksteenen komen hier n.l. als losse blokken voor[1]) en zijn misschien door overschuiving ter plaatse gekomen.

b. De ouderdom der zandsteenformatie van Ambon kan door de, in tusschenliggende kalkbanken aangetroffen versteeningen niet

[1]) G. A. F. Molengraaff. De geologie van het eiland Letti. Ned. Timor-Exp. I. Jaarb. v. h. Mijnwezen. 1914. Verh. Deel I blz. 28.

met zekerheid worden bepaald.[1]) De facies gelijkt echter zeer veel op die der boven-triadische flyschgesteenten van het nabijgelegen Ceram[2]) en ze wordt door ons als van gelijken onderdom beschouwd. Ook indien de zandsteenen uit het gruis der granieten zijn opgebouwd, kan hierin geen bewijs voor den prae-permischen ouderdom van granieten en peridotieten worden gevonden. Zijn dus geen bewijzen voor een prae-permischen ouderdom dezer gesteenten bekend, zoo kunnen we opmerken, dat op de eilanden van den archipel buiten de Molukken soortgelijke gesteenten, als de „oude basische eruptiefgesteenten" zeer verspreid zijn, b.v. op Celebes, Borneo en Sumatra. Op Sumatra is voor vele dezer gesteenten slechts een prae-eoceene ouderdom bewezen, op Borneo behooren verschillende tot het krijt, hetgeen reeds door VERBEEK wordt opgemerkt.

In den, aan het gebied der Molukken grenzenden, oostarm van Celebes beschrijft HOTZ[3]) peridotieten en vulkanische breccies concordant tusschen de onderste neogene molasselagen en niet ver daar vandaan beschrijft WANNER[4]) tusschen de mergelbanken der Celebesmolasse platen van amfibooldioriet. In de omstreken van het Toekalagebergte komen peridotieten en vulkanische breccies concordant voor in de ten deele tertiaire, ten deele misschien mesozoïsche „Boeroeformatie", terwijl dunne laagvormige partijen van kalkige gesteenten met hoornsteen omgekeerd ook in de basische eruptiefgesteenten voorkomen. Verder kan worden vermeld:

a. dat op Timor in de permische en triadische sedimentserie basische intrusief- en effusiefgesteenten en hunne tuffen een groote uitgebreidheid hebben[5])[6]).

b. dat in het kloofdal der Nimassi (Midden-Timor) intrusiefplaten van diabaas met duidelijke contactverschijnselen voorkomen in boventriadischen kalksteen, zooals tijdens Prof. MOLENGRAAFF's Timor Expeditie werd aangetoond.

[1]) K. MARTIN in Tijdschr. Kon. Ned. Aardr. Gen. XVI 1899 blz. 656.

G. BOEHM. Ueber Brachiopoden aus einem älteren Kalkstein der Insel Ambon. Jaarb. v. h. Mijnwezen 1905. Wet. Ged. blz. 88 e.v.

[2]) H. A. BROUWER. Geologische Verkenningen in de oostelijke Molukken. Feestbundel Prof. G. A. F. MOLENGRAAFF. Verh. Geol. Mijnb. Gen. Geol. Serie III 1915 blz. 36.

[3]) W. HOTZ. Vorläufige Mitteilung über geologische Beobachtungen in Ost-Celebes. Zeitschr. der Deutsch. Geol. Ges. 1913. Monatsber. n⁰. 6 blz. 329.

[4]) J. WANNER. Beiträge zur Geologie des Ostarms der Insel Celebes. Neues Jahrb. f. Min etc. Beil. Bd. XXIX. 1910 blz 765.

[5]) J. WANNER. Geologie von West-Timor. Geol. Rundsch. IV 1913 blz 145.

[6]) G. A. F. MOLENGRAAFF. Folded Mountain chains, overthrust sheets and block-faulted mountains in the East Indian Archipelago. Compte Rendu du XIIme Congr. Geol. Intern. Toronto 1913 blz. 689 e.v.

c. dat langs de noordkust van Nederlandsch-Timor te zamen met basische en zuurdere effusiefgesteenten ook veel serpentijn en serpentijnconglomeraat voorkomt, waarvan de tertiaire (of jong-mesozoïsche) ouderdom reeds elders door mij waarschijnlijk is gemaakt [1]).

d. dat in het noordwestelijk deel van het eiland Groot-Obi andesiet van jongen habitus concordant door serpentijn wordt bedekt [2]).

e. dat op het eiland Letti, gedeeltelijk sterk gemetamorfoseerde, basische stollingsgesteenten voorkomen van permischen en waarschijnlijk ook van jongeren ouderdom [3]).

Uit het bovenstaande kan met voldoende zekerheid worden afgeleid, *dat onder de z.gn. oude basische eruptiefgesteenten der Molukken, gesteenten van jong-palaeozoïschen, mesozoïschen en tertiairen ouderdom voorkomen*, terwijl omtrent het voorkomen van oudere dan permische gesteenten niets met zekerheid bekend is.

ad. 2.

De granietgesteenten der Molukken zouden waarschijnlijk alle ouder dan permisch zijn, omdat, althans op Ambon, een jong-palaeozoische zandsteenformatie uit granietgruis is opgebouwd. We hebben reeds hierboven vermeld, dat voor de zandsteenformatie veeleer een boven-triadische ouderdom mag worden aangenomen, zoodat het motief voor den prae-permischen ouderdom der granieten van Ambon vervalt.

We hebben reeds elders medegedeeld [4]), dat op de eilanden van den archipel buiten de Molukken het voorkomen van mesozoische granieten door de onderzoekingen van MOLENGRAAFF, SCRIVENOR (voor Malakka), TOBLER, VOLZ en mijzelven is bewezen of waarschijnlijk gemaakt. Voor Celebes kunnen hieraan thans nog de onderzoekingen van VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT [5]) en ABENDANON [6]) worden toegevoegd, waaruit zelfs het voorkomen van tertiaire granietische tot dioritische gesteenten op dit eiland mag worden afgeleid. Voor de Molukken kan op het volgende worden gewezen:

a. Dat granietische tot diorietische en gabbroachtige tot perido-

[1]) H. A. BROUWER loc. cit. blz. 38.

[2]) Id. blz. 45.

[3]) G. A. F. MOLENGRAAFF. De Geologie van het eiland Letti loc. cit. blz. 22 e.v.

[4]) H. A. BROUWER. Over den post-carbonischen ouderdom van granieten der Padangsche Bovenlanden. Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam XXIII 1915 blz. 1182 e.v.

[5]) W. A. J. M VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT. Voorloopige mededeeling in zake de Geologie van Centraal-Celebes. Tijdschr. Kon. Ned. Aardr. Gen. XXXII 1915 blz. 118 e.v. en Jaarb. v. h. Mijnwezen 1914 Dl II.

[6]) E. C. ABENDANON. Geologische en Geographische doorkruisingen van Midden-Celebes. Deel I. Leiden 1915, blz. 58.

tietische gesteenten soms in innig verband met elkander worden aangetroffen. Ook daar waar granietgangen in peridotieten voorkomen kunnen de eerstgenoemde gesteenten op sommige plaatsen slechts weinig jonger dan de laatstgenoemde zijn en b.v. door differentiatie uit hetzelfde moedermagma zijn ontstaan.

b. Op de Soela-eilanden wijzen de onderzoekingen van WICHMANN [1]) en mijzelve [2]) in verband met het voorkomen van contactverschijnselen in gesteenten van jurassischen habitus, op het voorkomen van post-jurassische granietische gesteenten.

Uit het bovenstaande kan wederom worden afgeleid, *dat omtrent het voorkomen van prae-permische granietische gesteenten in de Molukken nog geen zekere gegevens bekend zijn, terwijl het voorkomen van jongere; zelfs tertiaire, granieten met zekerheid kon worden aangetoond.*

ad 3.

Slechts weinig gesteenten worden door VERBEEK tot zijn groep der oud-meso-vulkanische eruptiefgesteenten gebracht. Volgens hem is het mogelijk, dat een gedeelte nog tot de permformatie behoort, terwijl er met nadruk op wordt gewezen, dat het strenge bewijs voor de ouderdomsbepaling niet kan worden gegeven.

Wat de melafieren van TIMOR betreft, zoo beschouwen we een gedeelte dezer gesteenten als van permischen ouderdom, hetgeen reeds door VERBEEK mogelijk wordt geacht [3]) en door de nog niet gepubliceerde onderzoekingen der Timor-Expeditie onder leiding van Prof. MOLENGRAAFF werd vastgesteld.

De laatstgenoemde onderzoekingen toonden ook het voorkomen van soortgelijke oud-mesozoische gesteenten aan, terwijl door ons een groot deel der zgn. „oud-meso-vulkanische eruptiefgesteenten" van veel jongeren, jong-mesozoischen of tertiairen ouderdom wordt beschouwd. Tot deze laatste gesteenten behooren o.a. de melafieren met glaskorst, kwartsporfieren en dacieten van Timor's noordkust; met de laatstgenoemde gesteenten komen ook serpentijnen, serpentijnbreccies, serpentijnconglomeraten en tuffen voor.

Naar onze meening komen dus evenals onder de zgn. „oude basische eruptiefgesteenten", ook *onder de zgn. „oud-meso-vulkanische eruptiefgesteenten" der Molukken gesteenten van jong-palaeozoischen, mesozoischen en waarschijnlijk ook tertiairen ouderdom voor.*

---

[1]) A. WICHMANN. Over gesteenten van het eiland Taliaboe. Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam. Juni 1914.

[2]) H A. BROUWER. Geologische Verkenningen enz. loc. cit. blz. 43.

[3]) R. D. M. VERBEEK. loc. cit. blz. 359.

ad 4.

De ouderdom der jong-meso-vulkanische eruptiefgesteenten van cretaceïschen? ouderdom staat volgens Verbeek ook nog niet vast; een gedeelte behoort volgens hem misschien tot zijne oud-meso-vulkanische eruptiefgesteenten, een ander gedeelte is wellicht reeds oud-tertiair. Tot deze groep worden alleen gebracht andesieten, dacieten en zure, bronziethoudende melafieren van Ambon, verder andesieten en dacieten van de nabijgelegen eilanden Haroekoe, Saparoea en Noesalaut en van West-Ceram en ten slotte hoornblendepyroxeenandesieten van Amblau en glasrijke pyroyeenandesieten van Wetter. Dat ze tot een afzonderlijke groep zijn vereenigd berust eenerzijds op hun frisschen habitus, waardoor ze zich van oudere gesteenten onderscheiden, terwijl ze anderzijds toch verschillen vertoonen met de Oost-Indische tertiaire eruptiefgesteenten.

We hebben elders uitvoerig uiteengezet [1]), dat de verschilpunten met andere tertiaire eruptiefgesteenten voor een ouderdomsbepaling niet van belang zijn. Zoo zijn de insluitsels van granaat en cordieriet, die in gesteenten van Ambon voorkomen, afkomstig uit den ondergrond, terwijl het belangrijke bronzietgehalte den ambonieten wel een eigenaardig karakter verleent, waardoor ze onder een afzonderlijken naam kunnen worden saamgevat, maar een ouderdomsverschil behoeft hieruit niet te worden afgeleid.

We hebben reeds bij de bespreking der „oud-meso-vulkanische eruptiefgesteenten" vermeld, dat een groot deel der tot deze groep gebrachte gesteenten zeer goed als van veel jongeren, jong-mesozoïschen of tertiairen ouderdom kan worden beschouwd. We bedoelden hiermede in de eerste plaats de melafieren, gedeeltelijk met glaskorst, van Ambon, Kelang, Wetter en Timor's noordkust en de kwartsporfieren en dacieten van Timor's noordkust. Waar Verbeek de melafieren van Timor ongescheiden laat en hierin juist een reden vindt, om te vermoeden dat in den oostelijken archipel melafieren van verschillenden ouderdom voorkomen en dat b.v. op Ambon de melafieren in twee groepen kunnen worden gescheiden, zoo zou ik juist de gesteenten van Ambon voorloopig ongescheiden willen laten en op Timor een oudere groep (waaronder de permische melafieren) van een jongere groep (waaronder de gesteenten met glaskorst der noordkust) willen scheiden.

De melafieren met glaskorst van Timor's noordkust vertoonen n.l. een geheel ander karakter en komen ook onder geheel andere geologische verhoudingen voor, als de permische melafierachtige

[1]) H. A. Brouwer. Geologische Verkenningen. loc. cit. blz. 36 e.v.

gesteenten van het eiland. De eerstgenoemde gesteenten zijn tot de noordkust beperkt en met andere basische en ook zuurdere gesteenten (kwartsporfieren, dacieten) tot een complex vereenigd, dat talrijke punten van overeenkomst vertoont met de gesteenten, die ons van Ambon bekend zijn. Het voorkomen der melafieren met glaskorst is b.v. een typisch kenmerk, dat de gesteenten van beide eilanden gemeen hebben. De glasrijke melafier van Java, die door VERBEEK [1]) steeds als cretaceïsch werd beschouwd, maar in verband met de gegevens van Timor nu ook voor ouder wordt gehouden, kan dan weer tot de krijtperiode worden teruggebracht en de gesteenten van Timor's noordkust, Wetter, Ambon en Zuid-West-Ceram kunnen voorloopig alle als van tertiairen of jong-mesozoïschen ouderdom worden beschouwd. We kunnen nog vermelden, dat MARTIN [2]) voor de gesteenten van Ambon een tertiairen ouderdom waarschijnlijk acht.

Vatten we het bovenstaande in het kort samen, dan is het volgende gebleken:

a. er is voorloopig geen reden om een groep der oudere melafieren van de zgn. ambonieten af te scheiden;

b. er is geen reden om de ambonieten, die enkele bijzondere kenmerken bezitten, wat hun ouderdom betreft, tot een afzonderlijke groep te brengen;

c. deze gesteenten kunnen met de glaskorstgesteenten van Timor en de daarmee voorkomende gesteenten tot een groep worden vereenigd van denzelfden tertiairen of jong-mesozoischen ouderdom, die reeds door VERBEEK [3]) voor een gedeelte dezer gesteenten werd aangenomen.

De zgn. „jong-meso-vulkanische eruptiefgesteenten" *worden dus door ons eveneens als van tertiairen of jong-mesozoischen ouderdom beschouwd,* maar het aantal der tot deze groep gebrachte gesteenten mag waarschijnlijk belangrijk worden vermeerderd.

We kunnen hier nog vermelden, dat andesietische tot bazaltische en augitietachtige gesteenten van eilanden van den Misoolarchipel door WANNER [4]) als van cretaceïschen ouderdom worden beschouwd.

---

[1]) R. D. M. VERBEEK en R. FENNEMA. Geologische Beschrijving van Java en Madoera. Amsterdam 1896.

[2]) K. MARTIN. Einige Worte über den Wawani, sowie über Spaltenbildungen und Strandverschiebungen in den Molukken. Tijdschr. Kon. Ned. Aardr. Gen. XVI 1899 blz. 709 e v.

Id. Reisen in den Molukken. Geol. Teil. Leiden 1903 Nachträge.

[3]) R. D. M. VERBEEK. Molukken Verslag loc. cit blz. 360.

[4]) J. WANNER. Beiträge zur geologischen Kenntniss der Insel Misol. Tijdschr. Kon. Ned. Aardr. Gen. XXVII 1910 blz. 494.

ad 5.

Van de groep der tertiaire eruptiefgesteenten wordt medegedeeld, dat hun ouderdom in de Molukken en op Celebes nergens tot in het eoceen schijnt op te klimmen, daar de nummulietenkalken geheel vrij zijn van gruis van andesieten, hetwelk daarentegen in de mioceene gesteenten zeer veelvuldig aanwezig is.

We zullen in het volgende het zuidelijk deel van Centraal-Celebes en Zuid-Celebes in onze beschouwingen opnemen, omdat hier door jongere onderzoekingen belangrijke gegevens omtrent den ouderdom der tertiaire eruptiefgesteenten zijn bekend geworden.

Dat de leuciet- en nefeliengesteenten niet de oudste tertiaire eruptiefgesteenten zijn, zooals door VERBEEK [1]) werd verondersteld, omdat tenminste op Java het vulkaantje Loeroes in Besoeki uit een onderen rand van leucietbazalt met een jongeren kegel van hoornblendeandesiet bestaat, blijkt o.a. uit het volgende:

a. Dicht oostelijk van den Gg Loeroes komen in den ouden kraterwal van den uit leucietgesteenten opgebouwden Gg Ringgit talrijke leucietvrije naast leucietboudende gesteenten voor [2]). Deze leucietvrije gesteenten (olivijn- en ertsrijke bazalten, olivijnarme bazalten of olivijnhoudende augietandesieten en amfiboolaugietandesieten) moeten dus ouder dan een groot deel der leucietgesteenten zijn.

b. In de dikke tuffenformatie langs de Saädangrivier (zuidelijk deel van Centraal-Celebes) kunnen volgens ABENDANON [3]) van beneden naar boven worden onderscheiden:

trachiet- en andesiettuffen,

bazalt- en leuciettefriettuffen, leucietbazalt, leucitiet en leuciettefrietbrecciën,

trachiet-, andesiet- en lipariettuffen.

Door ABENDANON [4]) wordt deze tuffenformatie als van oud-eoceenen ouderdom beschouwd, n.l. als jonger dan de oud-eoceene zandsteen- en kleisteenserie van Pasar Kira en als ouder dan de lutécienkalksteen. Dat deze formatie in haar geheel jonger is dan de zandsteen- en kleisteenserie is echter niet geheel zeker; mogelijk is, dat er ook nog prae-tertiaire gesteenten onder voorkomen. VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT [5]) vermeldt, dat de erupties in het

[1]) R. D. M. VERBEEK. Molukken Verslag loc. cit. blz. 757.

[2]) H. A. BROUWER. Ueber leucitreiche bis leucitfreie Gesteine vom Gunung Beser (Ost Java) Centralbl. f. Min. etc. 1914 blz. 1.

[3]) E. C. ABENDANON. Celebes in of uit de Tethys? Tijdschr. Kon. Ned. Aardr. Gen. 1915 blz. 358 e.v.

[4]) Id Geologische en Geographische enz. loc. cit blz. 222.

[5]) W. A J. M. VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT. loc. cit.

Westen vroeger begonnen schijnen te zijn, dan in het Oosten en dat de ouderdom der vulkanische serie, die met intrusieve gangen is doorregen, reikt van onder-, althans midden-eoceen tot waarschijnlijk aan het mioceen. De onderste banken zijn nog eoceen, daar hierin, in bindmiddel en insluitsels, naast globigerinen ook nummulieten voorkomen.

In het gebied ten Oosten van het Latimodjong gebergte, waar talrijke variëteiten van andesieten en meestal verkiezelde, andesiettuffen voorkomen, worden de oudste erupties als prae-tertiair beschouwd, terwijl de jongste voor het neogeen schijnen te zijn opgehouden. Naast erupties van andesiet komen hier ook zulke van lipariet, trachiet en daciet voor. [1])

Omtrent den ouderdom der eruptiefgesteenten van Zuid-Celebes liepen tot voor korten tijd de meeningen sterk uiteen; een overzicht der verschillende meeningen werd door von Steiger [2]) gegeven, waarnaar hier kortheidshalve wordt verwezen.

Dat ook hier in het eoceen, en misschien reeds eerder, erupties hebben plaats gehad, bewijzen b.v. het voorkomen van een verkiezelden plagioklaas-orthoklaastuf aan den vloer der kalkformatie van het kolenveld Tondong Koerah [3]) en de door Bücking [4]) beschreven andesiettuffen onder den kalksteen bij Kantisang. Het grootste deel der erupties is echter jonger, volgens een mededeeling van den ingenieur 't Hoen, die de kolenterreinen in Zuid-Celebes onderzocht. Volgens hem begonnen, waarschijnlijk kort voor de afzetting der tertiaire kalksteenen geheel ophield, uitbarstingen langs de geheele westzijde van Zuid-Celebes, waardoor het zich thans hoog verheffende westelijk gebergte werd opgebouwd; het bestaat grootendeels uit tuffen, breccïën en vulkanische conglomeraten van andesieten, bazalten en ook van leucietgesteenten. Het stuk leucitiet, dat door von Steiger [5]) als afkomstig uit een tuflaag tusschen de koollagen I en II van Bonto wordt vermeld, wordt bij nader inziens door genoemden ingenieur beschouwd als afkomstig uit een verweerd eruptiefgesteente. Waar nu in de omgeving meerdere verweerde intrusiefgesteenten voorkomen, zoo wordt ook het intrusieve karakter van het gesteente, waaruit het stuk leucitiet afkomstig

[1]) E. C. Abendanon. Geologische etc. loc. cit. blz. 59, 60.

[2]) H. von Steiger. Petrographische beschrijving van eenige gesteenten uit de onderafdeeling Pangkadjene en het landschap Tanette van het gouvernement Celebes en onderhoorigheden. Jaarb. v. h. Mijnw. 1913 blz. 171 e.v.

[3]) Id. blz. 217.

[4]) H. Bücking. Beiträge zur Geologie von Celebes. Samml. des Geol. Reichsmus. in Leiden VII. Heft 1 blz. 124.

[5]) H. von Steiger. loc. cit. blz. 124.

is, waarschijnlijk geacht, terwijl ook de door BÜCKING[1]) bij Kantisang vermelde biotietleucietbazalt, welke voorkomt onder oud-tertiairen kalksteen een laagvormige intrusie zou kunnen zijn. Dan zouden dus de bekende bewijzen voor een eoceenen ouderdom van leuciet-gesteenten in Zuid-Celebes wederom vervallen zijn.

Naar een mededeeling van Prof. IDDINGS, die dit gebied in 1913 bereisde, komen talrijke intrusiefgesteenten als gangen, intrusiefplaten en misschien als laccolieten en batholieten in de bovengenoemde vulkanische serie en ook in de tertiaire zandsteenen met koollagen en kalksteenen voor. Hij vermeldt o.a. grofkorrelige shonkinieten en essexieten. Deze zijn dus nog jonger dan de vulkanische serie, die zelf bijna geheel jonger dan de kalksteenen zou zijn. De kalksteenen van dit gebied worden, zooals bekend, ten deele van eoceenen, ten deele nog van mioceenen ouderdom beschouwd. [2])

We kunnen nog vermelden, dat in den oostarm van Celebes door HOTZ[3]) een tertiaire ouderdom (tot mioceen) voor een groot gedeelte der basische eruptiefgesteenten van dit gebied wordt aangenomen.

De ten deele nog tegenstrijdige gegevens schijnen erop te wijzen, dat de krachtige erupties in Zuid-Centraal-Celebes wel eerder kunnen zijn begonnen, dan in Zuid-Celebes, maar vooral indien de vulkanische formatie in het eerstgenoemde gebied nog tot in het mioceen zou reiken, hetgeen door VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT waarschijnlijk wordt geacht, dan zouden de erupties langen tijd gelijktijdig zijn verloopen. In elk geval moet een belangrijk deel der tertiaire eruptiefgesteenten op Celebes als van eoceenen ouderdom worden beschouwd.

In verband hiermede kunnen we er op wijzen, dat door MARTIN[4]) een gedeelte der andesietbreccies en andesiettuffen van Java (étage m_1 van VERBEEK) tot het eoceen worden teruggebracht en het is zeer goed mogelijk, dat soortgelijke gesteenten op de verder oostelijk gelegen eilanden der Kleine Soenda eilandenreeks en ook elders eveneens van oud-tertiaren ouderdom zijn.

Op het voorkomen van talrijke andere tertiaire eruptiefgesteenten in het oostelijk gedeelte van den archipel werd reeds bij de bespreking der vorige groepen gewezen. Bij de bespreking der gesteenten van

---

[1]) H BÜCKING loc. cit. blz

[2]) R. D. M. VERBEEK. Molukken Verslag loc. cit. blz. 55 e.v.

[3]) W. HOTZ. Vorläufige Mitteilung über geologische Beobachtungen in Ost-Celebes. Zeitschr. d deutsch. geol. Ges. Monatsber. 1913. Bd. 65 blz. 333.

[4]) K. MARTIN. Vorläufiger Bericht über geologische Forschungen auf Java. II. Samml. des geol Reichsmus. in Leiden. Bd. IX blz. 194.

Timor's noordkust werd nog niet vermeld, dat WANNER[1]) geneigd is, om voor de in West-Timor tusschen de rivieren N. Bonat en Kapsali optredende augiet- en hypersteenandesieten en andesiettuffen een jong-mioceenen ouderdom aan te nemen.

De tertiaire eruptiefgesteenten vormen volgens VERBEEK zelfstandige bergruggen of kegelbergjes; de voeten van de oude, meestal ingestorte kraterranden der groote, gedeeltelijk nog werkzame vulkanen, die zeer dikwijls uit pyroxeenandesiet en bazalt bestaan, zijn waarschijnlijk iets jonger (plioceen), ze kunnen echter niet van de jongere vulkanische produkten worden gescheiden en worden daarom bij de jong-vulkanische produkten besproken.

ad 6.

De jong-vulkanische produkten (pyroxeenandesieten tot bazalten) bouwen de vulkanische massieven op, die door uitwerping der stoffen meestal om één centrum dikwijls een meer of minder regelmatigen kegelvorm bezitten en die van den jong-tertiairen tijd door het kwartair tot in de hedendaagsche periode werden opgebouwd.

Uit de bovenstaande uiteenzettingen, waaraan nog meerdere zouden kunnen worden toegevoegd, blijkt voldoende, dat door de resultaten van nieuwere onderzoekingen talrijke wijzigingen kunnen worden aangebracht in het door VERBEEK in 1908 gegeven overzicht, op de mogelijkheid waarvan door den auteur zelf reeds herhaaldelijk wordt gewezen. Vinden we de intrusiefgesteenten zoo goed als geheel beperkt tot zijn twee oudste groepen, zoo is gebleken, dat basische en zure intrusiefgesteenten uit zeer verschillende geologische perioden zijn bekend geworden, terwijl vulkanische erupties vanaf het jong-palaeozoicum, door het mesozoïcum en het tertiair tot aan de hedendaagsche periode hebben plaats gehad. In het jong-palaeozoicum tot in het oudere mesozoïcum waren de erupties bijzonder heftig, doch ze schijnen toen in hoofdzaak beperkt te zijn geweest tot het gebied, dat thans wordt ingenomen door Timor en nabijgelegen eilanden. Waarschijnlijk in het jong-mesozoïcum begon een nieuwe periode van bijzonder krachtige eruptieve werkzaamheid, die in het tertiair haar hoogtepunt bereikte en die thans nog voortduurt. De sporen dezer laatste periode vinden we over een zeer groot deel van den oostelijken archipel verspreid.

Indien we de eruptiefgesteenten der Molukken naar hun ouderdom onderverdeelen in de volgende groepen:

a. jong-palaeozoische tot oud-mesozoïsche eruptiefgesteenten

[1]) J. WANNER. Geologie von West-Timor. Geol. Rundschau. Bd. IV 1913 blz. 146.

b. jong-mesozoïsche tot tertiaire eruptiefgesteenten

c. jong-vulkanische producten

dan kan een zeer groot deel der tot nu toe bekende eruptiefgesteenten met zekerheid tot een dezer groepen worden gebracht en voor vele gesteenten zou deze onderverdeeling nog verder kunnen worden doorgevoerd. In elke groep zouden de gesteenten naar hunne petrografische kenmerken kunnen worden onderverdeeld. Er zijn echter ook gesteenten, die ouder dan jong-palaeozisch kunnen zijn, terwijl een zeer groot gedeelte nog slechts als rolsteen bekend is geworden, waarvan de gegevens omtrent den ouderdom dan dikwijls geheel onvoldoende zijn. We kunnen in verband hiermede de eruptiefgesteenten in de eerste plaats naar hunne petrografische kenmerken onderverdeelen. We stuiten hierbij echter weer op de moeilijkheid, dat van zeer vele gesteenten geen uitvoerige of in het geheel geen beschrijvingen bekend zijn, zoodat over struktuur en mineralogische eigenschappen niet voldoende kan worden geoordeeld, terwijl ook van vele het geologisch voorkomen onvoldoende of in het geheel niet bekend is. Voor een classificatie, in de eerste plaats op chemischen grondslag ontbreken voldoende gegevens ten eenenmale.

We kunnen b.v. de volgende groepen onderscheiden:

a. granietische tot diorietische gesteenten.

b. gabbroachtige tot peridotietische gesteenten (met een deel der serpentijnen en diabazen).

c. foyaietische tot theralietische gesteenten.

d. rhyolieten en kwartsporfieren, trachieten en kwartsvrije porfieren, dacieten en kwartsporfierieten, andesieten en porfierieten met keratofieren, alkalirhyolieten, alkalitrachieten, trachyandesieten.

e. bazalten, melafieren, pikrieten enz. (met een deel der serpentijnen en diabazen).

f. fonolieten, leuciet- en nefeliengesteenten, trachydolerieten, tefrieten en basanieten, melilietbazalten, limburgieten en augitieten.

Met bij elke groep het gedeelte der granietporfierische en fijnkorrelige equivalenten en der aplietische, lamprofierische en pegmatietische gesteenten, dat zich, naar de beschikbare kenmerken te oordeelen, het meeste bij die bepaalde groep aansluit.

Bij elke groep afzonderlijk kan dan datgene, wat omtrent den geologischen ouderdom bekend is, worden medegedeeld, hetgeen hieronder zeer in het kort is geschied.

Groep a. De samenstelling der zandsteenformatie van Ambon, die

uit granietgneis is opgebouwd, wijst op het voorkomen van granieten, die ouder zijn, dan de boven-trias. Behalve deze komen talrijke jongere, post-jurassische en tertiaire granietische en diorietische gesteenten in de Molukken en op Celebes en ook op de overige eilanden van den archipel voor.

Groep b. Van deze groep zijn gesteenten van jong-palaeozoischen, mesozoïschen en tertiairen ouderdom bekend.

Groep c. Deze gesteenten zijn bekend van Timor[1 2]), waar geen zekere gegevens omtrent hun ouderdom werden verkregen. In Zuid-Celebes zijn shonkinieten en essexieten intrusief in de tertiaire vulkanische serie van dit gebied, waaruit een tertiaire ouderdom van deze gesteenten kan worden afgeleid.

Groep d. Een groot deel der tot deze groep behoorende gesteenten, is in de Molukken en op Celebes van tertiairen ouderdom, misschien reikt een belangrijk gedeelte tot in het mesozoïcum terug, terwijl onder de basische eruptiefgesteenten, die in de permische en oud-mesozoïsche sedimentserie van Timor en nabijgelegen eilanden een groote uitgebreidheid hebben, ook de basische vertegenwoordigers van groep *d* voorkomen. Onder de jongere vulkanische gesteenten komen zeer vele andesieten voor (op Celebes ook zure effusiva), ze zijn dikwijls lastig van de bazalten te onderscheiden, omdat beide gesteentesoorten door talrijke overgangen met elkander zijn verbonden.

Groep e. heeft een groote uitgebreidheid in de permische en oud-mesozoïsche sedimentserie van Timor en nabijgelegen eilanden, een groot deel behoort tot de reeds bij groep *d* vermelde tertiaire eruptief-gesteenten, waarvan misschien een belangrijk deel tot in het meso-zoïcum terugreikt. Verder zijn bazalten zeer verbreid onder de jong-vulkanische producten.

Groep f. We kennen leucmiethoudende gesteenten van Soembawa, ze schijnen hier van jong-tertiairen ouderdom te zijn[3]), terwijl zelfs leucietbasaniet vermeld wordt als lavastroom op de zuidhelling van den Tambora[4]). Op Celebes hebben leuciet- en nefelienhoudende

[1]) A. Wichmann. Gesteine von Timor. Samml. Geol. Reichsmus. in Leiden. Serie I. 2. 1882—1887 blz. 85.

[2]) H. A. Brouwer. Neue Funde von Gesteinen der Alkalireihe auf Timor. Centralbl. für Min. etc. 1913 blz. 570 e.v

[3]) J. Elbert. Die Sunda-Expedition. Bd. II. Frankfurt a. M. 1912.
Vgl. ook G. Rack, Petrographische Untersuchungen an Ergussgesteinen von Sumbawa und Flores, Neues Jahrb. f. Min. etc Beil. Band XXXIV 1912. blz. 42 e.v.

[4]) J. J. Pannekoek van Rheden. Voorloopige mededeelingen over de geologie van Soembawa. Jaarb. v. h. Mijnw 1913 blz. 20.

gesteenten een groote uitgebreidheid, we vermeldden reeds, dat ze in Zuid-Celebes en zuidelijk Centraal-Celebes van tertiairen, ten deele wel van jong-tertiairen ouderdom zijn. Een augitietachtig gesteente op het eiland Bamdie van den Misoolarchipel schijnt volgens WANNER[1]) van cretaceïschen ouderdom te zijn.

Op Timor en Rotti komen camptonietische gesteenten voor, waarvoor op beide eilanden een permische ouderdom waarschijnlijk wordt geacht[2]).

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan van den Heer H. B. A. BOCKWINKEL: *„Enige opmerkingen over de volledige transmutatie"*. (Vijfde Mededeling).

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

23. Als we, zoals in N°. 19 (voorgaande mededeling) de ontwikkeling van $T(vu)$ opvatten als een voorstellingswijze van de, op u toegepaste, *samengestelde* transmutatie $T_1 = (Tv)$, waarvan de eerste komponent de vermenigvuldigingsoperatie is, en de tweede een willekeurige, dan is die ontwikkeling een biezonder geval van een algemenere, die de rezultante T van twee transmutaties T_1 en T_2 voorstelt, welke *allèbei* willekeurig zijn. Deze ontwikkeling wordt ook door BOURLET aangegeven, maar louter *formeel*, zonder enige aanwijzing van eventuele geldigheidsgebieden. Daar BOURLET de formule herhaaldelik gebruikt. is het van belang hierover in 't reine te komen.

Vooraf merken we iets op omtrent de funksies $a_m(x)$ in een reeks P die een in zekere sirkelvormige gebieden volledige transmutatie voorstelt. Is (a) zo'n volledigheidsgebied, dan hebben we vroeger gezien (N°. 4, 1e mededeling), dat dit meebrengt dat de grootheid

$$a_x = \overline{lim}\,|a_m(x)|^{\frac{1}{m}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

in (a) geborneerd is, en dus een eindige bovenste grens heeft, die we door $a\ (a)$ of kortweg door a hebben aangeduid. We beschouwen nu de majorantfunkties $\overline{a}_m(x)$ van $a_m(x)$ (zie een noot in N°. 7, 2e mededeling). Hebben deze ook de eigenschap dat een limiet, als in (6) aangegeven, bestaat?

[1]) J. WANNER. Beiträge etc. loc. cit. blz. 494.

[2]) H. A. BROUWER. Neue Funde etc. loc. cit. blz. 576.

Id. Voorloopig overzicht der geologie van het eiland Rotti. Tijdschr. Kon. Ned. Aardr. Gen. XXXI 1914 blz. 613.

Volgens een bekende formule uit de funksieteorie, die we overigens reeds herhaaldelik gebruikt hebben, is in een gebied $(\alpha') < (\alpha)$ [1])

$$\overline{a_m}(x_0 + \alpha') < \frac{\alpha \, |a_m(x_m)|}{\alpha - \alpha'},$$

waarin x_m het punt op de omtrek van (α) is, waar $a_m(x)$ zijn maksimummodulus krijgt. Hieruit volgt

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \, [\overline{a_m}(x_0 + \alpha')]^{\frac{1}{m}} < \overline{\lim_{m=\infty}} \, |a_m(x_m)|^{\frac{1}{m}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Het linkerlid is zonder meer gelijk aan $a(\alpha')$, de bovenste grens, voor het gebied (α'), van de grootheid

$$\overline{a_x} = \overline{\lim} \, |\overline{a_m}(x)|^{\frac{1}{m}},$$

en wel, omdat *alle* funksies $\overline{a_m}$ juist in het punt $x_0 + \alpha'$ van het gebied (α') hun maksimummodulus hebben. Van het rechterlid zou niet maar zo gelden dat het gelijk is aan $a(\alpha)$, ware het niet dat we ons aldoor gehouden hadden aan de onderstelling, in de 2e alinea van N°. 4 gemaakt, dat er bij ieder gegeven, willekeurig klein getal ε, voor *alle* punten x van het gebied (α) *eenzelfde* geheel getal m_ε is, zodanig dat

$$|a_m(x)|^{\frac{1}{m}} < a_x + \varepsilon \text{ , voor } m \geq m_\varepsilon \, .$$

Bij deze onderstelling is het niet mogelik dat het rechterlid van (52) verschilt van $a(\alpha)$. Immers, stel dat dit wel het geval was, en dat men bv. had

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \, |a_m(x_m)|^{\frac{1}{m}} = a(\alpha) + \delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

waarin δ zeker pozitief getal is. Neem nu $\varepsilon = \frac{1}{2}\delta$. Voor $m \geq m_\varepsilon$ hebben we dan

$$|a_m(x_m)|^{\frac{1}{m}} < a_{x_m} + \tfrac{1}{2}\delta \leq a(\alpha) + \tfrac{1}{2}\delta,$$

in strijd met (53). Dat de limiet in het rechterlid van (52) niet *kleiner* kan zijn dan $a(\alpha)$, blijkt onmiddellik, als men opmerkt dat voor een *willekeurig* punt x van het gebied (α)

[1]) De grootheid $\overline{a_m}(x_0 + \alpha')$ is blijkens datgene wat we onder een majorantfunksie verstaan, reëel en pozitief.

$$|a_m(x_m)|^{\frac{1}{m}} > |a_m(x)|^{\frac{1}{m}},$$

dus

$$\lim_{m=\infty} |a_m(x_m)|^{\frac{1}{m}} \geq a_x$$

en dus ook, daar deze ongelijkheid voor *ieder* punt x van (α) geldt,

$$\lim_{m=\infty} |a_m(x_m)|^{\frac{1}{m}} > a(\alpha)$$

De ongelijkheid (52) gaat dus over in

$$\overline{a}(\alpha') < a(\alpha)$$

Verder is blijkbaar

$$\overline{a}(\alpha) \geq a(\alpha).$$

We willen nu het geval stellen dat $\overline{a}(\alpha)$ een *kontinue* funksie van (α) is in het *inwendige* van het interval $(0, A)$, waarin we met A, gelijk vroeger, de bovenste grens van de α-waarden aanduiden, waarvoor $\overline{a}(\alpha)$ eindig is; op de vraag of dat het enig mogelike geval is komen we misschien nog terug. Dan volgt uit de kombinatie van de beide laatste vergelijkingen

$$\overline{a}(\alpha) = a(\alpha) \quad \dots\dots\dots \quad (54)$$

Voor de reeks $\overline{P}$, die uit P ontstaat, door de koëffisienten a_m door hun majorantfunksies te vervangen, wordt nu het met α korresponderende getal $\overline{\beta}$ volgens formule (7) (1e mededeling) bepaald door

$$\overline{\beta} = \alpha + \overline{a}(\alpha)$$

Volgens (54) heeft men dus ook

$$\overline{\beta} = \alpha + a(\ ) = \beta \quad \dots\dots\dots \quad (54a)$$

We komen dus tot de stelling *de reeks $\overline{P}$ heeft de volledigheidseigenschap in ieder gebied (α), waarin P diezelfde eigenschap bezit, en wel zodanig dat ook het met (α) korresponderende gebied voor beide reeksen hetzelfde is*; dit geldt altans bij de vereenvoudigende onderstelling die we hier gemaakt hebben, dat β *kontinu* met α toeneemt.

24. We kunnen nu het volgende teorema aantonen: *Als de komponenten T_1 en T_2 van de samengestelde transmutatie $T = T_2 T_1$ voldoen aan de voorwaarden:*

1°. *T_1 en T_2 zijn normale transmutaties;*

2°. *De bij T_2 behorende reeks P_2 is volledig in een sirkelvormig*

66

gebied (α), *met korresponderend gebied* (γ); *de bij* T_1 *behorende reeks* P_1 *is volledig in* (γ) *met korresponderend gebied* (β);

3°. *Als tweetallen van toegevoegde velden komen, behalve de beide paren die men zich, bij het uitspreken van de voorwaarde onder* 1° *reeds gedacht moet hebben, in aanmerking: voor* T_1 *ieder paar toegevoegde velden van* P_1, *voor* T_2 *ieder paar toegevoegde velden van* P_2 [1]);

dan gelden de uitspraken

1°. *De rezultante* T *is een normale transmutatie, met een veldpaar waarvan het N. V. de sirkel* (α) *is, en het F. V. bestaat uit de funksies die behoren tot een sirkel* (ϱ), *willekeurig weinig groter dan* (β).

2°. *De bij* T *behorende reeks* P *is volledig in* (α), *met een korresponderend gebied dat hoogstens gelijk is aan* (β).

We nemen aan dat (α) en (γ) niet de *maksimum*gebieden van volledigheid van P_2 resp. P_1 zijn. Dan is er, daar korresponderende sirkelstralen volgens onze aanname kontinu met elkaar toe- en afnemen, bij ieder getal ϱ, willekeurig weinig groter dan β gedacht, een getal ϱ', zodanig dat de straal die voor de reeks P_2 met α korrespondeert, d.i. γ, *kleiner* is dan ϱ', en de straal die voor de reeks P_1 met ϱ' korrespondeert, en die dus groter is dan β, *kleiner* is dan ϱ. De transmutatie P_1, en dus ook T_1 volgens premisse 3°, is dan normaal, indien we als N. V. O. de sirkel (ϱ') en als N. V. F. de sirkel (ϱ) aannemen; evenzo zijn P_2 en T_2 normaal, als we als N. V. O. de sirkel (α) en als N. V F. de sirkel (ϱ') aannemen. [2]) Is u een funksie die tot (ϱ) behoort, dan is, in verband met het juist gezegde, $v = T_1(u)$ een funksie die behoort tot (ϱ'), en $w = T_2(v)$, of

$$w = T(u),$$

een funksie die behoort tot (α). De transmutatie levert dus voor alle funksies die tot (ϱ) behoren, een getransmuteerde op die regulier is in en op de omtrek van de sirkel (α). Daar onder deze funksies vanzelf de gehele rationele begrepen zijn, hebben we om te kunnen besluiten dat T normaal is, nog slechts de kontinuïteitskwestie uit

---

[1]) We brengen in herinnering dat, wil men een reeks P, die volledig is in een gebied (ξ), met korresponderend gebied (ν), een *normale* transmutatie noemen, als F. V. passend bij het N. V. (ξ) mogelikerwijs slechts in aanmerking komt de groep van funksies, die tot een iets, hoewel willekeurig weinig, *grotere* sirkel dan (ν) behoren, aangezien uit het in N°. 13 (2e mededeling) gegeven voorbeeld blijkt dat de *kontinuiteit* verstoord kan zijn, als men, bij (ξ) als N. V. O., ($\varkappa$) aanneemt als N. V. F.

[2]) Als we in 't vervolg, zonder er iets bij te voegen, zeggen dat we een sirkel (r) als N. V. F. aannemen, dan zullen we daarmee bedoelen dat het F. V. bestaat uit *alle* funksies die tot de genoemde sirkel behoren. Dit is het geval waarmee men hoofdzakelik te maken heeft, en daarom is het gemakkelik, daarvoor een kortere uitdrukking te hebben die het F. V. karakterizeert.

te maken. Dit kost geen moeite. Want volgens het zo even opgemerkte, en in verband met premisse 3°, is T_2 kontinu in het F. V. van funksies die tot (ϱ') behoren, en het N. V. (α); dit wil zeggen: Bij ieder pozitief getal τ, willekeurig klein gegeven, is er een bedrag η, zodanig dat

$$|w - T_2(v)| < \tau, \text{ in het gesloten gebied } (\alpha),$$

als

$$|v| < \eta \quad , \text{ in het gesloten gebied } (\varrho').$$

Ook houdt premisse 3° in dat T_1 kontinu is in het F. V. van funksies die tot (ϱ) behoren, ten aanzien van het N. V. (ϱ'); dit wil zeggen: Bij ieder, willekeurig klein gegeven pozitief getal η is er een bedrag δ, zodanig dat

$$|v - T_1(u)| < \eta, \text{ in het gesloten gebied } (\varrho').$$

als

$$|u| < \delta \ , \text{ in het gesloten gebied } (\varrho).$$

Uit de beide voorgaande konkluzies volgt deze andere: Bij ieder pozitief, willekeurig klein gegeven getal τ is er een bedrag δ, zodanig dat

$$|w - T_2 T_1(u) - Tu| < \tau, \text{ in het gesloten gebied } (\alpha),$$

als

$$|u| < \delta \ , \text{ in het gesloten gebied } (\varrho).$$

De transmutatie T is dus inderdaad *kontinu*, als men als korresponderende numerieke velden (α) en (ϱ) aanneemt, en het bewijs van de normaliteit van T is daarmee voltooid.

Er blijft nu nog over, het tweede punt van de konkluzie aan te tonen.

Beschouw een funksie u die tot de sirkel (ϱ) behoort; zoals we bij het bewijs van het eerste punt zagen, levert T_1 voor zo'n funksie een getransmuteerde op die behoort tot (ϱ'). Bovendien kan $T_1(u)$, volgens het in N° 15 (3° mededeling) bewezen funksionele teorema van Ma Laurin, in het gebied (ϱ') door $P_1(u)$ worden voorgesteld; ook dit geldt in verband met premisse 3°. We hebben dus

$$v = T_1(u) = \sum_{0}^{\infty} k \, \frac{\lambda_k \, u^{(k)}}{k!} \, ,$$

als we de koeffisienten van de reeks P_1 door $\lambda_k(x)$ of kortweg λ_k aanduiden. Deze reeks konvergeert *uniform* in het gebied (ϱ') (zie N°. 4, 1° mededeling). Volgens de stelling van N°. 18 (4° mededeling) kan dus de getransmuteerde $w = T_2(v)$ van v in het gebied (α) gevonden worden door T_2 term voor term op de reeks toe te passen, zodat men heeft

$$T(u) = \sum_{0}^{\infty} \lambda_k \, T_2 \left(\frac{\lambda_k \, u^{(k)}}{k!} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

De volgende stap die we zullen doen bestaat daarin dat we voor iedere term van de verkregen reeks de transmutatie ontwikkelen in de in N°. 19 (4e mededeling) besproken funksionele reeks van TAYLOR, en wel zó dat we daarbij, in het produkt $\lambda_k u^{(k)}$, de grootheid $u^{(k)}$ als „beginpunt", en λ_k als „aangroeiing" beschouwen. Volgens ons onderzoek in dat nummer, en in verband met de voormelde normaliteit van T_2 is de bedoelde ontwikkeling inderdaad in het gebied (a) geldig, omdat zowel $u^{(k)}$ als λ_k tot (ϱ') behoren: immers $u^{(k)}$ behoort, evenals u, tot (ϱ), dus zeker tot $(\varrho') < (\varrho)$, en λ_k behoort tot (ϱ'), omdat het een koëffisient is van de reeks P_1, die volledig is in (ϱ').

De bedoelde ontwikkeling wordt door formule (42') geleverd, en luidt [1])

$$\left.\begin{aligned} T(u) = & \left[P_2(u)\lambda_0 + P'_2(u) D\lambda_0 + \frac{P''_2(u)}{2!} D^2\lambda_0 + \dots \right] \\ & + \left[P_2(u')\lambda_1 + P'_2(u') D\lambda_1 + \frac{P''_2(u')}{2!} D^2\lambda_1 + \dots \right] \\ & + \frac{1}{k!} \left[P_2(u^{(k)})\lambda_k + P'_2(u^{(k)}) D\lambda_k + \frac{P''_2(u^{(k)})}{2!} D^2\lambda_k + \dots \right] \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots , \end{aligned}\right\} . (56)$$

Hierbij beantwoordt iedere rij aan een term $\lambda_k u^{(k)}$, zodat, als het dubbeloneindige schema volgens *rijen* gesommeerd wordt, de uitkomst eindig is, en gelijk aan (55). Het is nu nodig om te weten, dat de uitkomst *onafhankelik* is van de groepering, en zelfs dat dit geldt voor het *drievoudig* oneindige schema dat men uit (56) krijgt, door de reeksen P voluitgeschreven te denken, wat we van nu af aldoor zullen doen. M. a. w. we moeten aantonen dat het drievoudige schema, voor alle waarden van x in en op de omtrek van de sirkel (a), een *absoluut* konvergent schema is, en hierbij zal ons de stelling van het vorige nummer te pas komen.

We stellen de koëffisienten van de reeks P_2 voor door μ_k, uitvoeriger $\mu_k(x)$. Vervangen we nu λ_k en μ_k door hun natuurlike majorantfunksies, $\overline{\lambda_k}$ en $\overline{\mu_k}$, en definieren we met behulp hiervan de transmutatie $\overline{P_1}$ en $\overline{P_2}$, die we kortheidshalve de natuurlike majo-

[1]) We hebben hier, ten behoeve van de vergelijking met het zo aanstonds volgende schema (56). P_2 en zijn afgeleiden in plaats van T_2 en zijn afgeleiden gesteld, wat hier, volgens het funksionele teorema van MAC LAURIN, geoorloofd is.

ranten van P_1 en P_2 zullen noemen, dan leert de bedoelde stelling dat $\overline{P}_1$ volledig is in het gebied (ϱ'), met een korresponderend gebied kleiner dan (ϱ), omdat dit met P_1 het geval is; evenzo is $\overline{P}_2$ volledig in (α) met een korresponderend gebied kleiner dan (ϱ'). $\overline{P}_1$ stelt dus, evenals P_1, een normale transmutatie voor, indien men als korresponderende numerieke velden de sirkel (ϱ') (N. V. O.) en de sirkel (ϱ) (N. V. F.) aanneemt, en $\overline{P}_2$ stelt, evenals P_2, een normale transmutatie voor, als men als korresponderende numerieke velden de sirkels (α) en (ϱ') beschouwt. De transmutatie $\overline{P}_1$ levert dus voor de majorantfunksie $\overline{u}$ van u, die evenals u tot (ϱ) behoort, een getransmuteerde,

$$\overline{P}_1(\overline{u}) = \sum_0^\infty {}_k \frac{\overline{\lambda}_k \, \overline{u}^{(k)}}{k!},$$

die regulier is in het gesloten gebied (ϱ'), terwijl de reeks in dat gebied uniform konvergeert. Hieruit volgt ten eerste weer dat de transmutatie $\overline{P}_2$ voor de funksie $\overline{P}_1(\overline{u})$ een getransmuteerde oplevert, die regulier is in het gesloten gebied (α), en ten tweede, in verband met de zo even vermelde normaliteit van $\overline{P}_2$, dat deze getransmuteerde in dat gebied verkregen wordt, door de transmutatie term voor term op de gevonden reeks toe te passen. Er komt dan

$$\overline{P}_2 \overline{P}_1(\overline{u}) = \sum_0^\infty {}_k \overline{P}_2\left(\frac{\overline{\lambda}_k \, \overline{u}^{(k)}}{k!}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Eindelik kan, op overeenkomstige gronden als in het geval van formule (55), iedere term van de laatste som in de funksionele reeks van TAYLOR ontwikkeld worden. Beschouwt men daarbij, in het produkt $\overline{\lambda}_k \overline{u}^{(k)}$, $\overline{u}^{(k)}$ als „beginpunt" en $\overline{\lambda}_k$ als „aangroeiing", dan krijgt men het volgende schema

$$\left.\begin{aligned}
\overline{P}_2\overline{P}_1(\overline{u}) = & \left[\overline{P}_2(\overline{u})\,\overline{\lambda}_0 + \overline{P}'(\overline{u})\,D\overline{\lambda}_0 + \frac{\overline{P}_2''(\overline{u})}{2!}\,D^2\overline{\lambda}_0 + \dots\right] \\
& + \left[\overline{P}_2(\overline{u}')\,\overline{\lambda}_1 + \overline{P}'_2(\overline{u}')D\overline{\lambda}_1 + \frac{\overline{P}_2''(\overline{u}')}{2!}\,D^2\overline{\lambda}_1 + \dots\right] \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{1}{k!}\left[\overline{P}_2(\overline{u}^{(k)})\,\overline{\lambda}_k + \overline{P}'_2(\overline{u}^{(k)})D\overline{\lambda}_k + \frac{\overline{P}_2''(\overline{u}^{(k)})}{2!}\,D^2\overline{\lambda}_k + \dots\right] \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (56)$$

waarin we ons dadelik maar weer de $\overline{P}$-reeksen voluitgeschreven denken, zodat het een drievoudig schema is, dat term voor term met het drievoudige schema (56) korrespondeert.

Geeft men nu in dit *majorant*schema aan x de waarde $x_0 + \alpha$, zodat $x - x_0$ reëel en pozitief is, dan is het duidelik dat alle termen reëel en pozitief zijn. Maar we kennen één groeperingswijze van deze termen waarbij men tot een konvergente reeks komt, n.l. degene die oorspronkelik tot het schema gevoerd heeft. Volgens een bekende stelling kan men hieruit besluiten dat *iedere* vereniging van de elementen tot een of meer enkelvoudig oneindige reeksen of tot een enkelvoudige reeks van dergelijke reeksen, steeds tot dezelfde som voert. Voor andere waarden van x in het gebied (α) zijn de absolute waarden van de termen, zowel in het eerste als in het tweede schema, niet groter dan die van de korresponderende in het tweede schema voor $x = x_0 + \alpha$; daarnit volgt weer dat voor al dergelijke waarden van x de elementen van beide schema's een absoluut konvergent aggregaat vormen, waarvan de som onafhankelik is van de groepering.

We passen deze uitkomst zodanig toe dat we telkens alle termen met eenzelfde macht van $D\,u\,(D\,\overline{u})$ tot een enkele term met diezelfde macht verenigen, dan levert deze wijze van groepering, in het ene als in het andere geval, de gezochte rezulterende reeks. Deze konvergeert dus in het gebied (α) absoluut en uniform voor *alle* funksies u die tot (β) behoren, want als een funksie tot (β) behoort, is er ook een iets grotere sirkel (ϱ) waartoe hij behoort. M. a. w. de reeks is volledig in het gebied (α), met een korresponderend gebied dat hoogstens gelijk is aan (β). Daarmee is punt 2° van de stelling aangetoond[1]).

Het teorema van dit nummer is aldus in zijn gehele omvang bewezen, maar het doel dat we ons in de aanvang van N°. 23 gesteld hadden, is nog niet geheel bereikt. Het teorema geeft nl. *wel* aan dat de rezulterende reeks volledig is, en zegt ook iets van de afhankelikheid tussen gebieden die, voor die reeks, met elkaar korresponderen, maar niets over de wijze waarop de koeffisienten berekend kunnen worden. Dit aan te geven was hier trouwens ook niet ons doel, aangezien men het reeds bij Bourlet vermeld vindt, die het rezultaat dat door het schema (56) wordt opgeleverd in een bepaalde, elegante vorm gebracht heeft. We zouden er dan ook over kunnen zwijgen, wanneer uit onze voorafgaande beschouwingen reeds vanzelf duidelik was, dat de bedoelde vorm *juist* is; dan toch konden we verder niet veel meer doen dan herhalen wat er bij Bourlet voorkomt. Maar om tot het inzicht van die juistheid te

---

[1]) Het aggregaat van termen met dezelfde macht $D^k u$ van D_u als faktor, welk aggregaat de rezulterende koeffisient $a_k(x)$ oplevert, konvergeert eveneens *uniform* in het gebied (α); daaruit volgt dat $a_k(x)$ een in (α) *reguliere* funksie is.

komen, is, naar wij menen, nog een nadere opheldering nodig, en daarom willen we bij dit punt even stilstaan.

Bij de bepaling van de reeks P maakt Bourlet gebruik van de door hem ingevoerde *operatieffunksie*, d.i. een uitdrukking $f(x,z)$, bepaald door

$$f(x,z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

en waaruit men de transmuterende reeks, toegepast op de funksie u, krijgt, door z^m te vervangen door $D^m u$; tevens geldt dat de formele n^e afgeleide van deze reeks, naar z, de operatieffunksie is die beantwoordt aan de n^e afgeleide van de transmutatie P, zoals gemakkelik met behulp van formule (39) (4^e mededeling) is te zien, waar a'_m hetzelfde betekent als $T'^m(v)$. De operatieffunksie, aanvankelik alleen een *simbool*, heeft voor een reeks die volledig is in een gebied (a) de eigenschap dat bij, als men z als kompleks getal opvat, voor iedere waarde van x in het gebied (a), en voor willekeurige waarden van z, een *konvergente* machtreeks in z voorstelt, en dus ook een in $z = 0$ *reguliere* funksie van z; de naam operatief*funksie* is hierdoor gerechtvaardigd. De reden hiervan is onmiddellik duidelik, als men bedenkt, dat het eigenaardige karakter van de *volledige* transmutatie daarin bestaat, dat de koëffisienten $a_m(x)$, voor iedere waarde van x in het volledigheidsgebied (a), kleiner zijn, in absolute waarde, dan de m^e macht van een van m onafhankelik pozitief getal $a(a)$. Duiden we de operatiefreeksen die behoren bij P_1 en P_2 resp. door $f_1(x,z)$ en $f_2(x,z)$ aan, of kortweg door f_1 en f_2, dan zijn dus f_1 en f_2, in een omgeving van $z = 0$, reguliere funksies van z, indien x een punt van het gebied (a) is. Verder zullen, aangezien, zoals we gevonden hebben, de rezulterende reeksen P en $\overline{P}$, die resp. uit de schema's (56) en $(\overline{56})$ voortvloeien, beide volledig zijn in het gebied (a), de korresponderende operatiefreeksen $f(x,z)$ en $F(x,z)$ eveneens, voor iedere waarde van x in het gebied (a), in een omgeving van $z = 0$ konvergeren, en een in zo'n omgeving reguliere funksie van z voorstellen.

Deze operatiefreeksen had men ook meer rechtstreeks uit de genoemde schema's kunnen krijgen, door daarin eerst overal $D^k u$, $(D^k \overline{u})$ door z^k te vervangen en daarna telkens de termen met z^k als faktor tot een enkele term, met dezelfde macht van z^k als faktor, te verenigen. Deze term is inderdaad de remplaçant van de term met de faktor $D^k u$ $(D^k \overline{u})$ in de gevonden reeks P $(\overline{P})$; immers, deze laatste was ontstaan, door alle termen in het oorspronkelik schema met $D^k u$ $(D^k \overline{u})$ als faktor te verenigen, en al deze termen, en geen andere, gaan in termen met z^k over. Aangezien nu, krachtens de

distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging, de rezulterende koëffisient zowel van $D^k u$ ($D^k u$) als van z^k gelijk is aan de som van alle afzonderlike koëffisienten en bij de genoemde vervanging de koëffisienten onveranderd blijven, zijn de beide rezulterende koëffisienten gelijk, en is dus de som van de remplaçanten van termen met eenzelfde macht van $D^k u$ ($D^k u$), zoals te bewijzen was, gelijk aan de remplaçant van hun som.

De bedoelde vervanging doet het eerste schema overgaan in

$$\left.\begin{array}{l} \left[\lambda_0 f_2 + \frac{\partial \lambda_0}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} + \dots\right] \\ + \left[(\lambda_1 z) f_2 + \frac{\partial(\lambda_1 z)}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2(\lambda_1 z)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} + \dots\right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \left[(\lambda_1 z^k) f_2 + \frac{\partial(\lambda_1 z^k)}{\partial x}\frac{\partial f_2}{dz} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2(\lambda_1 z^k)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} + \dots\right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (58)$$

altijd, indien men dit zo opvat dat, bij gebruikmaking van het schema, gekondenzeerde uitdrukkingen als

$$\left(\frac{\partial^p(\lambda_q z^q)}{\partial x^p}\right)\left(\frac{\partial^p f_2}{\partial z^p}\right)$$

weer door hun reeksontwikkelingen naar machten van z vervangen worden. Het schema blijft dus voorshands drievoudig oneindig. Voor het majorantschema (56) komt een dergelijk in de plaats; het is niet nodig dit neer te schrijven. Geven we in dit laatste aan x de waarde $x_0 + a$ en aan z zekere reële, pozitieve waarde ζ, dan zijn alle elementen van dat aggregaat reëel en pozitief. Maar als men deze elementen zo groepeert dat telkens de elementen met eenzelfde macht ζ^k van ζ opgeteld worden, dan krijgen we, zoals uit het bovengezegde volgt, een konvergente reeks. Dus geeft *iedere* groepering van dit *biezondere* aggregaat dezelfde som. Verder zijn in beide aggregaten de elementen voor andere waarden van x in het gebied (a), en voor waarden van z met een modulus niet groter dan ζ in absolute waarde hoogstens gelijk aan de korresponderende van het zo juist genoemde biezondere aggregaat. Dus vormen de elementen van beide schema's voor de genoemde waarden van x en z een *absoluut* konvergent aggregaat, waarvan de som onafhankelik is van de wijze van groepering; hetzelfde geldt natuurlikerwijs voor onderdelen van beide schema's. We kunnen dus nu ook zeggen dat, voor een gegeven, willekeurige waarde van x in het gebied (a), zowel het ene als het andere schema, bij *iedere* groepering van de elementen, *eenzelfde* ondubbelzinnig bepaalde *verzameling van waar-*

den oplevert, wanneer z alle waarden in een zekere omgeving van $z=0$ aanneemt. Dit geheel van waarden is dus ook identiek met datgene wat men bij de bovenvermelde biezondere groepering (samenvoeging van termen met gelijknamige machten van z) kreeg, en waarvan we zeiden dat het een in de genoemde omgeving reguliere funksie van z vormt. Aangezien nu een dergelijk ensemble maar op één manier door een machtreeks in z kan worden voorgesteld, kan men met de schema's *analities opereren*. d. w. z. alle voorkomende herleidingen uitvoeren die ook anders, als z een getal is, in de analize gelden. Bij zulke herleidingen geven ook onderdelen van beide schema's tot geheel bepaalde funksies van z aanleiding, zoals na al het voorafgaande wel onmiddellik duidelik zal zijn, en men behoeft nooit te vrezen dat men, bij een andere dan de eerstbeschouwde samenvatting van de aggregaten, tot een funksionele uitdrukking in z zal komen die tot een andere, en dus foute, operatiefreeks voert.

Sommeert men nu het schema (58) volgens kolommen, dan vindt men de uitdrukking die door BOURLET voor de rezulterende operatieffunksie is aangegeven. Blijkbaar komt er

$$f(x, z) = f_1 f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} + \quad . \quad . \quad . \qquad (59)$$

In biezondere gevallen kan men deze uitkomst nog weer vereenvoudigen en tot een gesloten uitdrukking verenigen; steeds gelden daarbij, zoals gezegd is, de bekende analitiese herleidingen. Natuurlik heeft men, als de uitkomst gebruikt moet worden, altijd weer in de machtreeks naar z te ontwikkelen.

We merken tenslotte op dat we in al het voorgaande het drietal van getallen α, ϱ' ϱ, kunnen vervangen door het drietal α, β, γ, indien P_1 kontinu blijft, zo men (γ) en (β) en P_2, zo men (α) en (γ) als toegevoegde numerieke velden beschouwt. Dit geval is het meest voorkomende.

25. Tot toelichting van de algemene teorie geven we enige voorbeelden. We stellen ten eerste $T_1 = T_2 = D^{-1}$, zodat $T = D^{-2}$ is, en nemen verder, evenals vroeger, de oorsprong O tot middelpunt van onze gebieden, dus $x_0 = 0$. De transmutatie D^{-1}, zoals we die in N°. 16 gedefinieerd hebben, is normaal; de korresponderende reeks is volledig in iedere sirkel (ξ), met korresponderend gebied (2ξ). Voor het drietal van getallen α, γ, β, kunnen we hier dus nemen α, 2α, 4α. Verder is ook premisse 3°. vervuld, en wel ruimschoots: immers D^{-1} is niet alleen normaal, indien men (ξ) en (2ξ)

als toegevoegde numerieke velden beschouwt, maar ook als men (ξ) en (ξ) als zodanig aanneemt.

We kunnen dus ons teorema toepassen, hetwelk leert dat de transmutatie $T = D^{-2}$ normaal is met N.V.O. (a) en N.V.F. $(4a)$. Dit is juist, want van de eenvoudige transmutatie D^{-2} is bekend dat, met behoud van (a) als N.V.O., zelfs eveneens (a) als N.V.F. mag worden aangenomen. Er blijft dus nog over, punt 2°. van het teorema te verifieren, d.w.z. te bewijzen dat de met D^{-2} corresponderende reeks P volledig is in (a), met een korresponderend gebied dat hoogstens gelijk is aan $(4a)$. We willen daartoe de formule van Bourlet toepassen. Stellen we $f_1(x, z) = f_2(x, z) = \varphi(x, z)$, dan is, zoals de reeds meermalen beschouwde reeks, die bij D^{-1} behoort, leert (zie o.a. N°. 16),

$$\varphi(x,z) = \sum_{0}^{\infty} {}_m \frac{(-1)^m x^{m+1} z^m}{(m+1)!} = \frac{1-e^{-xz}}{z}$$

Hieruit volgt

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = (-z)^{n-1} e^{-xz}$$

zodat volgens (59)

$$f(x,z) = \left(\frac{1-e^{-xz}}{z}\right)^2 - \frac{e^{-xz}}{z} \sum_{1}^{\infty} {}_n \frac{(-z)^n}{n!} \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}$$

is. Verder

$$\sum_{1}^{\infty} {}_n \frac{(-z)^n}{n!} \frac{\partial^n \varphi(x\, z)}{\partial z^n} = \varphi(x,\, z-z) - \varphi(x,z),$$

waaruit

$$f(x,z) = \frac{1-(1+xz)e^{-xz}}{z^2}.$$

Ontwikkelen we dit naar machten van z, dan komt er

$$f(x,z) = \sum_{0}^{\infty} {}_m \frac{(-x)^{m+2} z^m}{(m+2)m!}$$

zodat met $D^{-2}u$ korrespondeert de reeks

$$Pu = \sum_{0}^{\infty} {}_m \frac{(-x)^{m+2} u^{(m)}}{(m+2)m!}.$$

Deze reeks, waarvan volgens het teorema vaststaat dat hij uniform konvergeert in het gebied (a), voor funksies die behoren tot $(4a)$, konvergeert reeds voor funksies die behoren tot $(2a)$, zoals met behulp van de herhaaldelik gebruikte majorantwaarde voor $u^{(m)}$ onmiddellik geverifieerd kan worden.

26. Als tweede voorbeeld nemen we $T_1 = T_2 = S_{(\omega x)}$, dus

$T = S^2_{\omega(x)}$, waarbij $S_{\omega(x)}$ de substitutieoperatie is, met $\omega(x)$ of ω als substitutiefunksie, die we in N°. 17 gedefinieerd en als een normale hebben leren kennen. We beschouwen, evenals daar, een omgeving van de oorsprong, en hebben dan gezien dat als tweetal van toegevoegde velden kan dienen ieder veldpaar waarvan het N. V. een sirkel (ξ) is kleiner dan de konvergentiesirkel (A) van $\omega(x)$, en het F. V. bestaat uit de funksies die behoren tot de sirkel (σ), als σ de maksimummodulus van $\omega(x)$ in het gebied (ξ) is. Verder vonden we dat de bij S behorende reeks volledig is in elk gebied ( ), als hier bedoeld, met als korresponderend gebied een sirkel (η) waarvan de straal minstens gelijk is aan het genoemde getal σ; daaruit kunnen we onmiddellik afleiden dat ook aan premisse 3° van ons teorema voldaan is. Van het drietal getallen waarvan in premisse 2° sprake is, moet α klein genoeg gekozen worden om te zorgen dat het getal γ dat, vóor de aan S beantwoordende reeks $P_2 (= P_1)$, met α korrespondeert, kleiner is dan de konvergentiestraal A van ω. Het kan natuurlik voorkomen dat dit onmogelik is, nl. als reeds met $\alpha = 0$ een getal γ *groter* dan A korrespondeert. Wij beschouwen dus een geval waarbij dit laatste zich niet voordoet, dan is aan premisse 2° voldaan en hebben we

$$\gamma = \alpha + |\omega(x_m) - x_m|, \quad \ldots \ldots \quad (60)$$

$$\beta = \gamma + |\omega(x'_m) - x'_m|, \quad \ldots \ldots \quad (61)$$

als x_m het punt op de omtrek van (α) en x_m' dat op de omtrek van (γ) is, waar $\omega(x) - x$ zijn maksimummodulus aanneemt.

We kunnen dus het teorema toepassen, hetwelk leert dat de transmutatie $T = S_\omega^2$ en de korresponderende reeks P normaal zijn, met als N. V. O. (α) en als bijbehorende N. V. F. een sirkel die hoogstens gelijk aan (β) hoeft genomen te worden [1]). Men kan gemakkelik verifieren dat dit uitkomt: Blijkbaar is $T = S^2$ een nieuwe substitutie met de substitutiefunksie

$$\omega_2(x) = \omega\{\omega(x)\};$$

daardoor is de rezulterende reeks P tegelijk met de gegeven reeksen P_1 en P_2 bekend, waarom we hier maar niet van de formule van Bourlet gebruik maken. Het getal dat, voor die rezulterende reeks P, met α korrespondeert, noemen we β_1, dan wordt β_1 bepaald door

$$\beta_1 = \alpha + |\omega_2(x_\mu) - x_\mu|,$$

waarin x_μ het punt op de omtrek van (α) is, waar $\omega_2(x) - x$ zijn grootste modulus krijgt. De uitkomst die het teorema oplevert, zal hiermee in overeenstemming zijn, als $\beta \geq \beta_1$. Dit is het geval. Voor-

[1]) We hebben hier punt 1° en punt 2° van het teorema in één uitspraak samengevat.

eerst is $\omega(x_\mu)$ een punt dat niet buiten de sirkel (γ) ligt. Immers, zoals we al in herinnering brachten, is de maksimummodulus

$$\sigma = |\omega(x_\sigma)|$$

van ω, op de omtrek van (α), hoogstens gelijk aan γ. A fortiori is dus

$$|\omega(x_\mu)| \leq \gamma,$$

en derhalve $\omega(x_\mu)$ een punt dat, hetzij binnen, hetzij hoogstens op de omtrek van (γ) ligt. Hieruit volgt weer, in verband met de betekenis van x_m'

$$|\omega(x'_m) - x'_m| \geq |\omega\{\omega(x_\mu)\} - \omega(x_\mu)| = |\omega_2(x_\mu) - \omega(x_\mu)|. \quad . \quad (62)$$

Uit de betekenis van x_m volgt verder

$$|\omega(x_m) - x_m| \geq |\omega(x_\mu) - x_\mu| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

De betrekkingen (60), (61), (62) en (63) geven nu aanleiding tot de volgende herleidingen:

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha + |\omega(x_m) - x_m| + |\omega(x'_m) - x'_m| \\ &\geq \alpha + |\omega(x_\mu) - x_\mu| + |\omega_2(x_\mu) - \omega(x_\mu)| \\ &\geq \alpha + |\omega(x_\mu) - x_\mu + \omega_2(x_\mu) - \omega(x_\mu)| \\ &\geq \alpha + |\omega_2(x_\mu) - x_\mu| \\ &\geq \beta_1, \end{aligned}$$

waarmee de gezochte uitkomst verkregen is. Dat niet alleen voor P, maar ook voor $T = S^2$ zelf, (β) als N. V. F. bij (α) als N. V. O. genomen kan worden, volgt hieruit weer, als men bedenkt dat $\beta_1 \geq \sigma_1$ is, waarin σ_1 de grootste modulus van $\omega_2(a)$ in het gebied (α) is, en deze de straal van het kleinste gebied aangeeft dat men als N. V. F. bij (α) als N. V. O. kan aannemen.

Dat hier, behalve het ongelijkteken, ook het gelijkteken kan voorkomen, bewijst het biezondere geval waarin $\omega = c + x$ is, c een konstante zijnde. In dit geval is dus de majorantwaarde, die ons teorema aangeeft voor het getal dat, voor de rezulterende reeks P, met α korrespondeert, tevens de *juiste* waarde, waaruit blijkt dat het teorema die majorantwaarde volstrekt niet altijd te ruim levert.

Volledigheidshalve vermelden we dat men hier voor de beide operatieffunksies $f_1 = f_2 = \varphi$ heeft

$$\varphi = \sum_0^\infty{}_m \frac{(\omega - x)^m z^m}{m!} = e^{z(\omega - x)}.$$

Daar de rezulterende transmutatie eveneens een substitutie is, met de substitutiefunksie $\omega_2(x)$, moet men dus ook hebben

$$f = e^{z(\omega_2 - x)},$$

hetgeen door de formule van Bourlet werkelik wordt opgeleverd.

27. Derde voorbeeld. We nemen $T_1 = S_\omega$, $T_2 = D^{-1}$, dus $T = S_\omega D^{-1}$. Aangezien beide komponenten transmutaties zijn die we reeds in de voorgaande voorbeelden behandeld hebbén, kunnen we volstaan met een enkel punt toe te lichten. Voor het drietal van getallen α, γ, β, kunnen we hier blijkbaar nemen: $\alpha, \gamma, 2\gamma$, als γ weer bepaald wordt door (60). We laten nu de eerste uitspraak van het teorema rusten, omdat de transmutatie SD^{-1} niet zó als *enkelvoudige* transmutatie bekend is dat we, bij onze verifikatie van dat punt, naar bekende dingen kunnen verwijzen: de toetsing zou dientengevolge vrijwel neerkomen op een herhaling van het *algemene* bewijs. Maar punt 2°. kunnen we altijd op de proef stellen. We kunnen n.l., hetzij door de formule van Bourlet, hetzij langs andere weg, de rezulterende reeks P bepalen, en zien of deze aan de uitspraak, in dat punt vervat, voldoet.

We willen dus tonen dat het getal β_1 dat, voor de reeks P, met α korrespondeert, kleiner is dan

$$2\gamma = 2\alpha + 2|\omega(x_m) - x_m| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

De reeks P bepalen we hier het gemakkelikst langs *direkte* weg, d. w. z. door middel van de getransmuteerden ξ_k van de funksies x^k. Blijkbaar is

$$\xi_k = S_\omega D^{-1}(x^k) = \frac{\omega^{k+1}}{k+1}.$$

Past men met behulp hiervan formule (24) toe, dan komt er na enige herleiding

$$a_m = \frac{(\omega - x)^{m+1} - (-x)^{m+1}}{m+1}.$$

De grootheid $a_x = \overline{lim}\, |a_m|^{\frac{1}{m}}$ is dus gelijk aan

$$|\omega - x| \quad \text{of} \quad |x|,$$

al naarmate het eerste of het tweede de grootste waarde heeft. De maksimumwaarde $a(\alpha)$ van a_x in het gebied (α) is dus gelijk aan

$$|\omega(x_m) - x_m| \qquad \text{of} \qquad \alpha,$$

al naarmate de maksimummodulus van $\omega - x$ op de omtrek van (α) groter of kleiner is dan α. Men heeft dus ook in deze beide gevallen resp.

$$\beta_1 = \alpha + |\omega(x_m) - x_m| \qquad \text{of} \qquad \beta_1 = 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Nu is voor de reeks P_2, die bij S_ω behoort, het met α korresponderende getal gelijk aan het eerste bedrag, en voor de reeks P_1, die bij D^{-1} behoort, is het met α korresponderende getal gelijk aan het tweede bedrag. We kunnen dus zeggen dat voor de reeks P, die bij de kombinatie $T = S_\omega D^{-1}$ behoort, het met α korresponderende getal gelijk is aan het *grootste* van de twee getallen die voor de *afzonderlike* reeksen met α korresponderen.

In ieder geval is de verlangde verifikatie tot stand gebracht, aangezien elk van de beide bedragen (65) kleiner is dan (64).

28. Eindelik beschouwen we de kombinatie $D^{-1}S_\omega$. Ook hier kunnen we volstaan met punt 2° van het teorema te verifieren. Voor het drietal van getallen α, γ, β, kunnen we hier nemen α, 2α, β, waarbij β bepaald wordt door de formule

$$\beta = 2\alpha + | \omega(x'_m) - x'_m | \,. \qquad \qquad (66)$$

als x'_m het punt op de omtrek van (2α) is, waar $\omega - x$ zijn maksimummodulus aanneemt. De rezulterende reeks P bepalen we weer langs direkte weg; de formule van BOURLET, die in 't vorige geval nog bruikbaar, ofschoon al minder gemakkelik te hanteren zou geweest zijn, levert hier zo'n ingewikkelde vorm dat deze moeilik te overzien is. Daarentegen werkt men heel gemakkelik met de grootheden ξ. Men heeft

$$\xi_k = D^{-1} S_\omega(x^k) = D^{-1}[\omega^k(x)] = \int_0^x \omega^k(t)\, dt,$$

en hieruit met behulp van formule (24)

$$a_m(x) = (\xi - x)^m = \int_0^x [\omega(t) - x]^m\, dt$$

Nu is

$$\left| \int_0^x [\omega(t) - x]_m\, dt \right| \leq \left| \int_0^x |\omega(t) - x|^m\, dt \right| \leq |\omega(\xi) - x|^m \, |x|,$$

als, in het t-vlak, $t = \xi$ het punt op de rechte lijn van O naar x is, waar $\omega(t) - x$ zijn maksimummodulus krijgt. Men heeft dus

$$a_x = \lim |a_m|^{\frac{1}{m}} \leq |\omega(\xi) - x|$$

waaruit volgt

$$a_x \leq |\omega(\xi) - \xi + \xi - x| \leq |\omega(\xi) - \xi| + |\xi - x|,$$

of, daar x een punt van het gebied (α) is,

$$a_x \leq |\omega(x_m) - x_m| + \alpha$$

zodat ook

$$a(\alpha) \leq |\omega(x_m) - x_m| + \alpha \,.$$

Van het getal β_1 dat, voor de reeks P, met α korrespondeert, geldt dus ten slotte

$$\beta_1 \leq |\omega(x_m) - x_m| + 2\alpha$$

Vergelijkt men dit met (66) en let men op de betekenis van x_m en x'_m, dan ziet men dat $\beta_1 < \beta$, waarmee punt 2° van het teorema geverifieerd is.

Scheikunde. — De Heer Böeseken biedt een mededeeling aan van den Heer H. J. Waterman, over: *„Amygdaline als voedsel voor Aspergillus niger”.*

(Mede aangeboden door den Heer Holleman).

Puriewitsch [1]) heeft aangetoond, dat het extract van de cellen van *Aspergillus niger*, evenals emulsine, amygdaline in glukose, benzaldehyd en cyaanwaterstofzuur splitsen, terwijl het *levend mycelium* van deze schimmelsoort geheel anders op amygdaline inwerkt. Er wordt in het laatste geval geen benzaldehyd en geen HCN gevormd en in de amygdaline bevattende vloeistof ontstaan geen stoffen, die Fehling-proefvocht reduceeren. Aangetoond werd, dat hierbij het mycelium werkelijk amygdaline opneemt en verwerkt. Terwijl n.l. de hoeveelheid mycelium toenam, verminderde gelijktijdig hiermee de amygdaline-hoeveelheid in de oplossing.

Dit schijnbaar tegenstrijdige resultaat van de waarnemingen van Puriewitsch en van anderen in analoge gevallen is meermalen het onderwerp van bespreking geweest. Zoo zegt Hérissey [2]) o. m.: Indien amygdaline en dergelijke glucosiden bij de stofwisseling op soortgelijke wijze als in vitro door emulsine eerst gesplitst worden in goed assimileerbare verbindingen als glukose eenerzijds en in verbindingen, die in ’t algemeen giftig op de levende cel werken, anderzijds, dan kan men verwachten, dat deze giften onmiddellijk zullen omgezet worden in andere verbindingen. Maar zekerheid hieromtrent hebben wij niet, zegt Hérissey en hij onthoudt zich een definitief oordeel uit te spreken.

W. Kruse [3]) vindt de genoemde resultaten van Puriewitsch verrassend, erop wijzende, dat ze door andere onderzoekers nog niet bevestigd zijn.

Een en ander was voor mij aanleiding om dit onderwerp opnieuw in behandeling te nemen.

2 %-amygdaline-oplossingen, voorzien van het benoodigde anorganische voedsel, werden geënt met sporen van *Aspergillus niger*; bij 33° werd gecultiveerd. Van tijd tot tijd werd de vermindering van het amygdalinegehalte langs polarimetrischen weg bepaald en

[1]) H. Puriewitsch, Ueber die Spaltung der Glykoside durch die Schimmelpilze. Ber. d. deutsch. Bot. Ges. **16**, 368 (1898); zie ook F. Czapek, Biochemie der Pflanzen, 1ster Band, 2e Aufl. 1913, p. 363—365; F. Lafar, Handb. d. techn. Mykologie. Bd. IV, Spezielle Morphologie u. Physiologie der Hefen und Schimmelpilze, 1905—07, p. 250—251.

[2]) E. H. Hérissey, Recherches sur l’émulsine. Thèse Paris 1899.

[3]) W. Kruse, Allgemeine Mikrobiologie, 1910, p. 458.

tevens het drooggewicht van het verkregen schimmelmateriaal vastgesteld. Hiertoe werd dit, na uitwassching met H_2O, bij 105° tot constant gewicht gedroogd.

TABEL I.

Glukose als uitsluitend organisch voedsel			*Amygdaline* als uitsluitend organisch voedsel		
Samenstelling der voedingsvloeistof: 50 cM.³ leidingwater, waarin opgelost 0,15 % NH_4NO_3, 0,15 % KH_2PO_4, 0,1 % gekristalliseerd magnesiumsulfaat. Temperatuur 33°.					
A. 2 % glukose (1000 mgr.)		Aantal dagen na enting	B. 2 % amygdaline (1000 mgr.)		
Verbruikte hoeveelheid glukose in mgr.	Schimmel-substantie Mgr. droogstof		Verbruikte hoeveelheid amygdaline in mgr.		Schimmel-substantie Mgr. droogstof
1000	320	6	670	In de voedingsvloeistoffen kon geen glukose of benzaldehyd worden aangetoond.	315
		12	670, 710		298, 215
		16	635		251
1000	242, 264	38	750		271
		42	680		200
		95	niet bepaald		214, 237, 203

De waarneming van PURIEWITSCH, dat amygdaline door het levend mycelium geassimileerd wordt, terwijl vorming van nieuw mycelium ten koste van de geassimileerde amygdaline plaats vindt, werd bevestigd gevonden (tabel I).

Uit de in deze tabel vereenigde resultaten blijkt tevens, dat amygdaline een beter voedsel is dan glukose, tenminste, indien men alleen het drooggewicht in aanmerking neemt.

Dit resultaat is in overeenstemming met vroeger door mij verkregen uitkomsten, waarbij is aangetoond, dat de aanwezigheid van een benzolring in het geassimileerde organische voedsel de ten koste hiervan gevormde hoeveelheid schimmel-materiaal doet toenemen. Zoo gaf ook p. oxybenzoëzuur een grooteren oogst dan glukose [1].

Vroeger heb ik met groote waarschijnlijkheid aangetoond, dat in een bepaald geval rietsuiker, ook zonder voorafgaande splitsing in glukose en laevulose kan geassimileerd worden [2].

Er was ook hier reden om aan te nemen, dat aan de assimilatie van amygdaline geen splitsing in glukose, benzaldehyd en HCN

[1] H. J. WATERMAN, Zeitschr. f. Gärungsphysiologie, Bd. **3**. Heft 1 (1913).

[2] Zur Physiologie der Essigbakterien, Centralbl. f. Bakteriologie, 2e Abt. Bd. **38**, 451 (1913).

Remmende werking van benzaldehyd en cyaanwaterstofzuur.

Voedingsvloeistof: 50 cM.³ leidingwater, waarin opgelost 0,15 % NH_4NO_3, 0,15 % KH_2PO_4, 0,1 % gekristalliseerd magnesiumsulfaat en 2 % glukose. Temperatuur 33°.

Nrs.		Ontwikkeling Na 1	3	4	6	7	10 dagen
1		begin van groei	sterke groei, veel sporen	sterke groei, veel sporen	sterke groei, veel sporen	sterke groei, veel sporen	sterke groei, veel sporen
2	Toegevoegd 1 druppel zuiver benzaldehyd [1])	?	geen groei	?	sterke groei, bijna geen sporen		
3	Toegevoegd 3 druppels zuiver benzaldehyd [1])	geen groei	geen groei	geen groei	geen groei	geen groei	begin van groei; Vloeistof ruikt nog naar benzaldehyd
4	Toegevoegd 0,5 cM.³ eener HCN bevattende vloeistof (*p*)	?	sterke groei, vrij veel sporen	sterke groei, veel sporen	sterke groei, veel sporen	sterke groei, veel sporen	sterke groei, veel sporen
5	Toegevoegd 2 cM.³ eener HCN bevattende vloeistof (*p*)	?	sterke groei, veel sporen				
6	Toegevoegd 5 cM.³ eener HCN bevattende vloeistof (*p*)	geen groei	begin van groei	vrij sterke groei, weinig sporen			
7	Toegevoegd 0.5 cM.³ eener H_2SO_4 bevattende vloeistof (*q*)	begin van groei	sterke groei, beginsporen-vorming	sterke groei, veel sporen			
8	Toegevoegd 2 cM ³ eener H_2SO_4 bevattende vloeistof (*q*)		sterke groei, vee sporen				
9	Toegevoegd 5 cM.³ eener H_2SO_4 bevattende vloeistof (*q*)						
10		begin van groei	sterke groei, veel sporen	sterke groei, veel sporen			

[1]) Het in de verzameling aanwezige product werd door behandeling met soda-oplossing, uitwasschen met water, overstoomen en hierop volgende distillatie, geheel gezuiverd.

buiten het organisme zal voorafgaan. Benzaldehyd en in geringe mate ook HCN, vooral in grootere concentraties, werken nl. remmend op de ontwikkeling van *Aspergillus niger* ten koste van glukose (tabel II).

De oplossingen *p* en *q* werden als volgt verkregen:

p. 42,5 mgr. KCN opgelost in gedistilleerd water en aangevuld tot 100 cM³. Toegevoegd 10 cM³. 0,981 × $^1/_{10}$ N. zwavelzuur.

q. 100 cM³. gedistilleerd water, toegevoegd 10 cM³. 0,981 × $^1/_{10}$ N. zwavelzuur.

Beide oplossingen werden *onmiddellijk na bereiding* gebruikt.

De proeven 7, 8 en 9 dienden alleen om aan te toonen, dat aan de bij Nrs. 4 tot en met 6 toegevoegde hoeveelheden zwavelzuur geene remming kon worden toegeschreven.

De groeiverschijnselen, die No. 2 na 6 dagen en No. 3 na 10 dagen vertoonden, konden niet uitsluitend aan de algeheele verdamping van het benzaldehyd worden toegeschreven, omdat vloeistof No. 3 na 10 dagen nog duidelijk naar benzaldehyd rook.

Uit andere proeven is mij gebleken, dat benzaldehyd, mits in zeer geringe concentraties, als voedsel voor *Aspergillus niger* dienen kan.

Op grond van bovenstaande resultaten kan men ook verwachten, dat op amygdaline bevattende vloeistoffen, waaraan emulsine wordt toegevoegd, *Aspergillus niger* niet tot ontwikkeling komt.

Dit blijkt ook uit de proeven, die men in tabel III vindt vermeld.

TABEL III.

50 cM.³ leidingwater, waarin opgelost 0,15 % NH_4NO_3, 0,15 % KH_2PO_4, 0,1 % gekristalliseerd magnesiumsulfaat. Temp. 33°.

Nrs.	Opgelost	Ontwikkeling	
		Na 3	5 dagen
1, 2, 3	2 % glukose	vrij sterke groei, begin sporenvorming	sterk, veel sporen
4, 5	2 % glukose + 0,04 % emulsine	sterke groei, veel sporen	
6	2 % glukose + 0,1 % emulsine		
7, 8, 9	2 % amygdaline	vrij sterke groei, vrij veel sporen	
10, 11	2 % amygdaline + 0,04 % emulsine	geen groei, vloeistoffen ruiken naar benzaldehyd of(en) HCN.	als na 3 dagen[1])
12	2 % amygdaline + 0,1 % emulsine		

[1]) Na 30 dagen hebben Nos. 10, 11 en 12 nog geen groei, maar de geur van benzaldehyd of (en) HCN is niet meer waar te nemen.

Het hierbij gebezigde emulsine preparaat (MERCK) werkte niet schadelijk op de ontwikkeling van *Aspergillus* met glukose als koolstofbron, zoodat de bij de amygdaline geconstateerde remmende werking der emulsine, alleen aan de uit amygdaline gevormde splitsingsproducten benzaldehyd en HCN kon geweten worden.

Bovenstaande proeven leveren dus het bewijs, dat indien belangrijke hoeveelheden amygdaline, alvorens geassimileerd te worden, reeds buiten het organisme in glukose, benzaldehyd en HCN worden gesplitst, *Aspergillus niger* niet tot ontwikkeling komt. Tevens blijkt, dat dit vooral veroorzaakt wordt door de remmende werking van het benzaldehyd.

Dat benzaldehyd zoo krachtig remmend werkt, is op grond van zijne sterke vetoplosbaarheid (benzaldehyd is in alle verhoudingen mengbaar met olijfolie) te verwachten, mede in verband met de mogelijkheid van een snellen overgang in benzoëzuur. Benzaldehyd zal de cellen onmiddellijk overladen [1]. Alleen indien men er voor zorgt, dat dit niet geschiedt, is het geschikt als voedsel.

Dit kan men nu, zooals uit 't voorgaande is gebleken, bereiken door zeer kleine concentraties van benzaldehyd te nemen.

Amygdaline, dat tot de stoffen behoort, die geen overladingsverschijnselen veroorzaken, kan nu gerust *in de cellen* in glukose, benzaldehyd en HCN gesplitst worden, zonder dat hiermee eene remmende werking op den groei gepaard gaat. [2])

Vroeger hebben wij nl. aangetoond, dat in het algemeen *niet de aard* van de ingedrongen stof, *maar* vooral *de hoeveelheid*, de overlading en de hiermee samengaande remmingsverschijnselen van den groei veroorzaakt. Tevens is hierdoor dan een middel gegeven om narcotisch werkzame stoffen in groote hoeveelheden geleidelijk in het organisme te brengen, zonder dat dit er schade van ondervindt. Men moet de narcotisch werkzame stof dan koppelen aan een of meer andere stoffen, zoodat er een complex ontstaat, dat de cellen niet overladen kan, maar waaruit toch *in* de cel de gewenschte werkzame stof kan gevormd worden.

Dordrecht, December 1916.

---

[1]) J. BÖESEKEN en H. J. WATERMAN. Deze Verslagen 25 Nov. 1911 pg. 552; H. J. WATERMAN, Proefschrift Delft, 1913.

[2]) Indien er tegelijkertijd ook eenige splitsing buiten de cellen in genoemde stoffen plaats vindt, dan zal men natuurlijk toch remmingsverschijnselen constateeren.

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN biedt eene mededeeling aan van den Heer H. R. KRUYT: „*Stroomingspotentialen van Elektrolytoplossingen*." (Tweede mededeeling.)

(Mede aangeboden door den Heer P. VAN ROMBURGH).

1. In een vorige mededeeling[1]) heb ik een reeks metingen weergegeven over den invloed van opgeloste zouten op den stroomingspotentiaal, en wel voor de oplossingen van kalium-, barium- en aluminiumchloride, als representanten van een één-, twee resp. driewaardig kation. In de tabellen 2 en 3 (eerste twee kolommen) vindt men overeenkomstige opgaven voor *zoutzuur* en voor *p-chlooranilinechloride*. De standaard-oplossing HCl werd bereid door zoutzuurgas in „geleidbaarheids-water" te leiden, terwijl die voor het $p\,ClC_6H_4NH_2$. HCl gemaakt werd door $p\,ClC_6H_4NH_2$ (KAHLBAUM) op te lossen in water, waaraan de aequivalente hoeveelheid zoutzuur der standaardoplossing HCl was toegevoegd.

De resultaten, in tabel 2 en 3 weergegeven, toonen, dat de stroomingspotentiaal door deze eenwaardige kationen veel sterker verlaagd wordt dan door het kalium-ion (vgl. Tabel 1, eerste twee kolommen). Deze uitkomst is in overeenstemming met de ervaringen van andere onderzoekers op het gebied der elektro-endosmose (zie de geciteerde verhandeling) en begrijpelijk als wij met FREUNDLICH aannemen, dat de adsorptie der ionen hier beslissend is en het H-ion, evenals alle organische (speciaal aromatische) ionen, sterker geadsorbeerd wordt dan de ionen der lichte metalen. Vergelijkt men Tabel 2 en 4 (eerste twee kolommen) dan blijken het H ion en het *twee*waardige Ba ion vrijwel gelijke verlaging te bewerken van $\frac{E}{P}$.

2. Belangrijker dan de vergelijking der stroomingspotentialen is die der ladingen van den glaswand, vooral in verband met vraagstukken uit de kolloidchemie, die wij vroeger alreeds in deze Verslagen bespraken.[2]) Toen werd er aan herinnerd hoe volgens de theorie van HELMHOLTZ deze lading evenredig is met het produkt van den stroomingspotentiaal en het elektrisch geleidingsvermogen van de doorstroomende vloeistof.[3]) Deze lading ε hangt n.l. met het

---

[1]) Versl. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam **23**, 252 (1914).

[2]) Versl. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam **23**, 260 (1914).

[3]) De gelegenheid wordt aangegrepen om een vergissing op p. 262 der geciteerde verhandeling te herstellen. In het tweede lid der vergelijking (2) zijn de letters b en k omgewisseld; in de volgende, cursief gedrukte tekst is dan ook voor „omgekeerd evenredig" „recht evenredig" te lezen (of wel „weerstanden" door

TABEL 1.

Kaliumchloride (K)			
Conc. μ Mol p. L.	$\frac{E}{P}$	$\varkappa \cdot 10^5$	$\varepsilon \cdot 10^3$
0	ca. 350	—	—
50	102	0.65	19.9
100	57	1.3	22.4
250	23	3.2	23.0
500	12	6.4	23.3
1000	4.0	12.7	15.4

TABEL 2.

Zoutzuur (H)			
Conc. μ Mol p. L.	$\frac{E}{P}$	$\varkappa \cdot 10^5$	$\varepsilon \cdot 10^3$
0	ca. 350	—	—
25	77	0.95	22.1
50	43	1.9	24.8
100	22	3.8	25.4
250	7.7	9.5	22.1
500	3.1	18.8	17.5
1000	1.2	37.6	13.6
50000	0 geen pool-wissel	—	—

TABEL 3.

p Chloor-Anilinechloride (An)			
Conc. μ Mol p. L.	$\frac{E}{P}$	$\varkappa \cdot 10^5$	$\varepsilon \cdot 10^3$
0	ca. 350	—	—
31	114	0.4	13.9
62	65	1.0	19.6
124	26	2.1	16.6
310	12.2	3.9	14.5
500	4.9	8.0	11 8
1000	1.8	14.7	9.7

TABEL 4.

Bariumchloride (Ba)			
Conc. μ Mol p. L.	$\frac{E}{P}$	$\varkappa \cdot 10^5$	$\varepsilon \cdot 10^3$
0	ca. 350	—	—
10	139	0.24	10
25	79	0.60	14.2
50	44	1.20	16.0
100	25	2.4	18.1
200	9	4.7	12.7
1000	1.1	23.1	7.6

elektrisch moment M der dubbellaag samen:

$$\varepsilon = 4\,\pi M$$

terwijl

$$M = \frac{E}{P} \cdot \eta \cdot \varkappa$$

waarin η de viskositeit en $\varkappa$ het specifiek geleidingsvermogen is der

„geleidingsvermogen" te vervangen). In de verder volgende berekeningen behoeft echter geen wijziging in dien zin aangebracht te worden.

stroomende vloeistof. Wij kunnen de viskositeit onzer zeer verdunde vloeistoffen gelijk aan die voor water stellen, terwijl wij de $\varkappa$ voor onze oplossingen bepaalden. Wij vonden daarbij, dat onze uitkomsten slechts 1 à 2×10^{-6} reciproke Ohm verschilden met die welke men uit de proeven van KOHLRAUSCH kan berekenen en inderdaad bleek het gebruikte water een geleidingsvermogen te hebben, dat varieerde tusschen 9×10^{-7} en 2×10^{-6} Ohm [1]. In de tabellen vindt men de waarden, die zich naar KOHLRAUSCH laten berekenen; alleen voor het p chlooraniline, waarvoor de literatuur geen waarden levert, hebben wij de gekorrigeerde uitkomsten onzer eigen metingen opgegeven. [1])

Ten einde nu ε te berekenen hebben wij alles in C.G.S. eenheden omgerekend; daartoe moest met de volgende factoren vermenigvuldigd:

$$\frac{E}{P} \text{ in } \frac{\text{millivolt}}{\frac{\text{cm. Hg}}{\text{cm}^2}} \text{ met } \frac{10^{-3} \times \frac{1}{3} \times 10^{-2}}{13.6 \times 981}$$

$$\varkappa \text{ in Ohm}^{-1} \text{ met } 9 \times 10^{11}$$

terwijl wij η stelden op 0.0108.

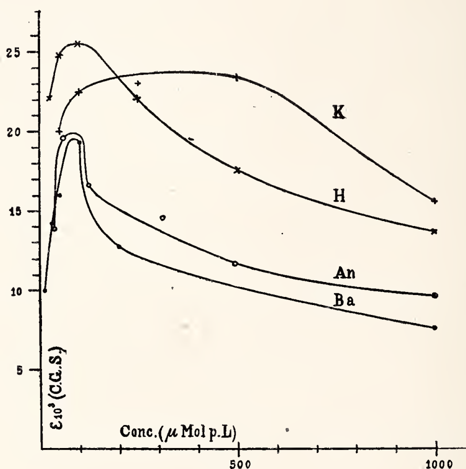


Fig. 1.

[1] Er is ook wel iets voor te zeggen niet de getallen van KOHLRAUSCH en niet getallen, die voor het geleidingsvermogen van het water gekorrigeerd zijn, te gebruiken. Dat geleidingsvermogen speelt immers ook een rol. Maar door het in *alle* proeven niet mede te tellen, wordt de vergelijking der waarden onderling eenvoudiger.

De laatste kolom der tabellen nu bevat de lading der kapillair per cm² in C.G.S. eenheden. In de figuur 1 is deze lading voorgesteld in haar afhankelijkheid van de concentratie der gebruikte vloeistof.

3. Beschouwt men deze uitkomsten nader, dan treft het, dat door alle vier elektrolyten eerst een oplading bewerkt wordt; hierna bereikt de lading een maximum en van daar af vermindert de elektrolyt haar regelmatig.

In de kolloidchemie heeft men tot nog toe hoofdzakelijk aandacht gewijd aan het feit, dat elektrolyten kontakt-potentialen verlagen en dat is dus slechts juist voor koncentraties boven zekere grens. Maar het is interessant op te merken, dat bij alle vier de hier besproken elektrolyten wel de stroomingspotentialen voordurend dalen met de koncentratie, maar dat de eigenlijke grensvlak-potentialen het eigenaardige verloop met een maximum vertoonen [1]).

Kort na het verschijnen mijner eerste verhandeling verscheen (November 1914) een interessant onderzoek van FRANK POWIS [2]) uit het laboratorium van F. G. DONNAN over den invloed van elektrolyten op de kataphorese van olie-emulsies. De overeenkomst onzer uitkomsten is bizonder frappant; wij zijn dan ook in verschillende opzichten tot gelijke konklusies gekomen [3]). Bij zijn berekening der grensvlak-potentialen olie-water en glas-water merkt hij alleen een maximum op bij het eenwaardige kation K. Bedenkt men echter, dat hij geen kleinere concentraties aan $BaCl_2$ onderzocht heeft dan 200 μ Mol p. L., dan is het uit bovenstaande figuur begrijpelijk, dat bij het maximum bij dat zout niet opmerkte. De verschillen tusschen een- en tweewaardige kationen zijn dus *kwantitatief*, niet kwalitatief.

Ook de kataphorese-onderzoekingen van ELLIS [4]) zijn met deze feiten niet in strijd. Hij vond een maximum slechts bij NaOH,

---

[1]) Of ook bij $AlCl_3$ zulk een maximum optreedt zij voorloopig in het midden gelaten. Men bedenke, dat $\frac{E}{P}$ alreeds nul is bij een concentratie van ca 0.8 μ Mol p. L. Het maximum moet dus bij een nog lagere koncentratie gelegen zijn. De gegevens in onze eerste verhandeling zijn niet voldoende om daaromtrent een zekere konklusie te nemen. Maar op analogiegronden zou men kunnen vermoeden, dat ook daar eerst een maximum wordt bereikt.

[2]) Z. f. physik. Chem. **89**, 91 (1915).

[3]) B.v. ten aanzien der z.g. onregelmatige reeksen. Ook omtrent de wijze, waarop de eindwaarden zich instellen, heb ik gegevens, die geheel overeenkomen met zijn mededeeling in hetzelfde deel pg. 179.

[4]) Z. f. physik. Chem. I **78**, 321 (1912); II **80**, 597 (1912); III **89**, 145 (1915)

maar let men weer op de onderzochte koncentraties, dan is het duidelijk, dat hij de andere maxima niet heeft kunnen opmerken.

De verhouding tusschen de vier geteekende lijnen is uit kolloidchemisch oogpunt zeer merkwaardig. Het is bekend, dat alle anorganische ionen steeds in ongeveer gelijke molekulaire koncentratie geadsorbeerd worden; een uitzondering maken het H-ion en het OH-ion (en de ionen der zware metalen). Gegeven, dat aanvankelijk een tendens der Cl-ionen tot oplading overheerscht, is het begrijpelijk, dat het K-ion daar minder tegen reageert dan de sterker adsorbeerbare ionen H· en p Cl. $C_6H_4NH^{\cdot}_3$ of het Ba··-ion, dat wel normaal geadsorbeerd wordt, doch twee maal sterker elektrische lading draagt. Het KCl levert dus een vlak maximum, dat zich tot betrekkelijk hooge concentratie doet gevoelen, bij de drie andere ionen ligt het bij 50—100 μ Mol p. L. en heeft een spitser verloop; vooral bij An· en Ba·· Overigens sluit zich hierbij ook volkomen aan de opmerking van Powis (l. c.) over den invloed van het bijbehoorende anion, alsmede Ellis' (l. c.) ervaring met het OH-ion.

Voorts is zeer opmerkenswaard, dat, wanneer men eenmaal het maximum een eindweegs gepasseerd is, de waarden der lading bij zekere koncentratie gelegen zijn in dezelfde volgorde als de overeenkomstige grenswaarden bij kolloiden. De dalende takken immers vertoonen de volgorde K·, H·, An· en Ba··, terwijl b.v. voor het As_2S_3 sol de grenswaarden [1]) zijn in m Mol p. L.

KCl 50, HCl 31, $pClC_6H_4NH_2HCl$ 1.08

$BaCl_2$ 0.69

Wil men derhalve een kwantitatief verband tusschen lading en grenswaarde, zooals ik dat in de bovengeciteerde verhandeling heb aangegeven, toetsen, dan moeten alle waarden op de dalende takken gelegen zijn. Een uitvoeriger onderzoek daarvan is dus gewenscht; het is evenwel met de tot nog toe gebruikte proefopstelling niet met voldoende nauwkeurigheid uitvoerbaar. Een apparatuur, geschikt voor metingen met hoogeren uitstroomingsdruk, staat mij thans nog niet ter beschikking, ik hoop echter binnenkort die metingen te zullen kunnen beginnen.

4. Het feit, dat de grensvlak-potentialen in zeer verdunde elektrolyt-oplossingen grooter blijken dan in zuiver water, doet zich in de kolloidchemie duidelijk gelden. De stabiliteit der suspensoiden is

---

[1]) Freundlich, Kapillarchemie pg. 351 (Leipzig 1909).

een funktie van de lading der deeltjes [1]). Men vindt in de literatuur herhaaldelijk gesproken over „stabiliseerende ionen"; het feit, dat een absoluut elektrolytvrij kolloid zeer onbestendig is, dat langdurig dialyseeren uitvlokking meebrengt, is een bekende ervaring [2]). De rol dier kleine elektrolytkoncentraties is in verband met het voorafgaande begrijpelijk: terwijl de grootere koncentraties den grensvlakpotentiaal verlagen en dus bij zijn kritische waarde uitvlokking veroorzaken, verhoogen de kleine koncentraties hem, bevorderen dus steeds de stabiliteit en zijn zelfs volstrekt onmisbaar, wanneer de grensvlakpotentiaal in zuiver water beneden den kritischen potentiaal en de maximum potentiaal op de potentiaal-koncentratie-kurve er boven ligt. Gezien hoe algemeen het feit van een noodzakelijk electrolyt-minimum voorkomt, komt men tot de konklusie, dat de grensvlak-potentialen in zuiver water waarschijnlijk zeer laag zijn. Dat de stroomingspotentiaal zoo hoog is, ligt alleen aan den enormen specifieken weerstand van die vloeistof. Wij hebben in bovenstaande tabellen ε voor water niet opgenomen, omdat het getal voor $\frac{E}{P}$, ca. 350, onzeker is. De enorme weerstand in de keten vermindert de gevoeligheid der meting kolossaal. Stelt men $\varkappa$ op 9×10^{-7}, zooals ons versch bereid water toonde, dan vindt men voor de lading van glas ten opzichte van dat water een waarde beneden 0.01 C.G.S. eenheid.

5. Nu gebleken is, hoe algemeen een maximum voorkomt in de

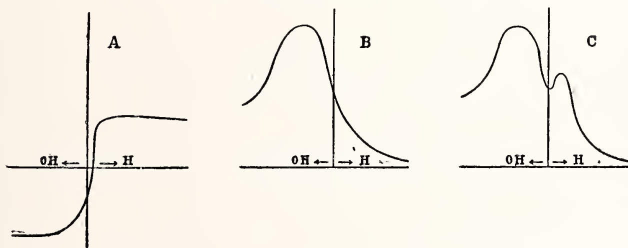


Fig. 2.

[1]) Powis, Z. f. physik. Chem. **89**, 186 (1914), heeft er m. i. terecht op gewezen, dat het snel uitvlokken niet eerst bij den potentiaal nul, maar bij een zekere „kritische" waarde begint. De uitkomsten mijner onderzoekingen hadden mij daar trouwens ook toe gebracht, zooals in fig. 1 op pg. 263 van deel **23** dezer verslagen dan ook graphisch is uitgedrukt.

[2]) Talrijke voorbeelden vindt men b.v. in The Svedberg, Methoden zur Herstellung kolloider Lösungen anorganischer Stoffe (Dresden 1909).

kurve voor de lading resp. den potentiaal in de grenslaag, is het van belang in het oog te vatten, hoezeer ons inzicht omtrent het isoelektrische punt zich in de laatste jaren gewijzigd heeft. In fig. 2 A, B en C geeft de abscissenas de concentratie aan, de ordinatenas de grensvlaklading of den kontaktpotentiaal. De ordinatenas is opgericht in het isoelectrische punt, links liggen de alkalische, rechts de zure vloeistoffen. In fig. 2A is nu schematisch weergegeven de ervaring van PERRIN [1]), toen hij het electro-endosmotisch transport aan een naphtalinemembraan meette. Fig. 2B geeft schematisch de ervaring van ELLIS [2]) weer bij zijn boven vermeld onderzoek, terwijl fig. 2C deze figuur aanvult met de uitkomsten van dit onderzoek. Of het minimum juist op de isoelectrische concentratie ligt is onzeker.

6. Er rest ons nog de vraag te stellen, wat de oorzaak der verhoogde lading is in zeer verdunde oplossingen, hoe wij hier overeenstemming kunnen vinden met het principe der selektieve ionen-adsorptie. Ook POWIS [3]) heeft zich deze vraag gesteld.

Het geval, dat een negatief geladen grensvlak negatieve ionen adsorbeert staat niet op zichzelve. Onlangs hebben FREUNDLICH en POSER [4]) in geheel ander verband op dit verschijnsel opmerkzaam gemaakt bij de bestudeering van de adsorptie van kleurstoffen aan adsorbentia met tegengestelde grensvlaklading [5]).

Zij vonden, dat bolus (negatieve grensvlaklading) geen verfstof-anionen adsorbeerde, maar dat aluinaarde (positief) wel verfstof-kationen opnam, sommige (chrysoidine, malachietgroen) zelfs zeer sterk. ,,Dies erklärt sich unsere Meinung nach einfach damit, dass die adsorbierende Oberfläche keineswegs mit dem aktiven Elektrolyten, der die Ladung bedingt — gesättigt zu sein braucht; sie kann also sehr wohl neben diesen Stoff noch weitere adsorbieren, genau wie etwa Kohle, die eine nicht zu grosse Menge Benzoesäure adsorbiert hat, noch Oxalsäure aufzunehmen vermag" (p. 318). Hetzelfde zou voor den glaswand kunnen gelden. In het isoelectrische punt is in de vloeistof slechts een miniem kleine anionenkoncentratie (OH ionen van het water) aanwezig, die door toevoeging van alkaliën zoowel als van chloriden, ook van zoutzuur, stijgen kan. Klaarblijkelijk

[1]) Journ. de chim. phys. 2 601 (1904).

[2]) l. c. spec. I pg 348 en II pg 606.

[3]) Z. f. physik. Chem. **89**, 103—105, (1915).

[4]) Koll. Beih. **6**, 297 (1914).

[5]) Trouwens MICHAËLIS en LACHS, Z. f. Electrochemie **17**, 1 (1911) zoowel als H. R. KRUYT en C. F. VAN DUIN, Koll. Beih. **5**, 269 (1914) vonden, dat de negatieve koolstof uit KCl-oplossingen meer Cl dan K adsorbeert.

is de lading tengevolge van kiezelzuurionen van de glasmassa en OH ionen uit het water niet zoo groot, of zij tracht nog te stijgen. Is het toegevoegde negatieve ion er een, dat sterk geadsorbeerd wordt, dan stijgt de potentiaal sterk. Vandaar het sterke stijgen naar de OH zijde in fig. 2C en het door POWIS gekonstateerde feit, dat het rechtsgelegen maximum hooger is naar mate het anion sterker geadsorbeerd wordt of meerbasisch [1]) is. Het uitteraard steeds vergezellende kation verzet zich natuurlijk, doordat het op zich zelve eveneens geadsorbeerd wordt en bovendien door zijn tegengestelde lading in een voor elektro-adsorbtie meer en meer bevoorrechte positie geraakt, tegen een steeds voortgaande oplading; tengevolge daarvan heeft op den duur een vermindering der lading plaats.

Opvallend blijft intusschen, dat de *feitelijk* aanwezige koncentratie der vrije hydroxylionen een rol speelt; potentieel is toch in water een bijna onbeperkte hoeveelheid van zulke ionen aanwezig, en in dit soort kwesties krijgt men gewoonlijk den indruk, dat de koncentratie der *potentieele* ionen beslissend is, daar b.v. hydrolyse-verschijnsels geen rol spelen (men denke b.v. aan de uiterst verdunde oplossingen van $AlCl_3$). [2]) Deze ervaringen vermanen intusschen tot voorzichtigheid, al valt aan den anderen kant niet te ontkennen, dat de positie van de ionen van het water niet in alle opzichten adaequaat is met die van in water opgeloste zouten. [3])

Utrecht, VAN 'T HOFF-*Laboratorium*. December 1916.

[1]) Wel is waar onderzocht POWIS KCl en $K_4Fe(CN)_6$, maar vermoedelijk geldt voor zuren hier hetzelfde als voor de neutrale zouten, in verband met de hier thans gegeven proefresultaten.

[2]) Vergl. overigens FREUNDLICH, Z. f. physik. Chem. **44**, 136 (1903).

[3]) Zooeven verscheen een verhandeling van HERSTAD, Koll. Beih. **8** 399 (1916 Zijn onderzoek over den invloed der dialyse op de grenswaarde van het goudsol (zie bv. fig. 15 en 16) zijn frappant in overeenstemming met het hier medegedeelde. De verhandeling spoort aan om de potentiaalkurve voor $HgCl_2$ te onderzoeken. Nog frappanter is een onderzoek van BEANS en EASTLACK [Journ. of the Amer. chem. Soc. **37**, 2667 (1915)] over de meest voordeelige kondities om een hoog dispers goudsol te bereiden. Men krijgt den indruk, dat de elektrolyt. koncentraties daarvoor ongeveer overeenstemmen met die, waarbij wij de grensvlaklading aan de glaskapillair maximaal vonden. Ik hoop op een en ander nader terug te komen. (NOOT *bij de korrectie toegevoegd*).

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN doet, mede namens den Heer H. R. BRUINS, eene mededeeling over: „*Experimenteele bepaling der fiktieve Oploswarmte.*" II.

1. Ruim zestien jaar geleden zijn door een van ons beiden in eene mededeeling onder bovenstaanden titel[1]) twee methoden ontwikkeld ter experimenteele bepaling der fiktieve oploswarmte van stoffen. Eerst thans is het mogelijk geworden deze methoden benevens een tweetal andere, die hier en in een volgende mededeeling ontwikkeld zullen worden, experimenteel te verwezenlijken, dank zij het inzicht, in het elektromotorisch gedrag van bepaalde amalgamen verkregen.

2. Als fiktieve oploswarmte eener stof in een bepaald oplosmiddel bij bepaalde temperatuur (en bepaalden druk) definieeren wij de hoeveelheid warmte, die wordt ontwikkeld, indien men bij die temperatuur (en dien druk) een mol dier stof oplost in een onbegrensde hoeveelheid der bij die temperatuur (en dien druk) verzadigde oplossing. Ook de namen *theoretische* oploswarmte, of *laatste* oploswarmte worden aan deze grootheid gegeven (VAN DEVENTER en VAN DE STADT)[2]). Het is deze hoeveelheid warmte, die in de thermodynamika der oplossingen eene zoo belangrijke rol speelt. Tot dusverre kon zij alleen bij benadering worden bepaald en van slechts zeer enkele stoffen heeft men haar ten naastebij leeren kennen[3]).

3. Het beginsel, waarop de hier te behandelen derde methode berust, is het volgende: Men onttrekt (of voegt toe) langs omkeerbaren, elektrischen weg aan de bij $t°$ (en den druk p) verzadigde oplossing een mol der opgeloste stof en bepaalt de verandering der chemische energie, die met die onttrekking (toevoeging) gepaard gaat. Zij is gelijk aan de gezochte fiktieve oploswarmte met hetzelfde teeken bij (toevoeging) resp. met tegengesteld teeken (bij onttrekking).

[1]) Deze Verslagen 29 Sept. 1900.

[2]) Zeitschr. f. physik. Chemie **9**, 43 (1892).

[3]) Zie b.v. v. d. WAALS SR. Zittingsverslag Kon. Akad. v. Wetenschappen Amsterdam, 28 Febr. 1885. VAN 'T HOFF, Lois de l'Équilibre chimique etc. Kongl. Svenska Vetenskaps Akad. Handl. **21**, 17 (1886). LE CHATELIER, Recherches expérimentales et théoriques sur les équilibres chimiques. Extrait des Annales des Mines, livraison Mars—Avril 1888 pag. 13 (Paris, DUNOD). BAKHUIS ROOZEBOOM Rec. des trav. chim. des Pays-Bas **8**, 123 (1889); E. VON STACKELBERG, Zeitschr. f. physik. Chemie **20**, 159 (1896); **26**, 533 (1898); **41**, 96 (1902).
Zie ook: CHANCEL en PARMENTIER, C.R. **104**, 474 en 881 (1887); LE CHATELIER C. R. **104**, 679 (1887).

4. Met behulp der volgende galvanische cellen kan dit beginsel worden toegelicht en toegepast.

Gevraagd worde de fiktieve oploswarmte te bepalen van eenig zout bij T°. Men schakelt tegen elkaar twee cellen, gekonstrueerd volgens het schema:

Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het kation	Oplossing v/h zout, verzadigd bij T°, in aanraking met de vaste phase	Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het anion	(Cel A)

en

Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het kation	Oplossing v/h zout, verzadigd bij T°, *zonder* vaste phase	Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het anion	(Cel B)

Daar beide cellen, indien hare E. M. K. zonder stroomlevering wordt gemeten (door kompensatie), omkeerbaar zijn, geldt:

$$\text{Voor A: } (E_e)_A = \left(\frac{E_c}{n\varepsilon}\right)_A + T\left(\frac{dE}{dT}\right)_A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{Voor B: } (E_e)_B = \left(\frac{E_c}{n\varepsilon}\right)_B + T\left(\frac{dE}{dT}\right)_B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hierin stelt (E_e) de elektrische, $(E_c)_A$ de chemische energie der cel A voor, terwijl $(dE/dT)_A$ de temperatuur-koëfficiënt harer E.M.K. is. ($\varepsilon = 96494$ coulombs, n de valentie van het metaal der elektrode). De beteekenis der grootheden, die op B betrekking hebben, is thans zonder meer duidelijk. Bij de temperatuur T_0, bij welke de oplossing in A juist verzadigd is (dus identiek wordt met die in B), wordt

$$(E_e)_A = (E_e)_B,$$

zoodat bij T_0 geldt:

$$\left(\frac{E_c}{n\varepsilon}\right)_A + T_0\left(\frac{dE}{dT}\right)_A = \left(\frac{E_c}{n\varepsilon}\right)_B + T_0\left(\frac{dE}{dT}\right)_B$$

of

$$\left(\frac{E_c}{n\varepsilon}\right)_B - \left(\frac{E_c}{n\varepsilon}\right)_A = T_0\left[\left(\frac{dE}{dT}\right)_A - \left(\frac{dE}{dT}\right)_B\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

5. Ten einde de beteekenis van het eerste lid dezer vergelijking te kunnen vaststellen, moet men het reaktiemechanisme der onderzochte cellen kennen.

Wij zullen dit toelichten aan het door ons bestudeerde geval,

waarin het gold de fiktieve oploswarmte van kadmiumjodide bij 18°.0 C. te bepalen.

De te onderzoeken cellen nemen dan den vorm aan:

Cd-amalgaam 10 gew. °/$_0$	Oplossing van CdI_2, verzadigd bij 18°.0C. in aanraking met de vaste phase	HgI—Hg	(Cel A)

en

Cd-amalgaam 10 gew. °/$_0$	Oplossing van CdI_2, verzadigd bij 18°.0 C. *zonder* vaste phase	HgI—Hg	(Cel B)

Men schakelt de cellen tegen elkaar en laat bij T_0 $(= 273 + 18)$ een hoeveelheid elektriciteit 2×96494 Coulombs door 't systeem stroomen.

Het reaktiemechanisme is dan:

In cel B:

1. Aan het 10 gew. °/$_0$ amalgaam wordt 1 gramatoom Cd onttrokken. Warmte-effekt W_1.

2. 1 mol. CdI_2 wordt gevormd. Warmte-effekt W_2.

3. 1 mol. HgI wordt ontleed. Warmte-effekt W_3.

4. 1 mol. CdI_2 lost op in de bij T_0 verzadigde oplossing. Warmte-effekt $(F)_{T_0}$ als wij de fiktieve oploswarmte met $(F)_{T_0}$ aanduiden.

In cel A:

1^a. Aan het 10 gew. °/$_0$ amalgaam wordt 1 gramatoom Cd toegevoegd. Warmte-effekt $- W_1$.

2^a. 1 mol. CdI_2 wordt ontleed. Warmte-effekt $- W_2$.

3^a. 1 mol. HgI wordt gevormd. Warmte-effekt $- W_3$.

4^a. 1 mol. CdI_2 wordt onttrokken aan de bij T_0 verzadigde oplossing. Warmte-effekt $-(F)_{T_0}$.

5^a. 1 mol. CdI_2 lost op in de bij T_0 verzadigde oplossing. Warmte-effekt $+(F)_{T_0}$.

De chemische energie van het geheele systeem $(E_c)_B - (E_c)_A$ is dus $+(F)_{T_0}$.

Wij vinden dus in verband met verg. (3):

$$+(F)_{T_0} = T_0 \left[\left(\frac{dE}{dT} \right)_A - \left(\frac{dE}{dT} \right)_B \right] 46105 \text{ gramkalorieën} \quad . \; . \; . \; (4)$$

Ter bepaling der fiktieve oploswarmte bij T_0 is het dus slechts noodig den temperatuurkoëfficiënt bij T_0 van de beide cellen A en B vast te stellen en de daarvoor gevonden waarden in de vergelijking (4) in te voeren.

6. Ook de verandering der fiktieve oploswarmte met de temperatuur kan met behulp van deze methode worden bepaald, waarbij echter moet worden opgemerkt, dat groote nauwkeurigheid hier slechts dàn kan worden verwacht, indien de temperatuurafhankelijkheid der E. M. K. zeer nauwkeurig is bepaald.

Differentieeren wij (4) naar T, dan vinden wij:

$$\left(\frac{dF}{dT}\right)_{T_0} = T_0\left(\frac{d^2E}{dT^2}\right)_A + \left(\frac{dE}{dT}\right)_A - T_0\left(\frac{d^2E}{dT^2}\right)_B - \left(\frac{dE}{dT}\right)_B$$

of:

$$\left(\frac{dF}{dT}\right)_{T_0} = \left[T_0\left\{\left(\frac{d^2E}{dT^2}\right)_A - \left(\frac{d^2E}{dT^2}\right)_B\right\} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{dE}{dT}\right)_A - \left(\frac{dE}{dT}\right)_B\right] 46105 \text{ gramkalorieën} \quad . \quad (5)$$

Alle grootheden rechts van het gelijkteeken kunnen door proefneming worden vastgesteld.

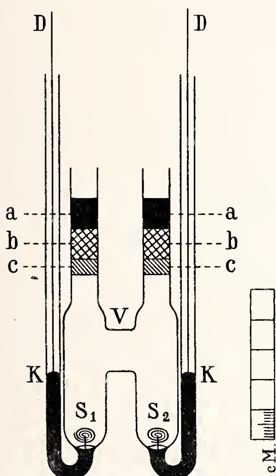


Fig. 1.

7. De gebruikte cellen hadden den vorm, die in Fig. 1 is weergegeven. Opgemerkt worde, dat de platinadraden S_1 en S_2, die in de beenen van het element spiraalsgewijs zijn opgerold, met émailglas zijn ingesmolten, zoodat eene kommunikatie tusschen de kwik in de buisjes K en de ruimte, waarin S_1 en S_2 zich bevinden, niet bestaat. D zijn koperdraden, met behulp van welke de elementen in de kompensatieschakeling van POGGENDORFF kunnen worden gebracht.

8. Omtrent de materialen, met welke de elementen worden gevuld, zullen zoo aanstonds inlichtingen worden gegeven. Hier worde er op gewezen, dat voor eene zeer zorgvuldige afsluiting der elementen, die in een thermostaat onder water werden gedompeld, behoort te worden gezorgd. Vooral wanneer het elementen geldt, die met oplossingen zonder vaste phase der opgeloste stof zijn gevuld, kan het indringen van water, resp. het verdampen daarvan uit de elementen tot groote storingen aanleiding geven, daar de E.M.K. dier cellen een funktie is van de koncentratie der oplossing. Men smelt de cellen dicht of voor-

ziet ze van een afsluiting, zooals figuur 1 aanduidt. Schijfjes kurk c, die nauw in de glazen buis passen, worden met vloeibare paraffine (b) bedekt. Nadat deze is gestold, giet men er een laag kwik (a) op, die eene volkomen afsluiting waarborgt. De later te geven cijfers (zie Tabel I) bewijzen, dat koncentratieveranderingen der oplossingen niet zijn ingetreden.

9. Omtrent de zuiverheid der gebruikte materialen het volgende:

a. Het water was zorgvuldig uit een vertinden ketel gedistilleerd.

b. Het gebruikte *kadmiumjodide* was bereid door kadmium „KAHLBAUM" [1]) (verontreiniging 0,005 °/₀, bestaande uit lood, ijzer en zink in sporen) met jodium, dat door sublimatie was gereinigd, in aanraking met water in een flesch op een schudmachine bij kamertemperatuur te schudden. Telkens wanneer de vloeistof is ontkleurd, voegt men een nieuwe hoeveelheid jodium toe. Op deze wijze werden in 3 × 24 uren ongeveer 500 gram CdI_2 verkregen. Het kadmium werd in den vorm van draaisels gebruikt. Het aldus verkregen produkt hebben wij twee malen uit water omgekristalliseerd.

c. Het *kwik* werd na voorafgaande reiniging met salpeterzuur tweemaal onder verminderden druk gedistilleerd, volgens de methode door HULETT en MINCHIN beschreven [2]).

d. Merkurojodide werd verkregen door gesublimeerd jodium met overmaat kwik onder zuiveren alkohol te wrijven en den alkohol te doen verdampen. Het aldus verkregen preparaat werd in aanraking met overmaat kwik in het donker bewaard.

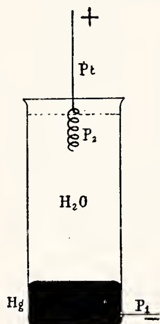


Fig. 2.

e. Kadmiumamalgaam. Wij hebben gebruik gemaakt van een amalgaam van 10 gew. °/₀ (10 gr. kadmium op 90 gr. kwik). Men verkrijgt het in zuiveren toestand door gebruik te maken van de methode, beschreven door HULETT en de LURY [3]). Ten einde groote hoeveelheden in eens te kunnen bereiden, hebben wij een toestelletje gebruikt, dat in Fig. 2 is afgebeeld.

Door den zijwand van een bekerglas van Jenaglas (inhoud 100 c.c.) wordt een platinadraad gesmolten. Men brengt de benoodigde hoeveelheid kwik in dit glas en giet daarop gedistilleerd water. Hierin steekt men eenen, spiraalsgewijs opgerolden platinadraad P_2, die met de positieve pool der elektrische lichtleiding (spanning 220 Volt) wordt verbonden. P_1 verbindt men met de negatieve pool. Het geheel wordt

[1]) Verg. MYLIUS, Zeitschr. f. anorg. Chemie **74**, 407 (1912).

[2]) Phys. Rev. **21**, 388 (1905).

[3]) Journ. Amer. Chem. Soc. **30**, 1805 (1908).

op een zandbad geplaatst, dat zacht kan worden verwarmd. Daarna wordt een afgewogen hoeveelheid kadmium (in kleine, uitgeplette stukjes) in het water geworpen. De amalgamatie treedt onmiddellijk in, het kadmium lost snel in het kwik op, terwijl oxydatie wordt belet door de zich voortdurend ontwikkelende waterstof. Is het kadmium in oplossing gegaan, dan wordt de stroom uitgeschakeld en laat men het geheel afkoelen.

10. Aangaande het vullen der beide soorten cellen (met resp. zonder vaste phase) het volgende:

Met behulp van geschikte trechters brengt men in S_1 kwik, in S_2 gesmolten amalgaam. Nadat dit laatste gestold is, legt men op de kwik der elementen, die de vaste phase zullen bevatten, een pasta (laag van 1 cm. hoogte), welke is bereid door HgI met kwik en bij kamertemperatuur ten naastenbij verzadigde oplossing van CdI_2 samen te wrijven. Verder worden de elementen van *deze* soort aangevuld met fijngewreven kristallen van CdI_2 en de zooeven genoemde oplossing. Daarna sluit men de elementen af op de wijze, in § 8 beschreven.

In de cellen, die de oplossing *zonder* vaste phase zullen bevatten, brengt men op de kwik een laag van *droog* HgI en vult ze daarna aan met de oplossing van CdI_2, die verzadigd is bij de temperatuur, voor welke men de fiktieve oploswarmte wenscht te bepalen[1]).

Ten einde te beletten, dat sporen van HgI bij het ingieten der oplossing uit het been S_1 naar het amalgaam in S_2 gaan, brengt men in de verbindingsbuis V een wattenpropje aan.

Na het afsluiten der cellen worden ze in koperdraadmonturen in den thermostaat opgehangen. Wij hebben daarvoor gebruikt den toestel, beschreven door Ernst Cohen en Sinnige[2]), die ons in staat stelde een groot aantal cellen achtereenvolgens op eenvoudige wijze in de kompensatieschakeling te brengen.

11. Met het oog op den niet zeer geringen temperatuurkoëfficiënt der onderzochte cellen, werd de temperatuur op enkele duizendste graden geregeld. Daartoe werd een toluolregulator met zeer groot reservoir (inhoud ± 400 c.c.) gebruikt.

De thermometer (volgens Beckmann) was door de Physikalisch-Technische Reichsanstalt te Charlottenburg geijkt. Kaliberfout en graadwaarde werden telkens in rekening gebracht. De geheele schaal omvatte 6 graden, de verdeeling was in $^1/_{100}$ graden. Afgelezen werd met een loupe, zoodat schatting van duizendsten mogelijk was.

12. De bepaling der E.M.K. had plaats volgens de kompensatie-

---

[1]) Men kan er mede volstaan eene oplossing te bereiden, die ten naastenbij bij die temp. verzadigd is; is de verzadigingstemp. $T_0 + \vartheta$, dan vindt men later de fiktieve oploswarmte bij *die* temp. en berekent met behulp van den temperatuurkoëfficiënt der fiktieve oploswarmte de waarde bij T_0.

[2]) Zeitschr. f. physik. Chemie **67**, 1 (1909). Fig. 4.

methode van POGGENDORFF. De gebruikte weerstanden waren door de Reichsanstalt geijkt. De aflezing van den galvanometer (DEPREZ-D'ARSONVAL), die volgens de methode van JULIUS trilvrij was opgehangen, geschiedde met kijker en schaal; 0.01 millivolt konden nog met zekerheid worden bepaald.

Als normalen deden twee WESTON-elementen (met vaste phase) dienst, die, evenals het gebruikte CLARK-element (met vaste phase) gedurende het geheele onderzoek in een thermostaat op 25°.0 C. werden gehouden. Van tijd tot tijd werd de verhouding tusschen de E.M.K. dezer normalen bepaald. Aldus werd gevonden:

Datum.	Verhouding der E.M.K. $\left(\frac{\text{CLARK}}{\text{WESTON}}\right)_{25^{\circ}.0}$
20.12.1916	1.3948
4. 1.1917	1.3947
13. 1.1917	1.3947

13. Omtrent den gang der bepalingen der E.M,K. moet nog het volgende worden vermeld: De metingen werden bij 16°, 18°, 20°, 22° en 24° uitgevoerd.

De cellen met kristallen op den bodem zijn, wat hare reproduceerbaarheid en konstantheid betreft op zijn minst even goed als het normaal WESTON-element en ware de temperatuurkoëfficiënt der kadmiumjodidecel niet ± 10 maal zoo groot als die van het WESTON-element, dan zou de jodide-cel een voortreffelijk normaalelement vormen. Ook de snelheid, met welke bij bepaalde temperatuur het elektromotorisch evenwicht wordt bereikt (eenige uren) bij cellen, die na hare konstruktie eenigen tijd (*eenige weken*) aan zichzelf zijn overgelaten geweest, laat niets te wenschen over. Beschikt men over thermostaten, die eene temperatuurregeling tot op $^{1}/_{100}{}^{\circ}$ veroorloven, dan is de kadmiumjodide-cel met vaste phase als een voortreffelijk normaalelement te beschouwen.

De cellen met verdunde oplossing nemen, wanneer zij eenigen tijd (*eenige weken*) na hare konstruktie in gebruik worden genomen, haar E.M.K. bij bepaalde temperatuur snel aan.

Tabel 1 bevat de waarnemingen; in de kolom der temperaturen zijn de gemiddelde waarnemings-temperaturen opgegeven. De cellen A (1—6) bevatten vaste phase, de cellen B (1—4) waren *zonder* vaste phase gekonstrueerd.

14. Tabel 2, afgeleid uit de gemiddelden van Tabel 1 geeft een overzicht van de gevonden E. M. K.

TABEL I.

No.	CELLEN A. Na 6 uren	Na 12 uren	Na 24 uren	Na 48 uren	Temperatuur	CELLEN B. Na 6 uren	Na 12 uren	Na 24 uren	Na 48 uren
1	0.41383	0.41384	0.41383			0.41365	0.41366	0.41366	
2	0.41385	0.41386	0.41385			0.41365	0.41365	0.41364	
3	0.41386	0.41387	0.41386			0.41365	0.41366	0.41365	
4	0.41383	0.41384	0.41383		$16^\circ.016$	0.41365	0.41366	0.41365	
5	0.41385	0.41385	0.41385						
6	0.41387	0.41387	0.41386						
1	0.41459	0.41460	0.41458	0.41459		0.41460	0.41461	0.41460	0.41459
2	0.41461	0.41461	0.41459	0.41460		0.41459	0.41460	0.41459	0.41459
3	0.41459	0.41460	0.41460	0.41459		0.41460	0.41461	0.41459	0.41458
4	0.41455	0.41455	0.41455	0.41454	$18^\circ.000$	0.41454	0.41454	0.41454	0.41457
5	0.41458	0.41459	0.41459	0.41459					
6	0.41459	0.41460	0.41459	0.41460					
1	0.41533	0.41533	0.41534			0.41551	0.41551	0.41551	
2	0.41534	0.41535	0.41535			0.41551	0.41551	0.41551	
3	0.41533	0.41533	0.41533		$20^\circ.025$	0.41551	0.41551	0.41551	
4	0.41528	0.41528	0.41528			0.41550	0.41550	0.41550	
5	0.41532	0.41533	0.41533						
6	0.41534	0.41533	0.41534						
1	0.41607	0.41607	0.41607			0.41642	0.41642	0.41643	
2	0.41608	0.41608	0.41609			0.41642	0.41642	0.41643	
3	0.41606	0.41606	0.41607		$22^\circ.032$	0.41641	0.41641	0.41641	
4	0.41601	0.41601	0.41600			0.41642	0.41641	0.41643	
5	0.41605	0.41605	0.41605						
6	0.41606	0.41606	0.41607						
1	0.41677	0.41677	0.41676			0.41730	0.41730	0.41729	
2	0.41678	0.41678	0.41678			0.41731	0.41730	0.41728	
3	0.41677	0.41676	0.41675		$23^\circ.958$	0.41730	0.41729	0.41729	
4	0.41672	0.41671	0.41672			0.41731	0.41731	0.41731	
5	0.41674	0.41674	0.41674						
6	0.41675	0.41675	0.41674						

TABEL 2.

Temp.	Cellen A gemeten	Cellen A berekend	Cellen B gemeten	Cellen B berekend
16°.016	0.41385	(0.41385)	0.41365	0.41366
18.000	0.41459	0.41459	0.41458	0.41457
20.025	0.41533	(0.41533)	0.41551	0.41550
22.032	0.41606	0.41606	0.41642	0.41642
23.958	0.41675	(0.41675)	0.41730	0.41730

Met behulp der bij 16°, 20° en 24° gemeten waarden hebben wij temperatuurformules voor de beide soorten afgeleid, die, gelijk de waarden onder „berekend" in Tabel 2 doen zien, de resultaten goed weergeven.

Voor de A-cellen vindt men:

$$(E_A)_{t^0} = 0.40782 + 0.0003869\,t - 0.0000005775 t^2 \quad . \quad . \quad (6)$$

Voor de B-cellen:

$$(E_B)_{t^0} = 0.40631 + 0.0004590\,t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

16. Uit verg. (6) volgt:

$$\left[\left(\frac{dE}{dT}\right)_A\right]_{18^0.0} = + \; 0{,}0003661 \; \frac{\text{Volt}}{\text{graad}},$$

terwijl verg. (7) levert:

$$\left(\frac{dE}{dT}\right)_B = + \; 0{,}0004590 \; \frac{\text{Volt}}{\text{graad}} .$$

Voeren wij deze waarden in verg. (4) in, dan vinden wij:

$$(F)_{18^0.0} = 291\,(0{,}0003661 - 0{,}0004590)\,46105 \text{ gramkalorieën} =$$

$$= - \mathbf{1246} \text{ gramkalorieën}.$$

Dat de fiktieve oploswarmte negatief is, stemt overeen met het feit, dat de oplosbaarheid van kadmiumjodide met de temperatuur *toeneemt*.

Utrecht, Januari 1917. VAN 'T HOFF-*Laboratorium*.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt eene mededeeling aan van den Heer J. M. BURGERS: „*Adiabatische invarianten bij mechanische systemen*". III. (Supplement N°. 41 bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden.)

(Mede aangeboden door den Heer LORENTZ).

In de beide vorige artikelen [1]) over dit onderwerp is nagegaan welke grootheden adiabatische invarianten zijn bij die mechanische systemen, welke separatie der variabelen toelaten, d. w. z. waar de momenten uitgedrukt kunnen worden door formules van den vorm:

$$p_k = \sqrt{F_k (q_k, \alpha^1 \ldots \alpha^n, a)}$$

Het verkregen resultaat was dat de „faze-integralen": $I_k = \int dq_k \, p_k$ *niet veranderen bij een adiabatische beïnvloeding* van het systeem; dit sluit zich dus aan bij de door EPSTEIN, DEBYE en SOMMERFELD ingevoerde quantenformules, die deze integralen gelijkstellen aan een geheel veelvoud van de konstante van PLANCK. Nu heeft echter SCHWARZSCHILD [2]) een anderen vorm aan de quantenformules gegeven, die algemeener is. SCHWARZSCHILD onderstelt dat men door bepaalde transformaties de oorspronkelijke koordinaten en momenten (q, p) uit kan drukken in een nieuw systeem (Q, P), dat de volgende eigenschappen bezit:

1. De Q's zijn *lineaire* funkties van den tijd;
2. de P's zijn konstanten;
3. de q's en p's zijn periodieke funkties der Q's met periode 2π; zoodat b.v.:

$$q\,(Q_1 + 2l_1\pi, \ldots \quad . \quad Q_n + 2l_n\pi) = q\,[(Q_1, \ldots Q_n)].$$

Deze Q's zijn de z.g. „hoekvariabelen" („Winkelkoordinaten"). SCHWARZSCHILD voert nu de quantenonderstellingen in:

$$\int_0^{2\pi} dQ_k \,.\, P_k = 2\pi\, P_k = n_k \,.\, h + \text{ konstante.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Bij die systemen waar separatie der variabelen mogelijk is kan men steeds hoekvariabelen invoeren, en vallen de quantenformules van SCHWARZSCHILD met die van EPSTEIN samen [3]). In het volgende

---

1) Deze Verslagen XXV (1916) p. 849, 918.

2) K. SCHWARZSCHILD, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1916, p. 548.

3) Zie b.v. P. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **51** (1916), p. 176.

zal evenwel zonder van de separatie gebruik te maken bewezen worden dat, indien aan bepaalde beneden te noemen voorwaarden voldaan is, men de grootheden P_k steeds zoo kan kiezen dat ze adiabatische invarianten zijn; dit is van belang omdat principieel de mogelijkheid van hoekvariabelen in te voeren niet tot die systemen beperkt is.

§ 1. We beschouwen een mechanisch systeem dat oplossingen van den volgenden vorm bezit: de koordinaten en momenten q en p kunnen ontwikkeld worden in trigonometrische reeksen (meervoudige Fourier-reeksen) naar sinussen en cosinussen van multipla van n variabelen $Q_1 \ldots Q_n$:

$$\left.\begin{aligned} q_k &= \sum_{-\infty}^{\infty} A^k_{m_1 \ldots m_n} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (m_1 Q_1 + \ldots m_n Q_n) \\ p_k &= \sum_{-\infty}^{\infty} B^k_{m_1 \ldots m_n} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (m_1 Q_1 + \ldots m_n Q_n) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Deze variabelen zijn *lineaire* funkties van den tijd:

$$Q_i = \omega_i t + \varepsilon_i; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

we beperken ons tot het geval dat de *middelbare bewegingen* ω_i *onderling onmeetbaar* zijn. $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ zijn n van de $2n$ integratiekonstanten; de ω_i en de koefficienten der trigonometrische reeksen zijn funkties van de parameters a die in het systeem voorkomen (massa's, sterkte van een krachtveld, enz.) en van n andere integratiekonstanten: $P_1 \ldots P_n$, welke zoo gekozen zijn dat ze tezamen met de Q's een systeem van kanonische variabelen vormen; de transformatie van de q's en p's naar de Q's en P's is een *kontakttransformatie.* [1])

We veronderstellen dat voor een zeker gebied van waarden der P's de reeksontwikkelingen gelijkmatig konvergent zijn, onafhankelijk van den tijd.

Een methode om dergelijke reeksontwikkelingen te verkrijgen is behandeld in het laatste hoofdstuk van WHITTAKER's *Analytical Dynamics* (Cambridge 1904): *Integration by Trigonometric Series.* In het geval dat de HAMILTON'sche funktie van het systeem *kwadratisch* in de oorspronkelijke koordinaten en momenten (q en p) is, staan de hoekvariabelen Q in onmiddellijk verband met de normaalkoordinaten of hoofdtrillingen van het systeem [2]); de reeksen reduceeren zich dan tot:

---

[1]) Zie b.v : WHITTAKER, Anal. Dynamics, Cambridge 1904, p. 282.

[2]) WHITTAKER, l. c. p. 399.

$$q_k = q_{k_0} + \Sigma\, \alpha_i^k \cos Q_i + \Sigma\, \beta_i^k \sin Q_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(analoog voor p_k).

§ 2. Adiabatische beïnvloeding van het systeem.

Evenals vroeger nemen we aan dat bij de oneindig langzame variatie der parameters voor de oorspronkelijke koördinaten en momenten q en p de HAMILTON'sche vergelijkingen blijven gelden. (Zie echter beneden, opmerking 4, a). Om te onderzoeken hoe de nieuwe Q's en P's zich bij een dergelijk proces gedragen, is het 't gemakkelijkst na te gaan waarin de differentiaal-vorm:

$$\Sigma p\, dq - H(q, p, a)\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

overgaat bij de transformatie van q, p naar Q, P [1]). Gelijk boven reeds werd opgemerkt is deze transformatie een *kontakt-transformatie*; wanneer de a's *niet* gevarieerd worden heeft men dus:

$$\Sigma p\, dq = \Sigma P\, dQ + dW \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waar dW de volledige differentiaal van een funktie W der Q's en P's is, die ook de a's bevatten kan. Gedurende het variatie-proces zijn de a's expliciet gegeven funkties van t; in plaats van form. (5) komt dan:

$$\Sigma p\, dq = \Sigma P\, dQ + F \cdot \frac{da}{dt} dt + DW \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

waar:

$$DW = \Sigma \frac{\partial W}{\partial Q} dQ + \Sigma \frac{\partial W}{\partial P} dP + \frac{\partial W}{\partial a} \frac{da}{dt} dt\,^{2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

F is een funktie van Q, P en a, die bij geschikte keuze der P's de Q's *alleen in den vorm van trigonometrische funkties bevat*:

$$F = \Sigma\, C_{m_1 \ldots m_n} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (m_1 Q_1 + \ldots m_n Q_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Voor het bewijs hiervan zie beneden § 3.

De differentiaal-vorm (4) gaat dus over in:

$$\Sigma P\, dQ - \{H^*(Q, P, a) - F \cdot \dot{a}\}\, dt + DW \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

waar $H^*(Q, P, a)$ verkregen wordt door in $H(q, p, a)$ voor q en p hun reeksontwikkelingen te substitueeren. De karakteristieke eigenschap der hoekvariabelen is dan dat H^* *onafhankelijk* is van de Q's:

$$H^* = H^*(P, a)\,^{3}) \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad (10)$$

Voor de Q's en P's gelden nu kanonische vergelijkingen, met als HAMILTON'sche funktie de koefficient van dt in den diff.-vorm (9) [1]).

[1]) WHITTAKER, l. c. p. 297.

[2]) Ter vereenvoudiging is de formule geschreven voor het geval dat slechts *één* der a's gevarieerd wordt.

[3]) WHITTAKER, l. c. p. 407.

Voor P_k hebben we dus:

$$\frac{dP_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial Q_k}\dot{a} = \dot{a}\left[\sum{}' \pm m_k \cdot C_{m_1 \ldots m_n} \left\{ \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix} \right\} (m_1 Q_1 + \ldots m_n Q_n) \right] \quad (11)^{1})$$

Indien, zooals in § 1 aangenomen is, tusschen de middelbare bewegingen ω_i der Q's geen rationale betrekkingen bestaan, is het tijdgemiddelde van deze uitdrukking nul; derhalve blijft gedurende het variatie-proces P_k *onveranderd.*[2]) Hiermee is dus bewezen dat de grootheden die door SCHWARZSCHILD gequantiseerd worden invariant zijn bij een adiabatische beïnvloeding van het systeem.

Daar volgens formule (10) de *totale energie* $E = H^* (P,a)$ *alleen afhankelijk is van de P's* en van de parameters, is het steeds mogelijk *door quantiseering der P's de waarde van de energie vast te leggen.*[3]) [4])

---

[1]) Met Σ' is bedoeld: sommatie over alle + en — waarden der m's, met uitsluiting van het geval dat *alle m's gelijktijdig* nul zijn.

[2]) Nauwkeuriger uitgedrukt:

Neem ter vereenvoudiging aan dat $\frac{da}{dt}$ konstant is; dan vindt men door verg. (11) term voor term te integreeren (wat geoorloofd is wegens de gelijkmatige konvergentie):

$$\delta P_k = \dot{a}\left[\sum{}' \Gamma^k_{m_1 \ldots m_n} \left\{ \begin{matrix} cos \\ sin \end{matrix} \right\} (m_1 Q_1 + \ldots m_n Q_n)\right]_{t_0}^{t_0+T}$$

Onafhankelijk van t blijft de absolute waarde van het stuk tusschen [ ] steeds beneden een eindige limiet g. Hieruit volgt:

$$|\delta P_k| < 2\dot{a} \cdot g$$

Aan den anderen kant heeft men:

$$\delta a = \dot{a} \cdot T$$

Dus is:

$$\lim_{T=\infty} \frac{\delta P_k}{\delta a} = 0$$

Deze redeneering is ook van toepassing op het bewijs gegeven in het 1e artikel over de adiab. Invar. (Deze verslagen p 855).

[3]) Indien de HAMILTON'sche funktie $H(q,p,a)$ *kwadratisch* in de q's en p's is, vindt men voor $H^*(P,a)$: $\Sigma \omega_k . P_k$ + konstante.

Wordt dus $P_k = n_k \frac{h}{2\pi}$ gesteld, dan is de totale energie van het systeem:

$$E = \frac{h}{2\pi} \Sigma \omega_k \cdot n_k + konstante.$$

[4]) Men kan aantoonen dat $-\frac{\partial H^*(P,a)}{\partial a}$ gelijk is aan het tijdgemiddelde der kracht door het systeem „in de richting van den parameter a" uitgeoefend.

§ 3. Bewijs der formule (8).

Substitueer in de uitdrukking: $\Sigma p_k \,.\, dq_k$ voor q en p de reeksontwikkelingen (1); bij de differentiatie worden de Q's, de P's en t als onafhankelijk veranderlijken beschouwd, terwijl de parameter a een expliciet gegeven funktie van t is. Men krijgt dan:

$$\Sigma\, p_k \,.\, dq_k = \Sigma\, f_1^k \,.\, dQ_k + \Sigma\, f_2^k \,.\, dP_k + f_3 \,.\, \frac{da}{dt} \,.\, dt$$

f_1^k, f_2^k, f_3 zijn Fourier-reeksen naar de Q's.

Daar bij konstante a deze substitutie een kontakt-transformatie is, moet:

$$\Sigma\, f_1^k \,.\, dQ_k + \Sigma\, f_2^k \,.\, dP_k = \Sigma\, P_k\, dQ_k + \Sigma\, \frac{\partial W}{\partial Q_k}\, dQ_k + \Sigma\, \frac{\partial W}{\partial P_k}\, dP_k \quad (12)$$

zijn. Dus is:

$$\frac{\partial W}{\partial Q_k} = -P_k + f_1^k = -P_k + \gamma_0^k(P, a) + \Sigma'\, \gamma_{m_1 \dots m_n} \begin{Bmatrix} cos \\ sin \end{Bmatrix} (m_1 Q_1 + \dots m_n Q_n)$$

en:

$$W = \Sigma\, (-P_k + \gamma_0^k)\, Q_k + \Sigma\, \delta_{m_1 \dots m_n} \begin{Bmatrix} cos \\ sin \end{Bmatrix} (m_1 Q_1 + \,.\,.\, m_n Q_n)$$

Verder heeft men:

$$\frac{\partial W}{\partial P_k} = f_2^k = -Q_k + \Sigma\, \frac{\partial \gamma_0^l}{\partial P_k}\, Q_l + \Sigma\, \frac{\partial \delta_{m_1 \dots m_n}}{\partial P_k} \begin{Bmatrix} cos \\ sin \end{Bmatrix} (m_1 Q_1 + \dots m_n Q_n)$$

In f_2^k komen de Q's alleen in cosinussen en sinussen voor; hieruit volgt dat in het rechterlid dezer vergelijking de koefficient van Q_k *nul* moet wezen, zoodat:

$$\gamma_0^k = P_k + \pi_k(a)$$

Daar de voorwaarde (12) de P's en Q's slechts tot op additieve konstanten bepaalt, kan men de grootheden $\pi_k(a)$ steeds in de P's opnemen. Onderstellen we dat dit het geval is, dan krijgen we:

$$\gamma_0^k = P_k,$$

dus:

$$W = \Sigma\, \delta_{m_1 \dots m_n} \begin{Bmatrix} cos \\ sin \end{Bmatrix} (m_1 Q_1 + \dots m_n Q_n) \,.\quad .\quad .\quad .\quad (13)$$

Nu is:

$$F = f_3 - \frac{\partial W}{\partial a}$$

een Fourier-*reeks naar de* Q's, waarmee het gestelde bewezen is.

Opmerkingen.

1. Neemt men $\pi_k(a)$ niet in P_k op, dan blijkt:

$$P_k + \pi_k(a) = \text{adiabatische invariante.}$$

2. In vele gevallen worden de P's onmiddellijk zoo ingevoerd dat de grootheden $\pi_k(a)$ nul zijn. Als voorbeelden kunnen genoemd worden:

a. systemen waarvan de funktie van HAMILTON ontwikkelbaar is naar de opklimmende machten van de q's en p's, en waar men de door WHITTAKER[1]) gegeven methode van berekening toepast;

b. systemen die separatie der variabelen toelaten: de P's worden bepaald door de formules:

$$2\pi\, P_k = I_k = \text{faze-integraal voor de koordinaat } q_k = 2\int_{\xi_k}^{\eta_k} p_k \,.\, dq_k.$$ [2])

3. Nemen we aan dat de P's zoo bepaald zijn als boven is aangegeven, zoodat W een periodieke funktie is van de Q's (form. 13). Worden de parameters niet gevarieerd, dan is:

$$\sum_l p_l \,.\, dq_l = \sum_k P_k \,.\, dQ_k + dW.$$

Integreert men deze uitdrukking van $Q_k = 0$ tot $Q_k = 2\pi$, terwijl $Q_1 \ldots Q_{k-1}\, Q_{k+1} \ldots Q_n$ en $P_1 \ldots P_n$ konstant blijven, dan volgt hieruit:

$$\int_{Qk=0}^{Qk=2\pi} \Sigma\, pdq = 2\pi Pk = \text{adiabatische invariante.}$$

[Zijn de $\pi_k(a)$ niet in de P's opgenomen, dan wordt gevonden:

$$\int_{Qk=0}^{Qk=2\pi} \Sigma\, pdq = 2\pi\,(Pk + \pi k) = \text{adiab. inv. volgens opmerking 1}].$$

EPSTEIN heeft een formuleering van de quantenonderstelling gegeven[3]) die equivalent is met:

$$\int_{Qk=0}^{Qk=2\pi} \Sigma\, pdq = n_k \,.\, h$$

en welke dus met het bovenstaande in overeenstemming is.

4. Op de volgende punten dient nog gewezen te worden:

a. Waarschijnlijk is het voldoende dat, wanneer men van $a =$

---

[1]) WHITTAKER, l.c. p. 398—408.

[2]) De konstanten ε_k die optreden in de quantenformules van SCHWARZSCHILD (l. c. p. 549, 551; zie ook boven, form. *A*) en door de grenzen der fazeruimte gegeven worden, hangen vermoedelijk met de hier ingevoerde grootheden $\pi_k(a)$ samen; dit heb ik echter niet algemeen kunnen aantoonen.

[3]) P. S. EPSTEIN, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **18**, p. **411**, 1916.

konstante tot a = gegeven funktie van den tijd overgaat, de vergelijkingen van HAMILTON slechts tot op termen van de 2e of hoogere orde in a onveranderd blijven. Dit moet nog nader nagegaan worden.

b. In het bovenstaande is aangenomen dat de middelbare bewegingen ω_i onmeetbare verhoudingen hebben (zie § 2). De ω_i zijn echter funkties van de parameters. Varieert men dus een a, dan veranderen de ω_i, en hun verhoudingen loopen door rationale waarden. Een onderzoek in hoeverre dit tot moeilijkheden aanleiding kan geven is derhalve noodzakelijk. (Deze opmerking geldt evenzoo voor de bewijzen in de beide vorige artikelen gegeven).

SAMENVATTING.

Bezit een mechanisch systeem van n vrijheidsgraden oplossingen die uitgedrukt kunnen worden in meervoudige trigonometrische reeksen naar de sinussen en cosinussen van n hoekvariabelen, wier middelbare bewegingen onderling onmeetbaar zijn, dan kan men de bij die hoekvariabelen behoorende kanonische momenten zoo kiezen dat ze *adiabatische invarianten* zijn bij een oneindig langzame verandering der parameters van het systeem. (Dat bij een adiabatische beïnvloeding de middelb. bew. veranderen en hun verhoudingen door rationale waarden loopen, verlangt nog een nader onderzoek).

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan eene Mededeeling van den Heer G. HOLST: *„Over de toestandsvergelijking van water en ammoniak.”* (Supplement No. 41*f* bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden).

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

Bij een onderzoek over de toestandsvergelijking van chloormethyl en ammoniak [1]), dat eenigen tijd geleden door mij verricht werd, bleek, dat het teeken van den coëfficient C der toestandsvergelijking van H. KAMERLINGH ONNES [2])

$$pv = RT\left(1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \frac{D}{v^4} + \frac{E}{v^6} + \frac{F}{v^8}\right)$$

voor beide stoffen verschillend was en wel voor ammoniak negatief; voor chloormethyl werd evenals voor de andere normale stoffen C

1) G. HOLST. Comm. Leiden No. 144.

2) Zie bijv. H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM. Enc. d. Math. Wiss. Art. V 10 p. 728, ook Comm. Leiden Suppl. 23.

positief gevonden. Ik heb toen de veronderstelling uitgesproken, dat ook voor andere associeerende [1]) stoffen C negatief zou zijn. Naar aanleiding daarvan heb ik voor waterdamp B en C berekend uitgaande van de getallen door M. JACOB [2]) medegedeeld in de tabellen 7 en 8 van zijn verhandeling over de soortelijke warmte en het soortelijk volumen van waterdamp. Noemt men de door JACOB gegeven drukken in KG/cm². p_j, het soortelijk volumen in m³/KG v_j en het restlid der toestandsvergelijking $1000\ v_j = \frac{4{,}706\ T}{p_j} - R_j$: R_j in dm³/KG. dan vindt men:

$$B + \frac{C}{v} + \ldots = - \frac{R_j\, p_j\, v_j}{T}\, 0{,}17080$$

waarin $v = \frac{v_j}{1{,}2440}$.

Teekent men nu $-\frac{R_j\, p_j\, v_j}{T}\, 0{,}1708$ als funktie van $\frac{1{,}2440}{v_j}$ dan vindt men een stel rechte lijnen. Uit deze teekening kan men direct B en C als funktie van de temperatuur aflezen. Zoo werden de waarden uit de volgende tabel (zie p. 1063) verkregen.

In de eerste plaats ziet men, dat voor water evenals voor ammoniak C negatief wordt en met afnemende temperatuur sterk toeneemt. Het is verder duidelijk, dat het niet eenvoudig zal zijn een formule te vinden, die C als funktie van de temperatuur voorstelt, te meer daar men geen aanknoopingspunten heeft voor de keuze van den juisten vorm van die funktie. Daar de heer W. H. KEESOM mij mededeelde, dat Mej. VAN LEEUWEN en hij de berekening van een dergelijke funktie ter hand genomen hebben, heb ik het voor verstandiger gehouden, het resultaat van deze rekeningen af te wachten, alvorens mij aan het berekenen van een zuiver empirische formule te wagen.

Voor de andere coefficient B hebben wij wel een aanknoopingspunt. Water heeft evenals ammoniak een groote dielectrische constante, die een temperatuurfunktie is.

Wij mogen dus met P. DEBYE [3]) aannemen dat het watermolekuul een electrisch moment heeft. Voor bolvormige molekulen met een

---

[1]) Verg. Enc. p. 722, waar er op gewezen wordt, dat naast de associeerende (polymeriseerende) stoffen ook andere (devieerende) voorkomen, die dergelijke afwijkingen als de eerste vertoonen.

[2]) M. JACOB. Zeitschr. Ver. D. Ing. 1912 p. 1980.

[3]) P. DEBYE. Phys. Zeitschr. (13), 97, 1912. Verg. ook J. KROO. Ann. d. Phys. (42), 1383, 1913.

TABEL 1.

t	*B*	*C*
110	—0.0157	—0.00120
120	—0.0146	—0.00095
130	—0.0135^{5}	—0.00070
140	—0.0125^{5}	—0.00053^{5}
150	—0.0117^{5}	—0.00039
160	—0.0111	—0.00023
170	—0.0103^{5}	—0.00016^{5}
180	—0.0097^{5}	—0.00011^{5}
190	—0.0091^{0}	—0.00008^{0}
200	—0.0085^{5}	—0.00006^{5}
220	—0.0075	—0.000036
240	—0.0065^{5}	—0.000024
260	—0.0058	—0.000016
280	—0.0051	—0.000014
300	—0.0045	—0.000015
350	—0.0032	—0.000013
400	—0.0022^{5}	—0.000012
450	—0.0015	—0.000010
500	—0.0010^{5}	—0.000008
550	—0.0006^{8}	—0.000006

electrischen bipool in het middelpunt heeft W. H. KEESOM [1]) de coefficient B als funktie van de temperatuur berekend. Ik wil dus de experimenteele waarden met de door KEESOM berekende vergelijken. Daartoe teekenen wij zooals in Comm. Leiden Suppl. 25 is aangegeven F als funktie van $log\, h\nu$ en $log\, B$ als funktie van $log\, T$.

Verschuift men de beide krommen zoo lang, tot dat zij over een betrekkelijk groot gebied samenvallen, dan vindt men dat bijv. $log\, B = 7{,}35 - 10$ samenvalt met $F = 0{,}065$ en $log\, T = 2{,}828$ met $log\, h\nu = 0{,}358$.

[1]) W. H. KEESOM. Comm. Leiden Suppl. 24*b*.

Evenals bij ammoniak treden ook hier bij de lagere temperaturen (beneden 250° C.) afwijkingen op.

Uit deze gegevens kan men volgens de rekeningen van KEESOM voor het bolvormig veronderstelde watermolekuul den straal en het dielectrisch moment afleiden.

Men vindt zoodoende $\sigma = 3{,}21 \cdot 10^{-8}$ cm. en $m_e = 2{,}62 \cdot 10^{-18}$ est. eenh.

Op dezelfde wijze heb ik ook voor ammoniak deze grootheden berekend, en $\sigma = 3{,}54 \cdot 10^{-8}$ cm. $m_e = 2{,}36 \cdot 10^{-18}$ est. eenh. gevonden.

De afmeting van het molekuul komt dus wat de orde van grootte betreft geheel met de op andere wijze bepaalde overeen.

Voor vloeibaar H_2O heeft DEBYE het electrisch moment berekend en geeft hiervoor $m_e = 5{,}7 \cdot 10^{-19}$ est. eenh. De overeenstemming laat dus vrij wat te wenschen over. Ik heb daarom het electrisch moment nog eens berekend uit de metingen van K. BAEDEKER [1]), die de dielectrische constante van waterdamp en ammoniak bepaald heeft. Voor waterdamp is het onderzochte temperatuurgebied maar heel klein, zoodat hieruit weinig af te leiden valt.

Volgens DEBYE geldt nu voor de dielectrische constante de volgende formule:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{a}{T}$$

waarin $a = \frac{4\pi}{3} \frac{m_e^2 N}{k}$ [2]). N het aantal molekulen in 1 cm^3., k de constante van PLANCK $1{,}346 \cdot 10^{-16}$ erg.

Het eerste lid ε_0 is aan de quasi elastische electronen te danken, het tweede aan de bipolen. Het eerste lid heb ik uit den brekingsindex berekend, waarbij ik voor water $n = 1{,}000255$ en voor ammoniak $n = 1{,}000377$ [3]) genomen heb. Deze waarden gelden wel is waar in het zichtbare spectrum, maar de onzekerheid hierdoor ingevoerd kan niet groot zijn daar ε_0 zelf maar klein is. In de volgende tabel vindt men $(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\varrho_0}{\varrho} T$ berekend. De factor $\frac{\varrho}{\varrho^0}$ is ingevoerd om steeds met het zelfde aantal molekulen te rekenen.

Men ziet uit de bovenstaande tabel dat voor het gedeelte van de dielectrische constante dat aan de bipolen te danken is, inderdaad een zelfde wet geldt als door CURIE voor de magnetische susceptibiliteit werd aangegeven. Voor water is de aansluiting niet zoo goed.

---

[1]) K. BAEDEKER Z. f. phys. Chem. (36), 305, 1901.

[2]) Zie P. LANGEVIN. Ann. Chim. Phys. (5), 70, 1905.

[3]) Recueil des Constantes Physiques.

TABEL 2.
Dielectrische constante van ammoniak.

t	ε	$\frac{\varrho}{\varrho_0}$	ε_0	$\frac{\varrho_0}{\varrho}\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)$	$\frac{\varrho_0}{\varrho}\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)T$
18.4	1.00730	0.934	1.00070	0.00707	2.06
19.0	704	931	70	681	1.99
59.4	547	814	61	597	1.98
62.1	538	808	61	591	1.98
83.8	482	757	57	562	2.005
95.3	453	733	55	543	2.00
108.4	434	707	53	539	2.055
				Gemiddeld:	2.01

Dielectrische constante van waterdamp.

140.0	1.00765	0.645	1.00033	0.01155	4.7
142.2	767	641	33	1145	4.75
143.2	736	640	33	110	4.6
145.8	694	636	32	104	4.4
148.6	648	632	32	0975	4.1
				Gemiddeld:	4.5

Ik heb om verder te kunnen rekenen echter aangenomen dat ook hiervoor deze wet geldt,[1]) en met de gemiddelde constante gerekend.

[1]) Of bij water inderdaad afwijkingen optreden, evenals bij magnetische stoffen, moet door nieuwe experimenten worden uitgemaakt.

Verder doet zich de vraag voor, waarom de voor waterdamp berekende waarde van het electrisch moment afwijkt van het door DEBYE voor de vloeistof berekende. Ik meende deze afwijking te kunnen verklaren door het feit dat DEBYE bij zijn rekening had aangenomen dat de dichtheid van de vloeistof constant bleef. Zijn formule luidt n.l.

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{T}{\varrho}\varrho_0=\frac{4\pi}{9}\frac{m^2_e N}{k}+\frac{4\pi}{3}\Sigma\frac{N_p e^2}{f_p}T=a+bT$$

waarin bij de rekening $\varrho=\varrho_0$ werd aangenomen. Brengt men nu deze correctie voor de dichtheid wel aan, dan wordt voor water a negatief, zoodat men geen reëele waarde voor het electrische moment vindt. Ik heb dan ook evenals BOGUSLAWSKI (Phys. Zeitschr. 1914 p. 283) voor vloeibaar water geen overeenstemming tusschen theorie en experiment kunnen verkrijgen.

Ook de vorm $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$ is zoodra ε belangrijk grooter dan 1 wordt weinig geschikt. Varieert ε zooals bij water ongeveer tusschen 60 en 80 dan hangt deze breuk slechts weinig van ε af.

Zoodoende vindt men voor het electrisch moment van het watermolekuul $m_e = 2,3 \; 10^{-18}$ est. eenh. en voor ammoniak $m_e = 1.52 \; 10^{-18}$ est. eenh. De orde van grootte is dezelfde als van de uit de toestandsvergelijking berekende electrische momenten. De numerische overeenstemming laat echter nog wel wat te wenschen over. Dit moet ons niet verwonderen daar de metingen van de dielectrische constante gedeeltelijk vallen in het temperatuur gebied waar de uit de aanname van bipolen berekende waarden van B van de experimenteel bepaalde afwijken en bovendien de veronderstellingen, waarop de rekeningen zijn gebaseerd, niet geheel met de werkelijkheid in overeenstemming zullen zijn.

Tenslotte wil ik nog even de aandacht vragen voor de consequenties, die uit deze rekeningen voortvloeien voor de bepalingen van PH. A. GUYE[1]) en zijn medewerkers van het molekuul gewicht van gassen uit het gewicht van een Liter onder normale omstandigheden en de compressibiliteit. Deze metingen, die met de grootste zorgvuldigheid zijn geschied, hebben in het bijzonder voor de gemakkelijk comprimeerbare gassen niet altijd tot eén voldoende overeenstemming tusschen de op deze en op andere wijze bepaalde molekuul-gewichten geleid. Uit onze berekeningen volgt 1e. dat men voor een nauwkeurige bepaling van de compressibiliteit de metingen zoo zal moeten inrichten dat zij ons in staat stellen behalve B ook C met de noodige nauwkeurigheid te bepalen[2]); 2e. dat zoodra niet op andere wijze is vastgesteld dat een gas zich als een normale stof gedraagt, men de compressibiliteit voor dat gas zelf moet bepalen.

Onze berekeningen toonen aan dat de afwijkingen van de wet der overeenstemmende toestanden, die bij verschillende stoffen reeds zeer belangrijk kunnen zijn, waar het waarden van B betreft, voor C nog veel grooter kunnen zijn, zoozelfs, dat het teeken[3]) voor stoffen met en zonder bipolen verschillend kan zijn. Het feit, dat bij enkele gassen, waaronder ammoniak, met gebruikmaking van de wet der overeenstemmende toestanden een goede waarde voor het mole-

[1]) Zie bijv. Mém. de la Soc. de Phys. de Genève (35) 1905—1907. Verder Journ. d. Chem. Phys. verschillende jaargangen.

[2]) Deze conclusie werd reeds door H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM Enc. Math. Wiss. V 10 p. 902 uitgesproken. Zij wijzen daar ook op (p. 900) de invloed der afwijkingen van de wet der overeenstemmende toestanden op de molekuul-gewichtsbepalingen.

[3]) Terwijl voor alle onderzochte stoffen B van teeken wisselt en dus een eventueel verschil in teeken bij gelijke gereduceerde temperatuur toegeschreven kan worden aan de keuze der kritische grootheden als correspondeerende, is dit bij C niet het geval. Voor normale stoffen (Zie H. KAMERLINGH ONNES Comm. Leiden N°. 74, p. 10) is C overal positief en neemt met afnemende temperatuur toe.

culair gewicht werd verkregen, ook waar dit volgens de voorafgaande beschouwing niet te verwachten was, moet dus aan het toeval worden toegeschreven. Het is dan ook niet aan te nemen dat bij andere temperaturen een even goede overeenstemming zal worden verkregen.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer A. D. FOKKER: „*De virtueele verplaatsingen van het electromagnetische en van het zwaartekrachtsveld bij de toepassing van het variatiebeginsel van* HAMILTON".

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES).

Onlangs heeft prof. LORENTZ in eenige verhandelingen [1]) het beginsel van HAMILTON toegepast om, in EINSTEIN's theorie der zwaartekracht, de hoofdvergelijkingen der theorie af te leiden uit een enkele variatiestelling. Uitgaande van een invariante beginvergelijking kon hij tot conclusies komen, die wederom in invariante vergelijkingen neergeschreven werden. In den loop der redeneering was het echter niet noodig de vergelijkingen bij elken stap invariant te houden, integendeel, van veel nut bleek een kunstgreep, bestaande in het kiezen van een op bijzondere wijze bepaalde virtueele verplaatsing, waarbij geen acht geslagen werd op de eischen der invariantie.

Het blijkt nu mogelijk, om bij de afleidingen doorloopend aan de eischen der invariantie te voldoen en wel op eene wijze waarbij het meetkundige karakter, dat de tensor der tien gravitatiepotentialen en de tensor der vier electrodynamische potentialen als gerichte grootheden hebben, ten volle tot zijn recht komt. (§ 12 e.v.) Tevens ziet men op een nieuwe manier de tensoren der spanningen, impuls en energie uit de variatierekening te voorschijn komen.

In de volgende paragrafen hoop ik dit te doen zien. Dank zij de aangehaalde verhandelingen en eenige andere, zal ik mij op vele punten mogen beperken tot een beknopte aanduiding zonder uitvoerige toelichting.

Het variatieprincipe.

1. Voor een onder inwerking eener kracht vallend stoffelijk deeltje luidt het beginsel van HAMILTON:

[1]) H. A. LORENTZ, *Het beginsel van* HAMILTON *in* EINSTEINS *theorie der zwaartekracht*, Kon. Ac. v. Wet. Amsterdam, XXIII, p. 1073. *Over* EINSTEINS *theorie der zwaartekracht*, I, II, III, Ibid., XXIV, p. 1389, 1759, XXV, p. 468.

$$0 = \delta \int_1^2 - m\, ds + \int_1^2 \Sigma(p)\, k_p\, \delta r^p\, ds,$$

waarbij m de massacoefficiënt van het deeltje, ds de booglengte is van de wereldlijn, door het deeltje doorloopen in de met vier parameters x_1, x_2, x_3, x_4 beschreven wereld; waarbij k_p ($p = 1, 2, 3, 4$) voorstelt de viertallige vector der op het deeltje inwerkende kracht en δr^p ($p = 1, 2, 3, 4$) aangeeft de componenten der virtueele verplaatsingen. Bij de variatie der beweging correspondeert aan elk punttijdstip x_m ($m = 1, 2, 3, 4$) der ongevarieerde baan een punttijdstip $x_m + \delta r^m$ ($m = 1, 2, 3, 4$) der gevarieerde baan. Begin- en eindpunt der baan blijven ongevarieerd. Als gewoonlijk nemen wij aan

$$ds^2 = \Sigma(ab)\, g_{ab}\, dx_a\, dx_b,$$

waarin de g_{ab} ($a, b = 1, 2, 3, 4$, $g_{ab} = g_{ba}$) de gravitatiepotentialen zijn.

Wanneer het deeltje een electrische lading e heeft, die het onder den invloed stelt van een aanwezig electro-magnetisch veld, dan kan men daarmee rekening houden door te schrijven

$$0 = \delta \int_1^2 (- m ds + \lambda \Sigma(l)\, e q_l\, dx_l) + \int_1^2 \Sigma(p)\, k_p\, \delta r^p ds.$$

Hier stellen q_l ($l = 1, 2, 3, 4$) voor de electrodynamische potentialen, vier van punt tot punt veranderende grootheden die het veld bepalen. λ stelt voor eene verhoudingsconstante, die bepaald wordt door de keuze der eenheden van massa en lading, waarin m en e zijn uitgedrukt. Onder k_p zijn nu de electrische krachten niet meer begrepen.

2. Toegepast op een afgesloten gebied der vierdimensionale wereld luidt het beginsel van HAMILTON:

$$0 = \delta \int L\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 + \int \Sigma(p)\, K_p\, \delta r^p\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \quad \ldots \quad (1)$$

Hier staat K_p voor de p^e komponent der per volumeneenheid op het stelsel uitgeoefende kracht. Aangezien $\sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$ een scalair is (g de determinant der g_{ab} zijnde), moet niet K, maar $K/\sqrt{-g}$ een covariante vector zijn, die wij voortaan met k zullen aanduiden. Om dezelfde reden zal niet L, maar $L/\sqrt{-g}$ een scalair moeten zijn, opdat de variatiestelling invariant zij uitgedrukt. Wij nemen aan, dat L zal bestaan uit verschillende afzonderlijke stukken voor het zwaartekrachtsveld, voor de materie, voor het electro-magnetische veld en den electrischen convectiestroom.

Bouw der funktie van LAGRANGE.

3. De bijdrage van het *gravitatieveld* tot L noemen wij $\sqrt{-g}\, H$. Men weet, dat men voor H heeft te nemen $G/2\varkappa$, waarin G de scalair is die de mate der kromming van de veldfiguur geeft en $\varkappa$ de gravitatieconstante. Met behulp van het symbool van RIEMANN kan men G als volgt uitdrukken:

$$G = \Sigma(im)\, g^{im}\, G_{im},$$

$$G_{im} = \Sigma(kl)\, g^{kl}\, (ik, lm),$$

$$(ik, lm) = \tfrac{1}{2}\,(g_{im,kl} + g_{kl,im} - g_{il,km} - g_{km,il}) +$$

$$+ \Sigma(ab)\, g^{ab} \left\{ \begin{bmatrix} im \\ a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} kl \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} km \\ b \end{bmatrix} \right\}.$$

g^{ab} $(a, b = 1, 2, 3, 4)$ zijn de algebraïsche complementen der g_{ab}; $g_{im,kl}$ beteekent de tweede afgeleide naar x_k en x_l van g_{im}, en de symbolen van CHRISTOFFEL beteekenen

$$\begin{bmatrix} im \\ a \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\,(g_{ia,m} + g_{ma,i} - g_{im,a}).$$

Later zullen wij ook nog wel eens gebruik maken van de schrijfwijze g^{ab}_{c} en g^{ab}_{cd} voor de eerste, onderscheidenlijk tweede afgeleide van g^{ab} naar x_c en x_d.

4. Voor de bijdrage der *stoffelijke materie* tot L schrijven wij $\sqrt{-g}\, R$. Om te weten wat wij voor $\sqrt{-g}\, R$ hebben te stellen moeten wij nagaan hoe het integraalelement $-m\, ds$, dat in de variatiestelling voor de beweging van een enkel stoffelijk deeltje staat kan worden uitgebreid tot $\sqrt{-g}\, R\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ voor de materie die wij beschouwen willen. LORENTZ heeft aangegeven [1]) wat $\sqrt{-g}\, R$ wordt voor een continu veranderlijke strooming van incohaerente stoffelijke punten, of voor een algemeener geval waarin tusschen de punten nog zekere moleculaire krachten zouden werken.

Voor een ideaal gas zal $\sqrt{-g}\, R$ zijn de som van de boogelementen der wereldlijnen die per tijdseenheid doorloopen worden door de moleculen die men per volumeneenheid aantreft, elk element vermenigvuldigd met $-m$, de negatief gerekende massa van het molecuul dat het element doorloopt. Kent men de functie, die de snelheidsverdeeling der moleculen aangeeft, dan kan men daarmede ook $\sqrt{-g}\, R$ aangeven.

Omdat men weet, dat de hoeveelheid van beweging voor een molecuul met de massa m is

---

[1]) l. c. XXII p. 1076, XXV, p. 478.

$$i_a = -m\,\Sigma\,(b)\,g_{ab}\,\frac{dx_b}{ds}$$

voor $a = 1, 2, 3$, en dat de energie is $-i_4$, kan men voor een ideaal gas ook dadelijk de uitdrukkingen opstellen voor de trekspanningen, de hoeveelheid van beweging (impuls) en de energie per volumeneenheid, en den energiestroom. Zonder in details te treden met invoering eener verdeelingsfunctie vermeld ik slechts het schema der noteering:

$$\begin{matrix} \sqrt{-g}\,T_1^{\,1} & \sqrt{-g}\,T_1^{\,2} & \sqrt{-g}\,T_1^{\,3} & \sqrt{-g}\,T_1^{\,4} & & X_x\;X_y\;X_z - I_x \\ \sqrt{-g}\,T_2^{\,1} & \sqrt{-g}\,T_2^{\,2} & \sqrt{-g}\,T_2^{\,3} & \sqrt{-g}\,T_2^{\,4} & & Y_x\;Y_y\;Y_z - I_y \\ \sqrt{-g}\,T_3^{\,1} & \sqrt{-g}\,T_3^{\,2} & \sqrt{-g}\,T_3^{\,3} & \sqrt{-g}\,T_3^{\,4} & (=) & Z_x\;Z_y\;Z_z - I_z \\ \sqrt{-g}\,T_4^{\,1} & \sqrt{-g}\,T_4^{\,2} & \sqrt{-g}\,T_4^{\,3} & \sqrt{-g}\,T_4^{\,4} & & S_x\;S_y\;S_z\;E. \end{matrix} \qquad (2)$$

Hierbij is ondersteld, dat wij ons bedienen van de coördinaten x, y, z en t [1]. T_a^m is een gemengde tensor. Wij kunnen hem den *dynamischen* tensor noemen. Hij is niet symmetrisch. Wel is symmetrisch de covariante tensor

$$T_{ab} = \Sigma\,(m)\,g_{mb}\,T_a^m.$$

Wij merken nog even op dat de som der diagonaalcomponenten is

$$\Sigma\,(a)\,\sqrt{-g}\,T_a^a = -\sqrt{-g}\,R.$$

5. Voor de bijdrage tot L van de *electrische strooming* en het electromagnetische veld schrijven wij twee stukken neer, $\lambda\sqrt{-g}\,S$ en $\lambda\sqrt{-g}\,M$. λ is dezelfde verhoudingsconstante als in § 1.

Voor $\sqrt{-g}\,S\;dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ nemen wij de uitbreiding van het integraalelement $\Sigma\,(l)\,e\,\varphi_l\,dx_l$ dat fungeerde in de variatiestelling voor een enkel geladen deeltje. Maken wij de uitbreiding zoo, dat wij overgaan tot een continuen electrischen convectiestroom, dan vindt men

$$\sqrt{-g}\,S = \Sigma\,(m)\,\sqrt{-g}\,W^m\,\varphi_m.$$

$\sqrt{-g}\,W^m$ $(m = 1, 2, 3, 4)$ stelt voor wat men gewoon is aan te duiden met ϱv_x, ϱv_y, ϱv_z en ϱ. De factor $\sqrt{-g}$ komt, hier als elders, daarvandaan, dat wij de verschillende grootheden nemen per tijdseenheid en per volumeneenheid naar coördinatenmaatstaf, en niet volgens natuurlijke maat. Het verdient de aandacht, dat $\sqrt{-g}\,W^m$ bij verandering der g_{ab} niet verandert; dit is in overeenstemming daarmee, dat ook voor een enkel geladen deeltje de term $\Sigma\,(m)\,e\varphi_m dx_m$ onafhankelijk is van de gravitatiepotentialen.

[1]) X_x, Y_x, Z_z enz. zijn de krachten, door de omgeving in de X, Y, of Z richting uitgeoefend op dat vlakje van een eenheidskubus welks naar buiten gerichte normaal valt in de richting der door den index aangewezen as.

Voor het *electromagnetische veld* bouwen wij den scalair op de volgende wijze op. Uit de potentialen leiden wij de covariante veldsterkten af

$$f_{pq} = \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_p} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_q}.$$

Uit deze vormen wij de contravariante veldsterkten

$$F^{ab} = \Sigma\,(mn)\,g^{am}\,g^{bn}\,f_{mn}.$$

Ten slotte vormen wij den scalair

$$M = -\tfrac{1}{4}\,\Sigma\,(abmn)\,g^{am}\,g^{bn}\,f_{ab}\,f_{mn}\,,$$
$$= -\tfrac{1}{4}\,\Sigma\,(ab)\,F^{ab}\,f_{ab}$$

Wij merken voorts hierbij op, dat

$$\frac{\partial M}{\partial f_{ab}} = -\tfrac{1}{2}\,F^{ab}, \text{ en } \frac{\partial M}{\partial g^{am}} = -\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(bn)\,g^{bn}\,f_{ab}\,f_{mn}.$$

SCHWARZSCHILD [1]) heeft reeds den integrand $\sqrt{-g}S$ in de variatiestelling gebruikt. Ik verneem dat voor twee maanden ook de heer TRESLING [2]) aan de Academie mededeelde hoe deze term in het principe van HAMILTON kan worden gebruikt.

De term $\sqrt{-g}M$ stemt overeen, behalve in teeken, met wat LORENTZ gebruikte, die ψ_{ab} schrijft voor wat hier $\sqrt{-g}F^{ab}$ heet, en $\overline{\psi}_{ab}$ voor f_{ab}.

Variaties der veldgrootheden.

6. In de eerste plaats willen wij beschouwen de variatie, die men krijgt door het *electrische veld* in dier voege te veranderen, dat men overal de potentialen φ_m met een bedrag $\delta\varphi_m$ wijzigt. De $\delta\varphi_m$ $(m = 1, 2, 3, 4)$ zullen oneindig kleine doorloopende functies zijn der coördinaten.

De variatie wordt [3])

$$\delta \int L\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4 = \lambda \int dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,\Sigma\,(mq) \left[\frac{\partial}{\partial x_q} (\sqrt{-g}\,F^{mq}\,\delta\varphi_m) + \right.$$
$$\left. + \,\delta\varphi_m \left\{ \sqrt{-g}\,W^m - \frac{\partial}{\partial x_q} (\sqrt{-g}\,F^{mq}) \right\} \right].$$

---

[1]) K. SCHWARZSCHILD, *Zur Elektrodynamik. I.* K. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys. 1903.

[2]) J. TRESLING, *De vergelijkingen der electronentheorie in een gravitatieveld van* EINSTEIN *afgeleid uit een variatieprincipe. De principale functie der electronenbeweging.* Kon. Ac. v. Wet. Amsterdam, Nov. 1916.

[3]) Men bedenke, dat $\delta f_{mq} = \frac{\partial \delta\varphi_q}{\partial x_m} - \frac{\partial \delta\varphi_m}{\partial x_q}$, en dat $F^{mq} = -F^{qm}$. Vergel. TRESLING, l.c.

Wanneer aan de grenzen van het vierdimensionaal gebied de δq_m nul zijn, maar binnen het gebied willekeurig, verlangt het principe van HAMILTON dat

$$\sqrt{-g}\, W^m = \Sigma\,(q)\,\frac{\partial}{\partial x_q}(\sqrt{-g}\, F^{mq}), \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \quad . \quad (3)$$

Dit zijn de vier *veldvergelijkingen* in invarianten vorm samengetrokken.

7. De tweede variatie die wij beschouwen is een variatie van het *zwaarteveld*, die in elk punttijdstip van het gebied bepaald worde door de veranderingen δg^{ab} der grootheden g^{ab}.

Men kan, voor het geval de materie een ideaal gas is, rechtstreeks afleiden, dat daarbij $\sqrt{-g}\, R$ verandert met

$$\delta\,(\sqrt{-g}\, R) = \Sigma\,(abm)\,\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ma}\, T_b^m\, \delta g^{ab}\ {}^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

Voor de variatie van $\sqrt{-g}\, M$ vindt men, in aanmerking nemende dat

$$\delta\sqrt{-g} = -\,\Sigma\,(ab)\,\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ab}\, \delta g^{ab},$$

$$\delta M = -\,\Sigma\,(abdn)\,\tfrac{1}{2}\, g^{dn} f_{ad} f_{bn}\, \delta g^{ab} = -\tfrac{1}{2}\,\Sigma(abcdmn)\, g_{am}\, g^{cm}\, g^{dn} f_{cd} f_{bn}\, \delta g^{ab},$$

$$\delta M = -\,\Sigma\,(abmn)\,\tfrac{1}{2}\, g_{am}\, F^{mn} f_{bn}\, \delta g^{ab},$$

zonder moeite

$$\lambda\,\delta\,(\sqrt{-g}\, M) = \Sigma\,(abm)\,\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ma}\, E_b^m\, \delta g^{ab} \quad . \quad . \quad . \quad (4b)$$

waarbij gesteld is

$$E_b^m = -\,\lambda\Sigma\,(n)\, F^{mn} f_{bn} - \lambda\delta_b^m\, M.$$

δ_b^m is de gemengde tensor welks componenten 1 of nul zijn alnaardien $m = b$ of $m \neq b$. Ook willen wij hier nog invoeren de notatie $E_{ab} = \Sigma(m)\, g_{am}\, E_b^m$.

Wij zullen later zien dat $\sqrt{-g}\, E_b^m$ op dezelfde manier de trekspanningen, enz. in het electrische veld moet aangeven als $\sqrt{-g}\, T_b^m$ dat doet in de materie (§14).

De variatie van $\sqrt{-g}\, S$ zal, om de hooger vermelde reden, nul zijn.

8. Wanneer g^{ab} verandert met δg^{ab}, veranderen g_c^{ab} en g_{cd}^{ab} met $\frac{\partial\delta g^{ab}}{\partial x_c}$ en $\frac{\partial^2\delta g^{ab}}{\partial x_c \partial x_d}$. Beschouwen wij nu $\sqrt{-g}\, H$ als functie van de g^{ab} en hun afgeleiden, dan wordt de variatie van $\sqrt{-g}\, H$:

$$\delta(\sqrt{-g}\, H) = \Sigma\,(abcd)\left[\delta g^{ab}\left\{-\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ab}\, H + \sqrt{-g}\,\frac{\partial H}{\partial g^{ab}} - \frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\sqrt{-g}\,\partial H}{\partial g_c^{ab}}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x_c \partial x_d}\left(\frac{\sqrt{-g}\,\partial H}{\partial g_{cd}^{ab}}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_c}\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial H}{\partial g_c^{ab}}\,\delta g^{ab}\right) +$$

[1]) Vgl. LORENTZ, l.c. XXV, p. 476, form. (63).

$$+\frac{\partial}{\partial x_d}\left(\frac{\sqrt{-g}\,\partial H}{\partial g^{ab}_{cd}}\,dg^{ab}_{c}\right)-\frac{\partial}{\partial x_c}\left\{dg^{ab}\frac{\partial}{\partial x_d}\left(\frac{\sqrt{-g}\,\partial H}{\partial g^{ab}_{cd}}\right)\right\}\Bigg]. \quad . \qquad (4c)$$

Men kan bewijzen[1]), dat indien $H = G/2\varkappa$,

$$\frac{\partial H}{\partial g^{ab}}-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\sqrt{-g}\,\partial H}{\partial g^{ab}_{c}}\right)+\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial^2}{\partial x_c \partial x_d}\left(\frac{\sqrt{-g}\,\partial H}{\partial g^{ab}_{cd}}\right)=\frac{1}{2\varkappa}G_{ab} \qquad (4d)$$

Vat men alles samen, en kiest men de variaties dg_{ab} willekeurig met slechts deze beperking, dat zij mitsgaders hun eerste afgeleiden, aan de grenzen van het gebied verdwijnen, dan verlangt het principe van HAMILTON, dat

$$0=\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,\Sigma\,(abm)\left[\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{am}\,(T^{m}_{b}+E^{m}_{b})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}\,(G_{ab}-\tfrac{1}{2}\,g_{ab}\,G)\right\}dg^{ab}\right]. \quad . \qquad (5)$$

Hieruit volgen de bekende *veldvergelijkingen voor het zwaarteveld:*

$$G_{ab}-\tfrac{1}{2}\,g_{ab}\,G=-\varkappa\,(T_{ab}+E_{ab}) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (6)$$

Men ziet de afkomst van den tweeden term van het eerste lid: hij komt te voorschijn door de variatie van $\sqrt{-g}$ in de principale functie.

Virtueele verplaatsingen der materie.

9. De derde variatie die wij beschouwen zal hierin bestaan dat wij aan de *moleculen* van ons gas *virtueele verplaatsingen* geven. Wij kiezen die niet voor elk molecuul individueel verschillend, maar aan alle moleculen die zich op zeker oogenblik in een bepaald volumenelement bevinden, geven wij dezelfde virtueele verplaatsing, gekarakteriseerd door den oneindig kleinen vector dr^p (vgl. § 1), die een willekeurige functie mag zijn der coördinaten. De variatie levert rechtstreeks

$$\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,\Sigma\,(almp)\left[\frac{\partial}{\partial x_m}\left\{\sqrt{-g}\,(-\delta^{m}_{a}\,R-T^{m}_{a})\,dr^a\right\}+\right.$$
$$\left.+\,dr^p\left\{\sqrt{-g}\,k_p+\frac{\partial}{\partial x_m}(\sqrt{-g}\,T^{m}_{p})-\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{al}\frac{\partial g_{am}}{\partial x_p}\,T^{m}_{l}\right\}\right] \quad . \qquad (7)$$

Zijn de dr^p nul aan de begrenzing, dan eischt het principe van HAMILTON dat de integraal steeds verdwijnt, en dus

$$\sqrt{-g}\,k_p+\Sigma\,(aml)\left\{\frac{\partial}{\partial x_m}(\sqrt{-g}\,T^{m}_{p})-\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{al}\frac{\partial g_{am}}{\partial x_p}\,T^{m}_{l}\right\}=0 \quad . \qquad (8)$$

Dit zijn de *bewegingsvergelijkingen voor de materie,* in bijna invarianten

[1]) Vgl. LORENTZ, l.c. XXV, p. 472.

vorm. k_p is een covariante vector en de vorm tusschen de acoladen is $\sqrt{-g}$ maal de covariante divergentie van den gemengden tensor T_p^m.

10. Hieraan sluit zich de *virtueele verplaatsing* van den *electrischen stroom* aan. Ondergaat elk electrisch deeltje een verschuiving δr^p, dan is de variatie van de stroomsterkte, die men voor en na in hetzelfde punttijdstip aantreft:

$$\delta (\sqrt{-g}\, W^m) = \Sigma (a) \frac{\partial}{\partial x_a} (\sqrt{-g}\, W^a \,\delta r^m - \sqrt{-g}\, W^m \,\delta r^a) \,,$$ [1]

hetgeen aanleiding geeft tot een variatie in den integraal:

$$\int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \,\Sigma (map) \left[\frac{\partial}{\partial x_m} \lambda \left\{ \sqrt{-g}\, (W^m \varphi_a - \delta_a^m S)\, \delta r^a \right\} + \right.$$

$$\left. + \,\delta r^p \left\{ \sqrt{-g}\, k_p + \lambda \sqrt{-g}\, W^m \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_p} \right) - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_m} \right) \right\} \right] \quad . \quad (9)$$

Verdwijnt δr^p aan de grens van ons gebied, dan moet dus

$$K_p + \Sigma_{(m)} \sqrt{-g}\, W^m \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_p} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_m} \right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Dit kan men noemen de „*bewegingsvergelijking*” *voor den electrischen stroom*. Men kan zeggen dat de tweede term de kracht voorstelt, door het electrische veld op den drager der lading verricht.

Virtueele verplaatsingen der velden.

11. Alvorens de variatie te berekenen die men krijgt door eene virtueele verplaatsing van het electromagnetische veld, of van het veld der zwaartekracht, zullen wij vaststellen, wat wij daaronder moeten verstaan.

Ongetwijfeld kan men zeggen: een virtueele verplaatsing aan het electromagnetische veld geven beteekent aannemen, dat de vier potentialen die men aanvankelijk aantreft in het punttijdstip $x_p\, (p = 1, 2, 3, 4)$ na de verplaatsing zullen gevonden worden in het punttijdstip $x_p + \delta r^p\, (p = 1, 2, 3, 4)$. Hieruit volgt dat ik voor en na in een en hetzelfde punttijdstip een variatie $\delta \varphi_m$ opmerk,

$$\delta \varphi_m = - \Sigma (p) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_p} \delta r^p \,.$$

Het blijkt echter onmiddellijk, dat hoewel φ_m een covariante vector is, $\delta \varphi_m$ dit niet is, en men dus met den invarianten integraal van Hamilton zou gaan vergelijken een gevarieerden, die niet meer invariant is.

[1]) Vgl. Lorentz, l.c. XXIII, p. 1077.

Op hetzelfde bezwaar stuit men, indien men als virtueele verplaatsing van het zwaarteveld definieert het overbrengen van een stel waarden der g_{ab} van het punttijdstip x_p naar een naburig $x_p + \delta x^p$. Men krijgt geen covariante variatie wanneer men dienovereenkomstig schrijft

$$\delta g_{ab} = -\Sigma(p) \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_p} \delta x^p .$$

12. Beschouwen wij de meetkundige beteekenis der tensorcomponenten g_{ab} nader, dan merken wij op dat zij met elkander bepalen een oneindig kleine kwadratische driedimensionale uitgebreidheid, de indicatrix om elk punttijdstip der veldfiguur, door middel van de vergelijking

$$\varepsilon^2 = \Sigma(ab)\, g_{ab}\, dx_a\, dx_b.$$

Het geheele zwaarteveld, kan men zeggen, wordt voorgesteld door de verzameling der indicatrices om de diverse punttijdstippen beschreven, evenals in elementaire beschouwingen een electrisch veld wordt beschreven door de krachtlijnen van FARADAY.

Een virtueele verplaatsing van het zwaarteveld moet dan ook beteekenen een verplaatsing van de verzameling dier indicatrices, en wel eene verplaatsing waarbij de onderlinge ineenvoeging en doorsnijding der indicatrices niet wordt verstoord.

Men denke zich twee naburige indicatrices h en j, die elkaar in de figuur i doorsnijden. Nu kan men afzonderlijk aan de indicatrix h en de indicatrix j en ook aan de figuur i de verplaatsing geven die bij haar punten behoort. Wij verlangen dat dan de verschoven figuur i' weer de doorsnijding zal zijn van de verschoven indicatrices h' en j'.

Dit wordt niet bereikt door de in de vorige paragraaf beschreven variatie. Daarbij zouden alle punttijdstippen eener indicatrix een en dezelfde virtueele verplaatsing ondergaan, gelijk aan die welke bij haar middelpunt behoort, terwijl onze eisch vordert dat de virtueele verplaatsing van een punttijdstip eener indicatrix bepaald worde door de δx^p zooals die in dat punttijdstip zelf zijn.

Wanneer de δx^p niet constant zijn, zal de virtueele verplaatsing van het veld in 't algemeen niet alleen een zekere verschuiving, maar ook een rotatie der indicatrices beteekenen.

Soortgelijke beschouwingen gaan ook op voor de virtueele verplaatsing van het electromagnetische veld. De potentialen, die samen een covarianten tensor van den eersten rang vormen, stellen in elk punttijdstip voor een met $\sqrt{-g}$ vermenigvuldigden trivector, dus (in het oneindig kleine) een zekere lineaire driedimensionale ruimte.

13. Ziehier hoe wij nu te werk zullen gaan om te vinden wat men, rekening houdende met het besproken meetkundige karakter van de potentialen g_{ab} en φ_m, moet stellen voor δg_{ab} en $\delta\varphi_m$ om daarmee een virtueele verplaatsing der velden voor te stellen.

Wij zullen beginnen met de wereld te beschrijven op ietwat gewijzigde coördinaten. Wij voeren de transformatie in

$$x_m = x'_m - \delta r^m \; (m = 1, 2, 3, 4),$$

waarin δr^m de oneindig kleine componenten der verplaatsing voorstellen, welker tweede machten verwaarloosd zullen worden, zoodat bij differentiatie van een grootheid die δr^m bevat, of er mee vermenigvuldigd staat, geen onderscheid behoeft gemaakt te worden tusschen partieele differentieeringen naar x_m en naar x'_m.

Nadat de coördinatentransformatie heeft plaats gehad, zullen wij het coördinatennet, mèt het veld, dusdanig gaan vertrekken en vervormen dat de oppervlakken $x'_m = a_m$ komen op de plaats waar men eerst $x_m = a_m$ had. Dit komt blijkbaar neer op een virtueele verplaatsing van het veld die overal door δr^m wordt gekenschetst. Men behoeft nu slechts de accenten weg te laten om te zien wat men na de verplaatsing heeft, beschreven met de oude coördinaten.

Bij de aangegeven transformatie is

$$dx_m = dx'_m - \Sigma(p) \frac{\partial \delta r^m}{\partial x'_p} dx'_p.$$

Het meetkundige karakter der g_{ab} brengt mede, dat invariant is

$$\Sigma\,(ab)\, g'_{ab}\, dx'_a\, dx'_b = \Sigma\,(ab)\, g_{ab}\, dx_a\, dx_b =$$

$$= \Sigma\,(ab)\, g_{ab} \left(dx'_a - \Sigma\,(p) \frac{\partial \delta r^a}{\partial x'_p} dx'_p\right)\left(dx'_b - \Sigma\,(p) \frac{\partial \delta r^b}{\partial x'_p} dx'_p\right).$$

Hieruit leidt men gemakkelijk af, dat

$$g'_{ab} = g_{ab} - \Sigma\,(p)\, g_{pb} \frac{\partial \delta r^p}{\partial x'_a} - \Sigma\,(p)\, g_{ap} \frac{\partial \delta r^p}{\partial x'_b}.$$

Hierin is g_{ab} dezelfde functie van $(x'_m - \delta r^m)$ die g_{ab} was van x_m. Dus

$$g'_{ab} = g_{ab}(x'_m) - \Sigma\,(p) \left\{ \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_p} \delta r^p + g_{pb} \frac{\partial \delta r^p}{\partial x'_a} + g_{ap} \frac{\partial \delta r^p}{\partial x'_b} \right\}.$$

Gaan wij nu door weglating der accenten uitdrukken, dat wij het nieuwe coördinatennet tot dekking brengen met het oude, waarbij 't veld mee verplaatst wordt, dan vinden wij dus voor de variatie in een bepaald punttijdstip

$$\delta g_{ab} = -\Sigma\,(p) \left\{ \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_p} \delta r^p + g_{pb} \frac{\partial \delta r^p}{\partial x_a} + g_{ap} \frac{\partial \delta r^p}{\partial x_b} \right\}. \quad . \quad . \quad (11)$$

Op dezelfde wijze vinden wij bij een virtueele verplaatsing van het electromagnetische veld

$$\delta\varphi_m = -\Sigma(p)\left\{\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_p}\delta r^p + \varphi_p \frac{\partial\delta r^p}{\partial x_m}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

De hier gegeven variaties δg_{ab} en $\delta\varphi_m$ zijn werkelijk covariante tensoren. Men vindt op soortgelijke wijze gevormde tensoren zonder commentaar in een verhandeling van HILBERT vermeld [1]).

14. Voor het geval eener *virtueele verplaatsing van het electrische veld* leiden wij nog even af

$$\delta f_{mn} = -\Sigma(p)\left\{\frac{\partial f_{mn}}{\partial x_p}\delta r^p + f_{pn}\frac{\partial\delta r^p}{\partial x_m} + f_{mp}\frac{\partial\delta r^p}{\partial x_n}\right\}. \quad . \quad . \quad (13)$$

Hiermee is de berekening van de variatie van den integraal van HAMILTON gemakkelijk. Men vindt

$$\lambda\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,\Sigma(mnp)\Big[\frac{\partial}{\partial x_m}(-\sqrt{-g}\,W^m\varphi_p\delta r^p + \sqrt{-g}\,F^{mn}f_{pn}\,\delta r^p) +$$
$$+\,\delta r^p\left\{\frac{1}{\lambda}\sqrt{-g}\,k_p + \frac{\partial}{\partial x_m}(\sqrt{-g}\,W^m\varphi_p) - \sqrt{-g}\,W^m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_p}\right.$$
$$\left. -\frac{\partial}{dx_m}(\sqrt{-g}\,F^{mn}f_{pn}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,F^{mn}\frac{\partial f_{mn}}{\partial x_p}\right\}\Big].$$

Maken wij gebruik van de continuïteitsvergelijking voor den electrischen stroom

$$\Sigma(m)\frac{\partial}{\partial x_m}(\sqrt{-g}\,W^m) = 0$$

en herleiden wij, met

$$\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_p} = -\Sigma(am)\,g^{ka}g^{lm}\frac{\partial g_{am}}{\partial x_p},$$

$$\Sigma(mn)\tfrac{1}{2}F^{mn}\frac{\partial f_{mn}}{\partial x_p} = -\frac{\partial M}{\partial x_p} + \tfrac{1}{2}\Sigma(almn)\,F^{mn}f_{ln}g^{al}\frac{\partial g_{am}}{\partial x_p},$$

dan zien wij dat de variatie wordt, met gebruikmaking van het symbool E_a^m,

$$\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,\Sigma(almp)\Big[\frac{\partial}{\partial x_m}\{\sqrt{-g}(-\lambda W^m\varphi_a - \lambda\delta_a^m M - E_a^m)\,\delta r^a\} +$$
$$+\,\delta r^p\left\{\sqrt{-g}\,k_p + \lambda\sqrt{-g}\,W^m\left(\frac{\partial\varphi_p}{dx_m} - \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_p}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{\partial}{dx_m}(\sqrt{-g}E_p^m) - \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{al}\frac{\partial g_{am}}{\partial x_p}E_l^m\right\}\Big] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

[1]) DAVID HILBERT. *Die Grundlagen der Physik*, I. K. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. 1915.

Bij een virtueele verplaatsing die aan de grenzen van het gebied nul is, verlangt het principe van HAMILTON het nul zijn van

$$0 = \sqrt{-g}\, k_p + \lambda \Sigma (m) \sqrt{-g}\, W^m \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_m} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_p}\right) +$$

$$+ \Sigma (lma) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} \sqrt{-g}\, E_p^m) - \tfrac{1}{2} \sqrt{-g}\, g^{al} \frac{\partial g_{am}}{\partial x_p} E_l^m \right\} \quad . \quad . \quad (15)$$

Dit kan men noemen de *bewegingsvergelijkingen voor het veld.* Men ziet dat de inwerkende uitwendige kracht en de kracht die door den drager der ladingen op het veld uitgeoefend wordt [1]), tegengesteld moeten zijn aan de met $\sqrt{-g}$ vermenigvuldigde covariante divergentie van eenen tensor. De vergelijkingen beantwoorden volkomen aan de bewegingsvergelijkingen voor het gas. Uit dien hoofde zijn wij gerechtigd om den tensor E_p^m op te vatten als den *dynamischen tensor* der *spanningen, impulsen* en der *energie* in het electromagnetische veld.

15. Bij de *virtueele verplaatsing van het zwaartekrachtsveld* is het makkelijk aan te geven wat de variatie wordt in het stuk van den integraal dat door $\sqrt{-g}\, H$ geleverd wordt. Daar de integraal een scalair is, blijft

$$\int \sqrt{-g}\, H\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int \sqrt{-g'}\, H' dx_1' \, dx_2' \, dx_3' \, dx_4',$$

bij de in § 13 bedoelde transformatie. Voorts is

$$H' = H(x'_p \quad \delta r^p).$$

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g}\, \frac{\partial (x_1 \ldots x_4)}{\partial (x_1' \ldots x_4')} = \sqrt{-g(x'_p - \delta r^p)} \left\{ 1 - \Sigma (p) \frac{\partial \delta r^p}{\partial x_p} \right\}.$$

Zoodat na de verplaatsing (als wij de accenten weglaten) wij een variatie vinden

$$\delta \int \sqrt{-g}\, H\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = \int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4\, \Sigma (p) \frac{\partial}{\partial x_p} (-\sqrt{-g} H \delta r^p). \quad (16)$$

Voor het overige maken wij gebruik van het gevondene in § 8. Wij passen, met

$$\delta g^{ab} = - \Sigma (mn)\, g^{am} g^{bn} \delta g_{mn}', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

toe de formules (4*a*, 4*b*, 11) en vinden na een kleine herleiding voor de totale variatie

$$\int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4\, \Sigma (almp) \left[\frac{\partial}{\partial x_m} \{\sqrt{-g}\, (-\delta_a^m H + T_a^m + E_a^m)\, \delta r^a\} + \right.$$

$$\left. + \delta r^p \left\{ \sqrt{-g} k_p - \frac{\partial}{\partial x_m} (\sqrt{-g} T_p^m + \sqrt{-g} E_p^m) + \tfrac{1}{2} \sqrt{-g} g^{al} \frac{\partial g_{am}}{\partial x_p} (T_l^m + E_l^m) \right\} \right] \; (18)$$

[1]) Per volumeneenheid.

Evenals in de vorige gevallen leert nu het principe van HAMILTON dat bij nul zijn van de verplaatsing aan de grens van het gebied moet gelden

$$0 = \sqrt{-g}\,k_p + \Sigma(alm) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} (\sqrt{-g}\, Z_p^m) - \tfrac{1}{2} \sqrt{-g}\, g^{al} \frac{\partial g_{am}}{\partial x_p} Z_l^m \right\} . \quad (19)$$

waarbij

$$Z_p^m = -(T_p^m + E_p^m) = \frac{1}{\varkappa} \Sigma\,(b)\, g^{mb} (G_{pb} - \tfrac{1}{2} g_{pb} G) \quad . \quad . \quad (20)$$

Men zou dit de *„bewegingsvergelijkingen" kunnen noemen voor het zwaarteveld.* Het ligt, bij vergelijking met het vroeger gevondene, voor de hand den tensor Z_p^m te beschouwen als den *dynamischen tensor der spanningen, impulsen en energie in het zwaarteveld.* Men ziet, dat deze juist gelijk en tegengesteld is aan die van materie en electromagnetisch veld tezamen.

16. Met de formule (16) kan men bewijzen, dat de *covariante divergentie van Z_p^m identiek nul* moet zijn. Men kan immers de variatie van $\int \sqrt{-g}\, H\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$ ook berekenen met behulp der formules van § 8. Kiezen wij de δr^p en hunne 1e en 2e afgeleiden aan de grens nul, dan moet de variatie, volgens (16) nul worden. Wij vinden, uit 4*c* en *d*, met (17) en (11)

$$\delta \int \sqrt{-g}\, H\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \Sigma(ab) \int \frac{1}{2\varkappa} \sqrt{-g}\, (G_{ab} - \tfrac{1}{2} g_{ab} G)\, \delta g^{ab} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 =$$

$$= \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \frac{1}{\varkappa} \Sigma(abmkl) \Bigg[\frac{\partial}{\partial x_m} \left\{ \sqrt{-g}\, g^{bm} (G_{ab} - \tfrac{1}{2} g_{ab} G)\, \delta r^a \right\} -$$

$$- \delta r^a \left\{ \frac{\partial}{\partial x^m} (\sqrt{-g}\, g^{bm} (G_{ab} - \tfrac{1}{2} g_{ab} G)) - \tfrac{1}{2} \sqrt{-g}\, g^{kl} \frac{\partial g_{km}}{\partial x_a} g^{mb} (G_{lb} - \tfrac{1}{2} g_{lb} G) \right\} \Bigg]$$

Dit kan alleen nul zijn indien de coefficient van δr^a, dat is $\sqrt{-g}$ maal de covariante divergentie van Z_a^m, nul is, zoodat

$$\Sigma(bklm) \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial x_m} \{ \sqrt{-g}\, g^{bm} (G_{ab} - \tfrac{1}{2} g_{ab} G) \} -$$

$$- \frac{1}{2\varkappa} \sqrt{-g}\, g^{kl} \frac{\partial g_{km}}{\partial x_a} g^{mb} (G_{lb} - \tfrac{1}{2} g_{lb} G) = 0 \quad . \quad . \quad (21)$$

17. Deze identiteit, die in zich vier betrekkingen bevat tusschen de componenten van $(G_{ab} - \tfrac{1}{2} g_{ab} G)$, is van belang, omdat men aan haar kan zien, dat de tien differentiaalvergelijkingen,

$$G_{ab} - \tfrac{1}{2} g_{ab} G = 0$$

die het zwaarteveld bepalen in die plekken van ons gebied

waar geen materie of electromagnetisch veld gevonden wordt, niet onderling onafhankelijk zijn. In die materielooze gebieden mag men dus de zwaartepotentialen willekeurig aan nog vier betrekkingen onderwerpen. EINSTEIN heeft doen zien, dat deze onbepaaldheid in de materielooze gebieden nooit tot een onbepaaldheid kan leiden in de waarnemingen, die wij met materieele instrumenten ooit zullen kunnen doen.

Voorts bevestigt de identiteit, dat bij de afwezigheid van een uitwendige kracht de wetten van behoud van energie en impuls gelden voor de materie. Immers, met de veldvergelijking (6), die in (20) in anderen vorm staat, ziet men uit (21) dadelijk dat

$$0 = \Sigma(klm)\frac{\partial}{\partial x_m}\{\sqrt{-g}\,(T_a^m + E_a^m)\} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{kl}\frac{\partial g_{km}}{\partial x_a}(T_l^m + E_l^m). \quad (22)$$

Ja zelfs kan men besluiten, dat er geen kracht op de materie en het electro-magnetische veld meer kan worden uitgeoefend door een of ander agens, indien dat agens niet ook op het zwaarteveld wijzigend inwerkt.

18. Men kan den tweeden term in het linkerlid van de identiteit (21) vervormen. Men kan daarvoor schrijven

$$\Sigma(lb)\frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{lb}}{\partial x_a}(G_{lb} - \tfrac{1}{2}g_{lb}\,G).$$

Dit komt, volgens (4*d*), neer op

$$\Sigma(lbcd)\,g_a^{lb}\left[\frac{\partial\sqrt{-g}\,H}{\partial g^{lb}} - \frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\,H}{\partial g_c^{lb}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_c\,\partial x_d}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\,H}{\partial g_{cd}^{lb}}\right)\right].$$

Hetzelfde staat, herleid, in

$$\Sigma(lbcd)\frac{\partial}{\partial x_a}(\sqrt{-g}\,H) - \frac{\partial}{\partial x_c}\left\{g_a^{lb}\frac{\partial\sqrt{-g}\,H}{\partial g_c^{lb}} - g_a^{lb}\frac{\partial}{\partial x_d}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\,H}{\partial g_{cd}^{lb}}\right) + \right.$$
$$\left. + g_{da}^{lb}\frac{\partial\sqrt{-g}\,H}{\partial g_{cd}^{lb}}\right\}.$$

Schrijft men nu

$$\sqrt{-g}\,z_a^c = \Sigma(lbd)\,g_a^{lb}\frac{\partial\sqrt{-g}H}{\partial g_c^{lb}} + g_{ad}^{lb}\frac{\partial\sqrt{-g}H}{\partial g_{cd}^{b}} - g_a^{lb}\frac{\partial}{\partial x_d}\frac{\partial\sqrt{-g}H}{\partial g_{cd}^{lb}} - \delta_a^c\sqrt{-g}H,$$

dan heeft men krachtens de vorige vergelijking en (21), (20):

$$\Sigma(m)\frac{\partial}{\partial x_m}\{\sqrt{-g}(T_a^m + E_a^m)\} + \Sigma(c)\frac{\partial}{\partial x_c}(\sqrt{-g}\,z_a^c) = 0 \quad . \quad . \quad (23)$$

Men vindt dus in $\sqrt{-g}z_a^c$ een complex, welks (niet invariante) „quasidivergentie" het tegengestelde is van de quasidivergentie uit den

dynamischen tensor van materie en electromagnetisch veld. LORENTZ [1]) en DE DONDER [2]) hebben een dergelijk complex afgeleid,

$$\sqrt{-g}\, s_a^c = \Sigma(lbd)\, g_{lb,a} \frac{\partial \sqrt{-g}H}{\partial g_{lb,c}} + g_{lb,ad} \frac{\partial \sqrt{-g}H}{\partial g_{lb,cd}} - g_{lb,a} \frac{\partial}{\partial x_d} \frac{\partial \sqrt{-g}H}{\partial g_{lb,cd}} - \delta_a^c \sqrt{-g}H,$$

waartoe men even gemakkelijk als tot $\sqrt{-g}z_a^c$ komt door vervorming van den tweeden term van de identiteit (21).

Desgewenscht kan men de componenten van een dezer complexen nemen voor de trekspanningen, impulsen, enz. in het zwaarteveld. Daar echter, krachtens (21), identiek geldt

$$\Sigma(m) \frac{\partial}{\partial x_m} (\sqrt{-g}\, Z_a^m) = \Sigma(c) \frac{\partial}{\partial x_c} (\sqrt{-g}\, z_a^c) = \Sigma(c) \frac{\partial}{\partial x_c} (\sqrt{-g}\, s_a^c),$$

heeft men ook

$$\Sigma(m) \frac{\partial}{\partial x_m} \left\{ \sqrt{-g}\, (T_a^m + E_a^m) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_m} (\sqrt{-g}\, Z_a^m) = 0 \,. \quad . \quad (24)$$

Het is nu geheel een kwestie van smaak, en, bij berekeningen, van opportuniteit, welke van de drie vergelijkingen (22), (23) of (24) men wil aanzien als de uitdrukking van de wetten over 't behoud van arbeidsvermogen en van impuls, en of men dienovereenkomstig z_a^c, s_a^c als een dynamischen quasi-tensor, of Z_a^m als den dynamischen zuiveren tensor van het zwaarteveld wil opvatten, dan wel er de voorkeur aangeeft, eens voor al af te zien van het invoeren van een dynamischen tensor in het zwaarteveld.

Aansluiting aan de electronentheorie van LORENTZ.

19. Ten slotte willen wij even doen zien hoe de afgeleide formules zich aansluiten aan de klassieke formules der electronentheorie voor het in die theorie behandelde geval van constante gravitatiepotentialen, die de waarden hebben:

$$g_{ab}\ (=) \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{array} .$$

Hierbij behoort de waarde van $g = -c^2$ en de waarden der algebraïsche complementen

---

[1]) l. c. XXV, p. 473.

[2]) TH. DE DONDER, *Les équations différentielles du champ gravifique* d'EINSTEIN *créé par un champ electromagnétique de* MAXWELL-LORENTZ. Kon. Ac. Wet. Amsterdam, XXV, p. 150.

$$g^{ab} (=) \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{matrix} .$$

Onze formules zijn gebaseerd op het principe van HAMILTON voor de beweging van een vrij vallend punt, dat in dit speciale geval luidt

$$0 = \delta \int_1^2 - m\, ds = \delta \int_1^2 - m \sqrt{c^2 - v^2}\, dt .$$

Vergelijken we dit met wat men in de oude relativiteitsmechanica placht te schrijven:

$$0 = \delta \int_1^2 - mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt .$$

dan blijkt dat in onze formules de functie van LAGRANGE $c \times$ kleiner is genomen. Bepaalde krachten, energie, spanningen enz. zullen in overeenstemming hiermede door getallen moeten worden voorgesteld, die $c \times$ kleiner zijn dan zij vroeger uitvielen.

Indien wij bijvoorbeeld de eenheid van electrische lading laten blijven zooals ze in de electronentheorie wordt gedefinieerd, (een electron heeft, in die maat, een lading $-\sqrt{4\pi} \times 4{,}65 \times 10^{-10}$), en indien we daarbij ook de eenheidsmaat voor de electrische veldsterkte d en voor de magnetische veldsterkte h onveranderd laten, moeten we voor de *kracht* op de lading per volumeneenheid schrijven

$$f = \varrho \left\{ \frac{1}{c} d + \frac{1}{c^2} [v \cdot h] \right\} .$$

Wenschen wij, dat onze vergelijkingen (3) voor het electrische veld

$$\Sigma (b) \frac{\partial}{\partial x_b} (\sqrt{-g}\, F^{ab}) = \sqrt{-g}\, W^a ,$$

waarin de componenten der *stroomsterkte* $\sqrt{-g}\, W_a$ zijn ϱv_x, ϱv_y, ϱv_z, en ϱ, overeenstemmen met de bekende

$$c \frac{\partial h_z}{\partial y} - c \frac{\partial h_y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t} d_x = \varrho v_x \,, \; enz,$$

dan zien wij, dat de componenten van den *contravarianten veldtensor* moeten zijn

$$F^{ab}\ (=)\ \begin{matrix} 0 & h_z & -h_y & \frac{1}{c}d_x \\ -h_z & 0 & h_x & \frac{1}{c}d_y \\ h_y & h_x & 0 & -\frac{1}{c}d_z \\ \frac{1}{c}d_x & \frac{1}{c}d_y & \frac{1}{c}d_z & 0. \end{matrix}$$

Hieruit zien we wat de componenten van onzen covarianten veldtensor zijn:

$$\Sigma(ab)\, g_{ap}\, g_{bq} F^{ab} = f_{pq}\ (=)\ \begin{matrix} 0 & h_z & -h_y & c\, d_x \\ -h_z & 0 & h_x & c\, d_y \\ h_y & -h_x & 0 & c\, d_z \\ -cd & -cd_y & -cd_z & 0\,. \end{matrix}$$

Wij weten, dat $f_{pq} = \frac{\partial \varphi_q}{\partial xp} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_p}$. Hieruit zien we dadelijk hoe de scalaire potentiaal φ en de vectorpotentiaal a der electronentheorie overeenstemmen met onze *potentialen*

$$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4 \quad (=) \quad a_x \quad a_y \quad a_z \quad -c\varphi\,.$$

Voor de komponenten der per volumeneenheid op de lading werkende kracht vonden wij in formule (10):

$$-K_p = -\sqrt{-g}\, k_p = \lambda\, \Sigma\,(m) \sqrt{-g}\;\; W^m f_{pm}\,.$$

Om dit te laten overeenstemmen met het bovenstaande, moeten wij dus aan de verhoudingsconstante λ bij de getroffen keuze van eenheden de waarde geven $\lambda = 1/c^2$. De formule wordt dus

$$-\sqrt{-g}\, k_p = \frac{1}{c^2}\, \Sigma(m) \sqrt{-g}\;\; W^m f_{pm}\,.$$

Zij blijft dezen vorm behouden ook wanneer men overgaat tot een coördinatenstelsel met $c \times$ kleinere tijdseenheid, waarin de lichtsnelheid gelijk aan 1 wordt (c blijft $= 3.10^{10}$). Het zij terloops opgemerkt, dat in de formules van LORENTZ[1]) en TRESLING de factor $1/c^2$ ontbreekt. Hieruit volgt, dat zij stilzwijgend zich hebben bediend van eene eenheid van lading, die $c \times$ grooter is dan de gebruikelijke.

De scalair voor het veld wordt

$$M = -\tfrac{1}{4}\, \Sigma\, (ab)\, F^{ab} f_{ab} = \tfrac{1}{2}\, (d^2 - h^2)\,,$$

en de principale functie $\lambda \sqrt{-g} M = \frac{i}{2c}\,(d^2 - h^2)$, conform het in den

1) Ter vergelijking met de verhandelingen van LORENTZ diene, dat $\sqrt{-g}\, F^{ab} = \psi_{ab}$ en $f_{ab} = \overline{\psi_{ab}}$. Voorts $\sqrt{-g}\, W^m = w_m$.

aanvang der paragraaf gezegde $c \times$ kleiner dan men gewend is.

De *trekspanningen*, de *negatieve impulsen*, de *energie* en de *energiestroomingen* worden

$$\sqrt{-g}\, E_a^m = -\lambda \Sigma(b) \sqrt{-g}\, F^{mb} f_{ab} - \lambda \sqrt{-g}\, \delta_a^m M ,$$

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{2c}(2h_x^2 - h^2 + 2d_x^2 - d^2), & \frac{1}{c}(h_x h_y + d_x d_y), & \frac{1}{c}(h_x h_z + d_x d_z), & -\frac{1}{c^2}(d_y h_z - d_z h_y), \\
\frac{1}{c}(h_x h_y + d_x d_y), & \frac{1}{c}(2h_y^2 - h^2 + 2d_y^2 - d^2), & \frac{1}{c}(h_y h_z + d_y d_z), & -\frac{1}{c^2}(d_z h_x - d_x h_z), \\
\frac{1}{c}(h_x h_z + d_x d_z), & \frac{1}{c}(h_y h_z + d_y d_z), & \frac{1}{2c}(2h_z^2 - h^2 + 2d_z^2 - d^2), & -\frac{1}{c^2}(d_x h_y - d_y h_x), \\
(d_y h_z - d_z h_y), & (d_z h_x - d_x h_z), & (d_x h_y - d_y h_x), & \frac{1}{2c}(h^2 + d^2) .
\end{array}$$

Men ziet, hoe alle componenten $c \times$ kleiner uitvallen dan vroeger, zooals in den aanvang dezer paragraaf werd gereleveerd.

Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ biedt, mede namens den Heer J. DROSTE, een mededeeling aan, getiteld: „*Toepassing der theorie van* EINSTEIN *op de beweging van een stelsel van lichamen onder elkanders wederkeerige aantrekking*".

(Deze mededeeling zal in het volgende Zittingsverslag worden opgenomen).

Voor de bibliotheek der Akademie worden de volgende boekwerken ten geschenke aangeboden:

1. door den Heer J. F. VAN BEMMELEN een exemplaar van „*Onderzoekingen verricht in het Zoölogisch Laboratorium der Rijks Universiteit Groningen*" nos. V en VI.

2. door den Heer J. BOEKE, namens den Heer G. ROIJER, een exemplaar van diens dissertatie „*Bijdrage tot de kennis van de ontwikkelingsgeschiedenis der Megachiroptera*".

3. door den Heer H. ZWAARDEMAKER, namens *a.* den Heer W. H. JOLLES een exemplaar van diens dissertatie: „*Onderzoekingen over den invloed van sommige physico-chemische en vitale voorwaarden op het electrogram van het overlevende kikvorschhart*" en *b.* den Heer B. G. J. N. DEULING een exemplaar van diens dissertatie „*Bijdrage tot de kennis van weefselvloeistoffen en beginlymphe.*"

4. door den Heer F. A. F. C. WENT, namens den correspondent der Afdeeling, den Heer C. J. J. VAN HALL te Buitenzorg, een exemplaar van diens werk „*Cocoa*".

De vergadering wordt gesloten.

(26 Maart 1917.)

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 24 FEBRUARI 1917.

DEEL XXV.

N°. 8.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

J. E. VERSCHAFFELT: „De inwendige wrijving van vloeibaar gemaakte gassen. VII. De schommelende draaiingsbeweging van een omwentelingslichaam in een wrijvende vloeistof". (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. P. KUENEN), p. 1199.

J. E. VERSCHAFFELT: „De inwendige wrijving van vloeibaar gemaakte gassen. VIII. De gelijkvormigheid bij de schommelende draaiingsbeweging van een omwentelingslichaam in een wrijvende vloeistof". (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. P. KUENEN), p. 1205.

J. E. VERSCHAFFELT en CH. NICAISE: „De inwendige wrijving van vloeibaar gemaakte gassen. IX. Voorloopige bepaling van den wrijvingscoëfficient van vloeibare waterstof'. (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. P. KUENEN), p. 1210.

H. KAMERLINGH ONNES: „Hulpmiddelen en methoden in gebruik bij het cryogeen laboratorium. XVII. Cryostaat voor temperaturen tusschen 27° K. en 55° K.", p. 1214.

H. KAMERLINGH ONNES, C. A. CROMMELIN en P. G. CATH: „Isothermen van éénatomige stoffen en hunne binaire mengsels. XVIII. Eene voorloopige bepaling van het kritisch punt van neon", p. 1224.

De Heer L. BOLK biedt ter uitgave in de Werken der Akademie aan zijne verhandeling: „Anatomische Bemerkungen über einen Fetus von Elephas africanus". p. 1228.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren W. EINTHOVEN en P. VAN ROMBURGH dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Schrijven van den Directeur van 's Lands Plantentuin te Buitenzorg dd. 7 December 1916, in antwoord op het schrijven der Afdeeling van 8 September 1916, waarbij het bezoek van mej. LA RIVIÈRE, uit te zenden op kosten van het Buitenzorg-fonds, werd aangekondigd, met de mededeeling dat dit bezoek ten zeerste welkom zal zijn en de bezoekster op alle hulp en tegemoetkoming zal kunnen rekenen.

Aangenomen voor kennisgeving.

Geologie. — De Heer K. MARTIN brengt, namens de leden der Geologische Commissie, het volgende jaarverslag dier Commissie over 1916 uit.

Gedurende het jaar 1916 werd in de verhandelingen der Akademie, als N°. 39 der mededeelingen omtrent de geologie van Nederland, een opstel gepubliceerd van Dr. J. LORIÉ, handelende over den geologischen bouw der Geldersche Vallei en over eenige nieuwe grondboringen, terwijl als N°. 40 dier mededeelingen een opstel van den Heer Dr. J. F. STEENHUIS over de daling van den bodem van Nederland zich in druk bevindt.

Door den Rijkswaterstaat werd aan onze Commissie mededeeling gedaan van de uitkomsten van grondboringen, in de maanden Juli en Augustus 1916 verricht in den Rotterdamschen Waterweg.

De Regeering heeft nog geen beslissing genomen in zake het voorstel tot vervaardiging eener nieuwe geologische kaart van Nederland en tot instelling van een geologischen dienst.

De gelden, vroeger aan onze Commissie toegestaan, zijn nog voldoende, zoodat het niet noodig is opnieuw gelden aan te vragen.

(Get.) C. LELY.
„ K. MARTIN.
„ G. A. F. MOLENGRAAFF.

De Vergadering hecht hare goedkeuring aan het Verslag, waarvan een afschrift met een begeleidend schrijven namens de Afdeeling zal gezonden worden aan den Minister van Waterstaat.

Natuurkunde. — De Heer J. P. KUENEN biedt, mede namens den Heer A. L. CLARK, Med. 150*b* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden aan: „*Het kritisch punt, kritische verschijnselen en eenige condensatie-grootheden van lucht*".

De kritische temperatuur en drukking van lucht zijn bepaald door OLSZEWSKI[1]), WROBLEWSKI[2]) en WITKOWSKI[3]). Hun uitkomsten stemmen niet zoo goed overeen als men zou wenschen:

	OLSZEWSKI	WROBLEWSKI	WITKOWSKI
t_k	— 140°	etwa — 140.°5	— 141°
p_k	39 atm.	„ 37 à 37.5	39

Het hoofddoel van ons onderzoek was te trachten betrouwbare waarden voor de kritische constanten, met inbegrip van de kritische dichtheid, te verkrijgen, wat in zich sluit een studie van de condensatie-verschijnselen in het kritisch gebied. WROBLEWSKI vond reeds, dat lucht zich aldaar anders gedraagt dan andere zelfstandigheden, wat hij te recht daaraan toeschreef, dat lucht een mengsel is, maar de bijzonderheden, die hij beschrijft, waren grootendeels het gevolg van onvoldoende menging. Het was dus noodig het onderzoek te herhalen met alle voorzorgen, die in vroegere onderzoekingen met mengsels noodig zijn gebleken, en onder meer te beproeven de retrograde condensatie, die karakteristiek is voor mengsels, waar te nemen. Tot nog toe was een dergelijk onderzoek nooit anders dan bij de gewone of bij hoogere temperatuur ingesteld.

Zooals te verwachten was, bleek het onderzoek groote moeilijkheden op te leveren. Deze komen eigenlijk geheel daaruit voort, dat men het mengsel niet in zijn geheel op lage temperatuur kan afkoelen,

1) K. OLSZEWSKI. C. r. 99, p. 184, 1884.
2) S. v. WROBLEWSKI. Wied. 26, p. 134, 1885.
3) A. W. WITKOWSKI. Phil. Mag. (5, 41, p. 288, 1896.

indien men de mogelijkheid wil open laten, wat hier een eerste vereischte is, om het volume der stof gradueel te veranderen. Een stof, die bij de zeer lage temperatuur de rol kan spelen, welke anders het kwik vervult, n.l. die van afsluiter van een vaste hoeveelheid stof in een veranderlijke ruimte, is niet bekend. Het is dus noodig het mengsel, op dezelfde manier als bij zuivere stoffen wordt gevolgd, in een van onderen gesloten en op de lagere temperatuur afgekoeld buisje met behulp van een piëzometer samen te persen, waarbij dus telkens een ander breukdeel van de nauwkeurig gemeten beschikbare hoeveelheid substantie in het buisje aanwezig is. Bij zuivere stoffen levert dit geen principieel bezwaar op, immers door meting van het buiten den cryostaat in den piëzometer nog aanwezige gas kan de hoeveelheid in het waarnemingsbuisje bij iedere meting door aftrekking van het geheel gevonden worden, ook wanneer de stof gedeeltelijk tot vloeistof gecondenseerd is. Bij mengsels is dit laatste anders: bij de condensatie ontstaan mengsels van telkens andere samenstelling; in een reeks van waarnemingen, waarbij compressie en expansie elkaar opvolgen, zal daardoor spoedig de gemiddelde samenstelling van het mengsel in het buisje niet meer die zijn van het geheel en de waarnemingen verliezen alle beteekenis als hebbende betrekking op mengsels van verschillend, niet nader te bepalen gehalte. Immers wanneer de lucht, om ons mengsel als voorbeeld te nemen, gedeeltelijk vloeibaar geworden is en door expansie gaat verdampen, zal in den aanvang voornamelijk de stikstof wegkoken en uit het buisje verdwijnen, zoodat het achterblijvende mengsel rijker aan zuurstof wordt en niet meer gemiddeld de samenstelling van lucht heeft.

Men moet zich dus zooveel mogelijk als regel stellen om, als eenmaal gedeeltelijke condensatie is ingetreden, het volume niet meer te vergrooten [1]) en wil men de waarnemingen herhalen of een nieuwe reeks bij een andere temperatuur beginnen, zoo moet men — ten einde volledige menging te verkrijgen — eenige malen achtereen de drukking in het apparaat tot de normale doen dalen en weder comprimeeren. Anders blijft in het buisje, tengevolge van de zeer langzame diffusie in de capillaire verbindingsbuizen met den steel van het reservoir, een mengsel van hooger kookpunt achter, zoodat de volgende waarnemingen onjuist zijn en o.a. de condensatie te vroeg intreedt. De belangrijkheid hiervan werd bij onze proeven aanvankelijk niet voldoende beseft, zoodat vele van de eerste aflezingen later moesten worden verworpen.

[1]) In de buurt van het kritisch punt, waar de twee phasen bijna dezelfde samenstelling hebben, leveren kleine expansies geen bezwaar op.

Het electromagnetisch roeren levert bij lage temperatuur eveneens grootere moeilijkheden op dan anders, wegens de groote wijdte van den cryostaat, die een overeenkomstige grootte van den electromagneet buiten den cryostaat met zich brengt. De waarnemingsbuis, capillair en roerder waren dezelfde als door CROMMELIN[1]) bij zijn onderzoek van Argon gebruikt waren. In deze buis is het zooeven genoemde bezwaar vermeden, doordat het ijzerstaafje, waarop de electromagneet werkt, buiten den cryostaat boven de glazen capillair van het waarnemingsbuisje is aangebracht: daaraan is met behulp van een langen glasdraad, die door de capillair naar beneden loopt, het eigenlijke roerdertje in de waarnemingsbuis bevestigd. De roerder kan op die wijze met behulp van een kleinen hand-electromagneet op en neer worden bewogen.

Deze inrichting had echter voor ons doel het nadeel, dat de genoemde glas-capillair betrekkelijk wijd moet zijn om ruimte te bieden voor den glasdraad en dat hiermede grooter gevaar van wederzijdsche diffusie tusschen de verschillende mengsels in en buiten de waarnemingsbuis verbonden is, en tevens grootere onzekerheden in de volumebepalingen ontstaan. Ook gebeurde het nog al eens, dat de roerder bleef steken, tengevolge van de buigzaamheid van den glasdraad en wellicht van microscopische afzettingen van vaste bestanddeelen. Natuurlijk was de lucht van waterdamp en koolzuur zoo goed mogelijk bevrijd: misschien wijst het blijven steken van den roerder er op, dat er toch nog sporen waren overgebleven; althans werd de stoornis gewoonlijk grooter, naarmate meer lucht gecondenseerd werd en dus door de capillair gestreken was. In de meeste gevallen kon het euvel worden beperkt of geheel opgeheven door den roerder gedurende het samenpersen van de lucht in het buisje in beweging te houden.

De onzekerheid in de berekening van de dichtheid ontstaat op de volgende wijze: behalve het waarnemingsbuisje bevindt zich een lang stuk van de glas-capillair binnen den cryostaat, bij onze proeven 35 c.M. met een volume van $\pm$ $^1/_7$ van het buisje. Slechts een deel daarvan is in de koude vloeistof ondergedompeld; de temperatuur van het deel daarboven neemt, zooals vroegere waarnemingen hebben aangetoond, vrij snel toe en nadert bovenaan die van de buitenlucht. Voor het gas, dat zich in de capillair bevindt, moet een belangrijke correctie worden aangebracht. We nemen aan, dat alleen met compressie gewerkt wordt; de allengs binnenstroomende lucht zal dan in het niet volledig afgekoelde deel haar samen-

---

[1]) C. A. CROMMELIN. Comm. 115, § 2. Zie reeds Comm. 83 Plate IV.

stelling behouden en als lucht in rekening moeten worden gebracht. In het afgekoelde stuk daarentegen zal de lucht zich in vloeistof en damp scheiden, en indien de vloeistof behoorlijk wegvloeit, ten slotte verzadigden damp bevatten. Alleen tengevolge van de omstandigheid, dat slechts in het waarnemingsbuisje goed geroerd wordt, is men er niet van verzekerd, dat de damp de juiste samenstelling heeft, terwijl anderzijds het roeren in de capillair het nadeel met zich brengt van een gedeeltelijke vermenging der gassen in de afgekoelde en warmere stukken van de capillair. Daar een en ander van onbekend bedrag is, kan daarmede geen rekening gehouden worden en moet het bovenste deel als lucht, het onderste deel als verzadigde damp beschouwd worden. In dit geval komt hier bij, dat de dichtheid van den verzadigden damp nog niet nauwkeurig bekend is, daar deze eerst uit metingen van de damp-dichtheid bij meerdere mengsels door interpolatie zal zijn te vinden. Voorloopig moesten we ons met een schatting behelpen. Nog zij opgemerkt, dat bij een dichtheidsbepaling van den damp, dus met een spoor vloeistof in de buis, het geheele afgekoelde volume (buisje + deel van capillair) als met verzadigden damp gevuld te beschouwen is; evenzeer zal bij een bepaling in de buurt van het kritisch punt, wanneer bij roeren de meniscus vlak wordt en verdwijnt, het geheele genoemde volume bij de berekening als homogeen gevuld moeten worden aangenomen. De verschillende onzekerheden, die uit een en ander voortvloeien, openbaren zich ook in onregelmatigheden in de verkregen uitkomsten.

Op de genoemde gronden ligt het in de bedoeling bij de verdere proeven tot de gewone methode van roeren terug te keeren ondanks de onhandige afmetingen van den electromagneet, die ze met zich brengt: de glas-capillair zal dan zeer nauw kunnen zijn, zoodat de diffusie geen merkbaren invloed kan hebben en de volume-bepalingen grootere nauwkeurigheid zullen verkrijgen. Maar het voorschrift, dat na den aanvang der condensatie niet meer onder expansie mag worden waargenomen, zal van kracht blijven.

Wij merken nog op, dat terwijl lucht eigenlijk een ternair mengsel is van stikstof, zuurstof en argon, de aanwezige hoeveelheid van het laatste gas zoo gering is en zijn eigenschappen zoo weinig van die der beide andere componenten verschillen, dat aan een merkbaren invloed op de verschijnselen niet te denken valt en ons mengsel dus inderdaad als binair beschouwd mag worden.

Toestellen. De door ons gebezigde toestellen stemmen in hoofdzaak met vroeger in het cryogeen-laboratorium gebruikte overeen: wij mogen dus met een verwijzing naar vroegere mededeelingen

volstaan (Piëzometer Comm. 69). Tusschen de waarnemingsbuis en den compressietoestel was een stalen drieweg-kraan aangebracht, met behulp waarvan de toestel in verbinding kon worden gesteld met een afzonderlijk met zuivere lucht gevuld reservoir (pipet), waaruit, zoo noodig, gemeten hoeveelheden lucht aan onzen voorraad zouden kunnen worden toegevoegd of worden onttrokken: hierbij hadden wij vooral het oog op dichtheidsbepalingen van vloeibare lucht bij temperaturen verre beneden de kritische, waar de aanwezige hoeveelheid in de compressiebuis niet voldoende zou zijn geweest. Maar daar wij ons tot waarnemingen in vloeibaar ethyleen moesten beperken, behoefde de pipet niet te worden aangesproken.

De drukkingen werden gemeten met een gesloten waterstofthermometer (Comm. 78), terwijl een metaalmanometer gedurende de metingen als controle-instrument dienst deed. Voor de temperaturen dienden twee platina-thermometers (Comm. 141*a*). De cryostaat is beschreven in Comm. 83.

Kritisch punt en kritische verschijnselen.

Zooals uit de theorie der mengsels blijkt, moet men twee kritische punten onderscheiden: het plooipunt, waar de phasen gelijk worden en dus de kritische verschijnselen het duidelijkst zullen spreken, en het bij iets hooger temperatuur behoorende kritisch raakpunt, de grens voor de splitsing in twee phasen. In het temperatuurgebied tusschen die beide punten bestaat retrograde condensatie (hier van de eerste soort). Het is ons gelukt een en ander bij lucht te bevestigen, waarmede dus is aangetoond, dat de verschijnselen ook bij zeer lage temperatuur niet andere zijn dan de theorie doet verwachten. Gemakkelijk waren de waarnemingen niet: de beide punten liggen in elkanders onmiddellijke nabijheid, wat daarmede samenhangt, dat de condensatie-lus in de p, T-figuur betrekkelijk nauw bleek te zijn. Voor het plooipunt vonden wij

$$t = -140^\circ.73 \qquad p = 37.25 \ atm.$$

voor het kritisch raakpunt

$$t = -140^\circ.63 \qquad p = 37.17 \ atm.$$

Het voor mengsels eigenaardige condensatie-beloop speelt zich dus af binnen een gebied van 0°.1 en het is daarom noodig de compressie zeer langzaam te doen voortschrijden om de waarnemingen te doen gelukken. Hooge eischen van standvastigheid gedurende een lang tijdsverloop werden hierbij aan de temperatuur gesteld en het succes van ons pogen was dan ook aan de voortreffelijkheid der voor dit doel in het cryogeen-laboratorium aanwezige hulpmiddelen en inrichtingen te danken.

Om niet te uitvoerig te worden, willen wij de waarnemingen niet

in alle details mededeelen. Een uitzondering zij gemaakt voor een verschijnsel, dat zich bij —140°.64 en een drukking van 37.26 atmosfeer voordeed en dat de groote gevoeligheid van de stof voor veranderingen van temperatuur en drukking in het kritisch gebied duidelijk doet zien. Bij de genoemde drukking was de meniscus tusschen vloeistof en damp juist niet meer te zien; het oplichten van den roerder had, zooals ook in overeenkomstige toestanden bij andere temperaturen, de vorming van een nevel ten gevolge, die echter ditmaal niet eenvoudig verdween, maar van zelf eenige malen achtereen verdween en weer te voorschijn kwam met een periode van ongeveer een seconde. Blijkbaar wordt door de bovenwaartsche

TABEL 1.

t	p_b	p_e
—140.63	37.17	37.17 R. P.
—140.64	37.12	37.24
—140.69	37.02	37.26
—140.73		37.25 P. P.
—140.74	36.99	37.42
—140.75	36.86	
—140.80	36.65	37.20
—140.80	36.70	
—140.83[5]	36.68	
—140.85	36.75	37.18
—140.89	36.57	
—140.99	36.35	
—141.35	35.24	36.49
—141.99	34.58	
—142.35	33.91	35.31
—143.14	32.06	
—143.34	31.85	33.79
—144.12	31.06	33.12
—144.35		32.52
—146.32		29.83
—150.12	23.68	25.04

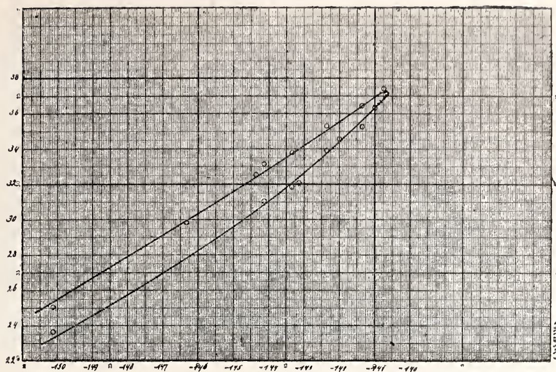


Fig. 1.

beweging van den roerder de lucht onder den roerder eenigszins geëxpandeerd en dus afgekoeld en tegelijk eenig gas naar het hoogere warmere deel van den capillair gedreven. De daardoor teweeggebrachte drukvermeerdering helpt om het gas weder naar beneden te drijven, waarbij de nevel wordt opgelost. Zooals blijkt waren de voorwaarden ditmaal van dien aard, dat het verschijnsel zich automatisch eenige malen herhaalde. De hooge trillingstijd doet vermoeden, dat een op en neergaande beweging van het kwikoppervlak in de compressiebuis in het spel was. [1])

Opmerking verdient ook, dat herhaaldelijk blauwe opalescentie werd waargenomen, wanneer de drukking iets lager was dan noodig om de wolkachtige condensatie te voorschijn te roepen, en in sommige gevallen onder het roeren bleef voortduren. Door snelle beweging van den roerder kon gemeenlijk opalescentie in nevel veranderd worden. Het schijnt, dat zuivere zuurstof en argon de opalescentie geheel of bijkans missen. [2])

Condensatie-grootheden. De uitkomsten zijn, wat temperatuur en drukking betreft, in Tabel 1 en in Figuur 1 weergegeven. De hier

[1]) Een trilling van de lucht in het buisje onder den invloed harer eigen elasticiteit zou veel sneller plaats hebben en is ook onwaarschijnlijk, omdat gedurende de compressie de lucht wordt afgekoeld en gedurende de expansie verwarmd, terwijl de voorwaarde voor het onderhouden worden eener trilling door toevoer en afvoer van warmte juist omgekeerd is. Het aan het uiteinde gesloten reservoirtje moet dus warm zijn, zooals bij het welbekende zingen onder het blazen van een glasbol.

[2]) Zie Comm. 145*b*.

medegedeelde begin- en eindpunten der condensatie werden, zooals reeds werd uiteengezet, bij compressie gemeten; ter wille van de nauwkeurigheid geschiedde deze zoo langzaam mogelijk. Toch vertoonen de uitkomsten zeer duidelijke onregelmatigheden, die uit de genoemde gronden verklaard moeten worden.

Vooral de dichtheden moeten met voorbehoud worden aangenomen: men vindt ze in Tabel 2 en Figuur 2. De dichtheden in plooipunt en raakpunt werden uit de figuur afgeleid.

Bij vergelijking van het plooipunt met de kritische punten van de bestanddeelen (Comm. 145*b*), n.l. 118°.82, 49.713 atm. voor zuurstof en 147°.13, 33.49 atm. voor stikstof, blijkt, dat de kritische lijn van de zuurstof-stikstofmengsels zeer weinig van een rechte lijn afwijkt. Op de rechte lijn zou aan een temperatuur van — 140°.73 een drukking van 37.16 atm. beantwoorden, terwijl de plooipuntsdrukking 37.25 atm. bedraagt. Ook blijkt het kritisch punt ongeveer evenredig

TABEL 2.
Dichtheden.

Temperatuur	Damp	Vloeistof
—140.63	0.31	0.31 R. P.
—140.69		0.323
—140.70		0.328
—140.73		0.35 P. P.
—140.75	0.277	
—140.80	0.265	0.365
—140.84	0.269	
—140.85		0.359
—140.89	0.262	
—140.99	0.253	
—141.34		0.439
—141.99	0.217	
—142.35		0.461
—143.34	0.188	
—143.35		0.488
—144.35		0.503
—146.32		0.523

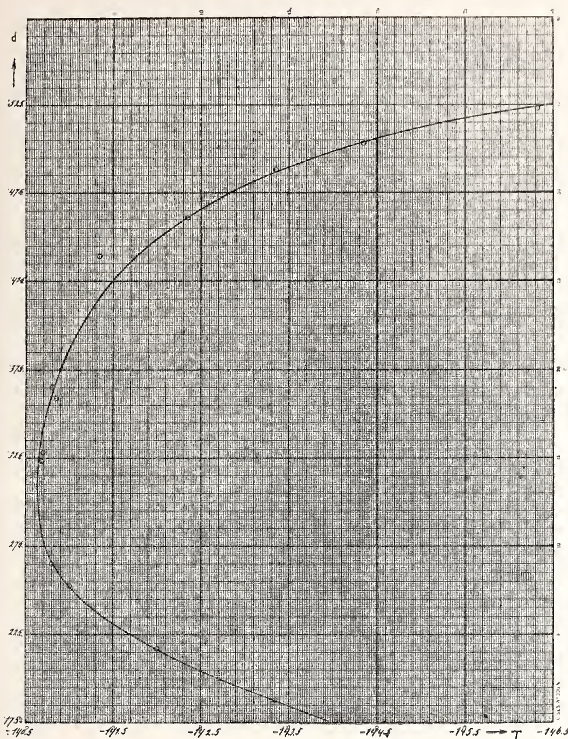


Fig. 2.

met de gewichts-samenstelling te veranderen: t_k naar de samenstelling berekend is — 140°.56. Voor de zuurstof-stikstofmengsels geldt dus de regel van PAWLEWSKI bij benadering.

In verband met den zeer geringen afstand van plooipunt en raakpunt, waarop reeds gewezen is, kunnen we hieruit nog een verdere gevolgtrekking maken. Immers de laatste omstandigheid brengt mede, dat ook de kritische temperatuur, welke lucht zou vertoonen, indien ze zonder verandering van samenstelling condenseerde, weinig van beide genoemde kritische temperaturen afwijkt en dat dus ook de zoogenaamde kritische temperatuur der ongesplitste mengsels van

zuurstof en stikstof met zekere benadering evenredig met de gewichts-samenstelling verandert. Indien deze evenredigheid gold ten opzichte van de molaire samenstelling, zoo zouden we hieruit volgens de theorie mogen besluiten, dat bij lage temperatuur de dampdrukking dezer mengsels ongeveer lineair met de samenstelling der vloeistof zou veranderen [1]). Dit is nu evenwel niet het geval en inderdaad leverden proeven van BALY [2]) dan ook een dampdruklijn, die merkbaar gebogen is.

De kritische dichtheid van lucht uit die van zuurstof en stikstof 0.43 en 0.31 volgens den mengregel naar het gewicht berekend is 0.34, een waarde, die blijkens de tabel gelegen is tusschen de dichtheid in het kritisch raakpunt 0.31 en die in het plooipunt 0.35. Indien men aanneemt, dat de mengregel voor de mengsels met constante samenstelling bij benadering doorgaat en dus ± 0.34 de kritische dichtheid voor ongesplitste lucht zou zijn, dan moet inderdaad in het plooipunt een grootere dichtheid verwacht worden. Immers de connodale lijn ligt geheel buiten de verzadigingslijn voor de mengsels van constante samenstelling en op die lijn ligt hier het plooipunt naar de zijde van de groote dichtheid. De iets kleinere dichtheid in het kritisch raakpunt is ook zeer begrijpelijk.

Aan Professor H. KAMERLINGH ONNES zijn wij veel dank verschuldigd voor zijn voortdurende belangstelling, menige nuttige raadgeving en voor de wijze, waarop hij ons in staat stelde in den korten tijd, die beschikbaar was, ons onderzoek te volbrengen.

Ook wenschen we den Heer J. M. BURGERS dank te zeggen voor het aflezen van de temperaturen, den Heer A. T. VAN URK voor zijn bijstand bij het geheele onderzoek en eindelijk hem en den Heer CH. NICAISE voor hulp bij de berekeningen.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER spreekt over: „*Kalium-uranium-antagonisme naast overeenkomst in werking elk afzonderlijk*".

Physiologisch beschouwd is er een analogie tusschen kalium- en uraniumzouten. Beide zijn heftige vergiften, het eerste voor het hart, het tweede voor de nieren [3]), maar in kleine doses kunnen zij uitermate bevorderlijk zijn aan de verrichting der organen [4]). Een

---

1) Zie o.a. J. P. KUENEN. Handb. ang. Phys. Ch. IV p. 126 1906.

2) E. C. C. BALY, Phil. Mag. (5) 49 p. 517 1900.

3 WOROSCHILSKY, Arb. a. d. pharmakol. Inst. in Dorpat. Bd, 5, 1890.

4) Bovendien bevordert b.v. uranium in de concentratie van $^1/_{1000}$n, zoowel de

zeer geschikt object om de nuttige werking na te gaan is het kunstmatig doorstroomde, spontaan klappende, kikvorschhart. Het leent zich bij uitstek tot dit doel, omdat het niet langs haarvaten wordt gevoed, maar door lacunen, die van de holte uit overal in den wand dringen. Men bezigt als kunstmatige circulatievloeistoffen zoutoplossingen, die zoo verdund moeten worden, dat zij den normalen osmotischen druk komen te bezitten en voorts op 100 moleculen chloornatrium, 2 moleculen chloorcalcium en 1 à 2 moleculen chloorkalium bevatten; verder zuurstof en een buffer, om te beletten, dat melkzuur en dergelijke zuren op den duur de reactie zouden wijzigen, hetgeen hoogst funest is gebleken [1].

Eenige maanden geleden heb ik, in proeven met den Heer Feenstra [2]) aangetoond, dat het kaliumchloride in zulke circulatievloeistoffen vervangen kan worden door uranium-, thorium- of radiumzouten. Reeds vroeger was hetzelfde voor rubidiumchloride gebleken (Sydney Ringer [3]) en nu kan ik er nog bijvoegen, dat ook radiumemanatie in een hoeveelheid van aanvankelijk 100 Mache-eenheden tot de groep van elementen behoort, die in physiologisch opzicht in de plaats van kalium kunnen treden. Deze feiten brachten ons op de gedachte te onderzoeken of vrije bestraling door mesothorium of radium tot hetzelfde doel zouden kunnen worden gebezigd. Een 34-tal proeven door mij te zamen met de heeren Benjamins en Feenstra [4]) ingesteld, beantwoordde de vraag zonder eenige uitzondering bevestigend en sedert dien tijd zijn er proeven zonder tal bijgekomen.

Er openbaart zich alzoo een geheel onverwachte analogie tusschen de genoemde stoffen, zouten van kalium, rubidium, uranium, thorium, radium (en emanatie), tot zeer verschillende groepen van het periodiek stelsel behoorend en de vrije bestraling. De innerlijke grond der verwantschap in werking moet wel in datgene zijn gelegen, dat aan allen gemeenschappelijk is, te weten de radioactiviteit. Dan rijst onmiddellijk de vraag, om welke hoeveelheden energie het hierbij gaat. Het zekerst is dit voor het geval vast te stellen, dat de kunstmatige circulatievloeistof in stede van 100 mgr. kalium-

---

alcoholgisting als den groei van tuberkelbacillen en Bacillus pyocyaneus. (Zie Becquerel en anderen in C. R. t. 154 en volg.).

[1]) G. R. Mines, J. of the Marine Biol. Assoc. Vol. 9. Oct. 1911, p. 171.

[2]) T. P. Feenstra, Zitt.versl. dezer Acad. v. 24 Juni en 10 Aug. 1916. Deel 24, p. 1822 en Deel 25, p. 37, en H Zwaardemaker, ibid. 8 Nov. 1916, Deel 25, p. 517.

[3]) S. Ringer, Journ. of Physiol. Vol. 4, p. 370.

[4]) H. Zwaardemaker, C. E. Benjamins en T. P. Feenstra, Radium-bestraling en hartswerking. Ned. Tijdschr. v. Gen. 1916 II. p. 1923.

chloride 5.10^{-6} mgr. van een radiumzout per liter bevat. Neemt men aan, dat elke sec. $^1/_{10}$ cub. c.M. door het kloppende hart passeert, dan wordt per sec. 4.10^{-7} erg aan radioactive energie het orgaan binnengedragen. Men mag veronderstellen, dat een zeker gedeelte dezer hoeveelheid door de spiercellen wordt geadsorbeerd en physiologisch werkzaam kan worden. Dan echter nadert men tot de energiegrootheden, die, gelijk bekend, de menschelijke zintuigen kunnen prikkelen, wanneer zij door een daartoe ingericht eindorgaan worden opgevangen [1]). Ook de energiehoeveelheden, die met de kunstmatige circulatievloeistoffen, waarin uranium- of thoriumzouten voorkomen, worden aangevoerd, bleken in onze proeven van een dergelijke orde [2]). Veel grooter is oogenschijnlijk de hoeveelheid der bij bestraling aangewende energie, maar het laat zich niet gissen hoeveel daarvan door de spierelementen opgenomen wordt en op het productief geabsorbeerde komt het natuurlijk aan.

De energiehoeveelheid, welke aan het normale element, het kalium, gebonden is, laat zich nog bezwaarlijker schatten. De photochemische uitwerking van kaliumzouten wordt eerst in 56 dagen op de photographische plaat merkbaar en de ioniseerende werking op de lucht is 1000 maal kleiner dan die van uranium-oxyde. De totale radioactiviteit laat zich hieruit, bij inachtneming van het absorptievermogen, langs een omweg afleiden. De metaal-dosis, waarin beide elementen in de kunstmatige circulatie-vloeistoffen voorhanden moeten zijn, verhouden zich empirisch als 53 tot 15 mgr. per Liter.

De zooeven beschreven analogie in werking van alle bekende radioactive elementen onderling, zoowel van die van klein (*K* en *Rb*) als die van groot (*U*, *Th*, *Ra*) atoomgewicht, beperkt zich niet tot het hart. Ook het vaatendothelium verkeert onder denzelfden invloed, wat *K*, *Rb*, *U* en *Th* betreft en evenzoo de dwarsgestreepte musculatuur volgens proeven in de afgeloopen maanden door Dr. Gunzburg in ons laboratorium genomen. Mee de door Hamburger en Brinkman in de vorige vergadering meegedeelde bijzonderheden omtrent het permeabel worden van het nierepithelium, zoodra hetzij het kaliumof wel het uraniumzout uit de kunstmatige circulatievloeistof wordt weggelaten, wijst in onze richting.

Tusschen het kalium eenerzijds en het uranium en thorium anderzijds is daarenboven nog een overeenkomst en wel hunne verhouding tot het calcium en strontium. De eerste en de tweede groep

[1]) H. Zwaardemaker, Erg. d. Physiol. Bd. 4, p. 452. 1905.

[2]) Het overgroot meerendeel onzer proeven werd aan zoogenaamd gekroneckerde harten uitgevoerd doch ook het hart in zijn geheel werd in vele gevallen onderzocht.

van deze zouten balanceeren zoogenaamd, d. w. z. hunne doseering kan binnen zekere grenzen gevarieerd worden, maar dan toch altijd zoo, dat, indien het gehalte der vloeistof aan een zout van de eerste groep verhoogd wordt, dit mede het geval moet zijn met het zout uit de tweede groep. Nadere bijzonderheden kan ik omtrent de

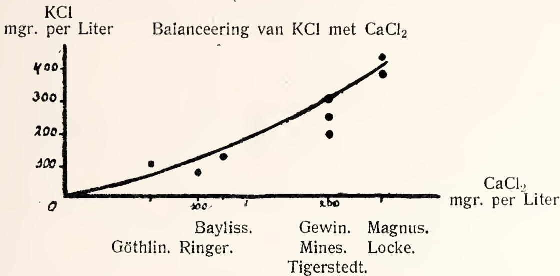


Fig. 1.

balanceering van kalium en calcium en omtrent die van uranium en calcium verschaffen. Zij zijn in twee graphieken saamgevat. De eerste ontleent haar gegevens aan de literatuur, in welke talrijke, zeer uiteenloopende doeltreffende combinaties van zouten als gangbare circulatievloeistoffen worden aangetroffen. De tweede steunt op opzettelijke proeven. In beide graphische voorstellingen geeft een bijkans rechte lijn, de verhoudingen aan, waarin òf het kaliumzout òf het uraniumzout met het calciumzout gecombineerd moet worden. Kalium-chloride en uranyl-nitraat laten zich evenzeer met strontium-

[1]) Er blijft intusschen steeds een belangrijk verschil tusschen de wijze, waarop de met de kunstmatige circulatievloeistof toegevoerde radioactieve energie is verdeeld. Bij de lichte elementen is zij over een zeer groot aantal atomen verspreid, terwijl ieder atoom slechts een minimum energie meebrengt. Bij de zware elementen daarentegen is zij in weinige atomen opgehoopt, het sterkst in het geval van het radium. De kans, dat een metaalatoom uit de circulatievloeistof aan of in een spiercel geraakt, is dientengevolge bij de zware elementen veel geringer dan bij de lichte. Nu is het voldoende, dat enkele weinige cellen tot automatie worden gebracht, want, eenmaal in gang, verbreidt zich in de hartspier de prikkelingstoestand volgens vaste regels van zelf, maar die enkele cellen moeten toch bereikt kunnen worden. Met zulk een kansrekening zou men eenigermate rekening kunnen houden door de energiehoeveelheden, per $^1/_{10}$ cub. cM. binnen gebracht, door het atoomgewicht van den drager te deelen. Op die wijze zou de geringere beteekenis van de, door zware atomen gedragen, energie tot uitdrukking kunnen komen En werkelijk naderen dan de energiewaarden voor de verschillende stoffen op opmerkelijke wijze tot elkaar. (Zie de tabel in Deel 25, p. 520).

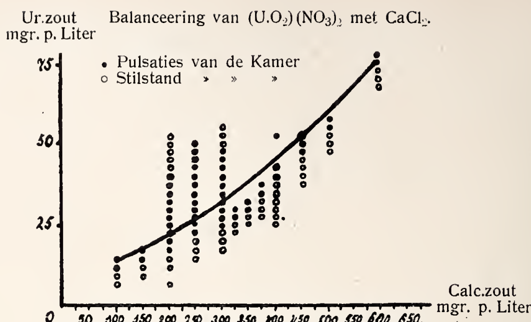


Fig. 2.

chloride in balanceering brengen, maar er staan mij niet genoeg experimenteele gegevens ten dienste om ze graphisch voor te stellen [1]).

Naast de merkwaardige overeenkomsten tusschen kalium en uranium (het eerste als kaliumion, het tweede als uranylion in de vloeistoffen aanwezig) staat echter een niet minder opmerkelijk contrast. Wanneer men een hart, dat, door een kaliumhoudende vloeistof doorstroomd, krachtig klopt, met een circulatievloeistof behandelt, welke inplaats van 100 mgr. kaliumchloride per Liter 25 mgr. uranylnitraat bevat, staat het plotseling stil. En omgekeerd, indien men aan een hart, dat met een uraanhoudende vloeistof fraai klopt, de kaliumhoudende circulatievloeistof geeft, staakt het eveneens zijn bewegingen. Eerst na geruimen tijd, vele minuten, kan het de automatie herwinnen. Juist hetzelfde geschiedt, wanneer men de normale, kaliumhoudende vloeistof op een thoriumhoudende, op een radiumhoudende of op een emanatiehoudende vloeistof laat volgen. Daarentegen niet, wanneer aan een hart eerst rubidium en daarna kalium of omgekeerd wordt toegediend. Evenmin, wanneer uraanhoudende op emanatiehoudende vloeistof volgt, of omgekeerd. Successief toegepast, verdragen zich aldus, de lichte elementen onderling, of de zware elementen onderling. Daarentegen zijn de beide groepen elkaars antagonisten. Na elkaar aangewend, brengen zij het hart tot stilstand, op zich zelf blijvend, onderhouden zij de beweging voor onbepaalden tijd.

Maakt men van de vloeistoffen mengsels in gelijke deelen, dan verdraagt zich het mengsel van kalium en rubidium met beweging, eveneens dat van uranium en thorium, maar kalium met uranium of

[1]) Zie overigens W. Jolles, Diss. Utrecht 1916, p. 39.

thorium of wel rubidium met uranium laten geen beweging toe. Derhalve, niet slechts successief, ook simultaan werken de lichte en de zware elementen antagonistisch. Omtrent de verhouding kalium-uranium geeft onderstaande grafische voorstelling nader rekenschap. De

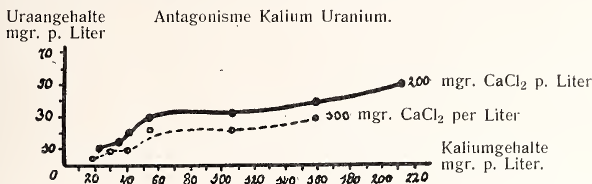


Fig. 3.

punten geven de combinaties aan, waarbij het hart tot stilstand werd gebracht. In de mengsels, die hun plaats vinden boven de getrokken lijn, herstelde zich de automatie onder den invloed van kaliumovermaat; in de mengsels beneden de getrokken lijn keerden de kloppingen terug onder den invloed van uraniumovermaat De getrokken lijn heeft betrekking op een reeks proeven met vloeistoffen waarin naast de antagonistische zouten, het chloornatrium en den buffer nog 200 mgr. chloorcalcium per Liter voorkwam. Er beneden bevindt zich een stippellijn, die hetzelfde aangeeft voor circulatievloeistoffen met slechts 100 mgr. chloorcalcium.

Ook het antagonisme van uranium tegenover radiumbestraling (door een dun micavenster heen) resp. mesothoriumstraling (door een dunnen glaswand) kan gemakkelijk worden aangetoond. Van uit het neutralisatiepunt der antagonisten kalium-uranium is het hart door bestraling verwonderlijk snel, in enkele minuten, tot beweging te brengen. Voegt men eenig juist afgemeten uranylnitraat toe, dan staat het stil om bij bestraling weer te gaan kloppen [1]). Klaarblijkelijk staat de bestraling in het evenwicht aan den kant van het kalium, tegengesteld aan het uranium.

Juist uit de laatste proeven, die wij vele malen herhaalden, blijkt

[1]) Zet men de bestraling langeren tijd voort, dan komt weldra opnieuw stilstand, die door uraan toevoeging weer in beweging kan worden veranderd, doch niet door kaliumtoevoeging. Op den duur intusschen ontwikkelt zich een toestand, waarvan de voorwaarden nog niet konden worden ontward en die ik voorloopig de secundaire toestand van radioactiviteit wil noemen. Hij kenmerkt zich doordat het hart alleen met een Ringersche vloeistof wil kloppen, die noch kalium noch uranium bevat. Men zal bij de kritiek dezer proeven bedacht moeten zijn op de minimale hoeveelheden Uranium X, welke naast het uranium voorhanden zijn en die alleen bij opzettelijke voorbereiding kunnen worden verwijderd.

ten duidelijkste, dat het de radioactieve eigenschap van het uranium en niet iets anders is, dat tegenover den invloed der bestraling (door een micavenster of door een dunnen glaswand heen) moet worden gesteld. Dan zal echter ook het geheele antagonisme kalium-uranium op deze oorzaken moeten berusten.

Het ligt voor de hand in onzen gedachtengang uit het gevonden antagonisme een maat voor de biologische radio-activiteit van het kalium te willen afleiden en haar te stellen naast de photochemische resp. electrische, maar dit wordt voorshands nog bemoeilijkt door den ingewikkelden invloed (balanceering) van het tevens aanwezige calcium, welke in fig. 3 aanleiding geeft tot het ontstaan van twee curven van overeenkomstig karakter, een voor de gelijktijdige toevoeging van 100 en een ander voor die van 200 mgr. chloorcalcium per Liter.

Scheikunde. — De Heer SCHREINEMAKERS biedt eene mededeeling aan over: „*In-, mono- en divariante evenwichten.*" XV.

Het optreden van twee indifferente phasen; het evenwicht M is veranderlijk singulier.

Wij beschouwen thans het geval dat het singuliere evenwicht (M) niet meer constant maar veranderlijk is; een of meer phasen van M hebben dus eene veranderlijke samenstelling. (Med. X).

Is (M) constant singulier, dan geldt, zooals wij in mededeeling X hebben afgeleid:

1°. Hebben de twee indifferente phasen hetzelfde teeken, dan is M transformabel.

2°. Hebben de twee indifferente phasen tegengesteld teeken, dan is M niet transformabel.

Het is duidelijk dat dezelfde regels ook gelden als (M) een veranderlijk singulier evenwicht is.

Om te onderzoeken welke P,T-diagrammen thans kunnen optreden nemen wij een invariant punt met de phasen $F_1 \ldots F_{n+2}$, waarin F_p en F_{p+1} de indifferente en de andere dus de singuliere phasen zijn. Wij hebben dan de singuliere evenwichten:

$$(M) = F_1 + \ldots + F_{p-1} + F_{p+2} + \ldots F_{n+2}$$
$$(F_p) = (M) + F_{p+1} \text{ en } (F_{p+1}) = (M) = F_p$$

waarin (M) thans een of meer phasen van veranderlijke samenstelling bevat.

Is (M) constant singulier dan is kurve (M) éénzijdig [fig. 1 (X)] of tweezijdig [fig. 2 (X)]; in het eerste geval vallen de 3 singuliere

kurven in dezelfde richting samen; in het tweede geval vallen (F_p) en (F_{p+1}) in tegenovergestelde richting samen.

Is (M) echter veranderlijk singulier, dan kunnen de drie singuliere kurven niet meer samenvallen. Zij nl. P_0 en T_0 druk en temperatuur van het invariante evenwicht en nemen wij aan dat in (M) en dus ook in (F_p) en (F_{p+1}) de phasen F_x, F_y, enz. van veranderlijke samenstelling optreden. Bij P_0 en T_0 hebben F_x en F_y dan in (M) en (F_p) dezelfde samenstelling. Wij nemen nu eene temperatuur T_1. Brengt men (M) op de temperatuur T_1 en den bijbehoorenden druk, dan krijgen F_x en F_y eene andere samenstelling F_x' en F_y'. Deze samenstellingen zijn natuurlijk zoo, dat tusschen de phasen van (M) nog altijd de phasenreactie mogelijk is.

Brengt men (F_p) op de temperatuur T_1 en den bijbehoorenden druk, dan krijgen F_x en F_y niet de samenstelling F_x' en F_y', maar eene andere samenstelling F_x'' en F_y''.

Neemt men nu bij T_1 uit $(F_p) = (M) + F_{p+1}$ de phase F_{p+1} weg, dan krijgt men niet het evenwicht (M), maar, daar F_x'' en F_y'' eene andere samenstelling hebben dan F_x' en F_y', een evenwicht dat van (M) verschilt. Kurve (M) en (F_p) vallen dus niet samen. Hetzelfde geldt voor (M) en (F_{p+1}) en voor (F_p) en (F_{p+1}); de singuliere kurven vallen dus niet samen. Zij vormen, zooals in de fig. 1—5 geteekend, drie afzonderlijke kurven.

Men kan nu aantoonen:

1°. de drie singuliere kurven raken elkaar in het punt i.

2°. (F_p) en (F_{p+1}) liggen aan dezelfde zijde der (M)-kurve.

Het eerste volgt dadelijk uit de betrekking

$$T\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

In het punt i is n.l. de reactie, die in de drie singuliere evenwichten optreedt, dezelfde, zoodat $\frac{dP}{dT}$ in het punt i voor de drie kurven ook hetzelfde is.

Om het tweede aan te toonen beschouwen wij het bivariante evenwicht:

$$(F_p F_{p+1}) = F_1 + \ldots + F_x + F_y + \ldots + F_{p-1} + F_{p+2} \ldots F_{n+2}. \quad (1)$$

Dit veld heeft eene keerlijn (M), die daardoor bepaald is dat in (1) de veranderlijke phasen $F_x, F_y, \ldots$ zulke samenstelling hebben, dat tusschen deze n phasen eene phasenreactie mogelijk is. De singuliere kurve (M) is dus hetzelfde als de keerlijn van het veld $(F_p\, F_{p+1})$; wij hebben dus hier het bijzondere geval, waarop wij in (VIII) reeds wezen nl. dat het punt i in fig. 5 (VIII) op de keerlijn

$xyzu$ van het veld $(F_p\ F_{p+1})$ ligt. Daar (F_p) en (F_{p+1}) binnen de keerlijn van dit veld moeten liggen, zoo liggen ze dus aan dezelfde zijde der (M)-kurve.

Om de P,T-diagrammen af te leiden, kunnen wij weer de regels van de isovolumetrische en isentropische reactie op de kurven $(M), (F_p)$ en (F_{p+1}) toepassen. Bij deze toepassing ten opzichte van de (M)-kurve bedenke men echter het volgende.

Heeft men eene constant singuliere kurve (M), dan kan men met behulp van een enkel komplex K van bepaalde samenstelling altijd eene geheele reeks van evenwichten (b.v. tusschen de temperaturen T_1 en T_2) der (M)-kurve realiseeren. Is (M) echter veranderlijk singulier, dan is dit niet altijd meer mogelijk. Wij kunnen dan het geval hebben, dat men met elk bepaald komplex K slechts een enkel evenwicht der (M)-kurve (b.v. dat eener temperatuur T) kan verkrijgen; om het evenwicht eener temperatuur $T + dT$ te realiseeren, moet men dan weer een komplex van eene andere samenstelling nemen.

Is dat laatste nu het geval en is T_0 de temperatuur en P_0 de druk van het invariante punt, dan kan men met eenzelfde komplex K niet een evenwicht der temperaturen T_0 en $T_0 + dT$ of der drukken P_0 en $P_0 + dP$ verkrijgen; de regels der isovolumetrische en der isentropische reactie kunnen dan ook niet toegepast worden.

In het eerste geval hebben wij:

de beide indifferente phasen hebben hetzelfde teeken; het evenwicht (M) is dus transformabel.

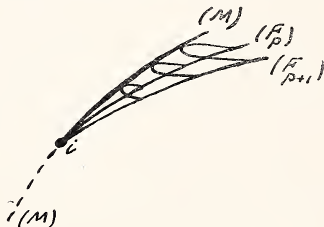


Fig. 1.

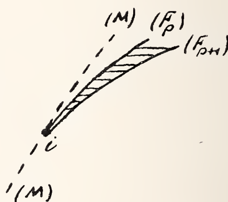


Fig. 2.

De stabiele deelen der kurven (F_p) en (F_{p+1}) gaan van uit het punt i in dezelfde richting; men krijgt dan P,T-diagrammen als in fig. 1 en 2.

[In deze en volgende figuren is van de kurven (F_p) en (F_{p+1})

slechts het stabiele deel geteekend; het metastabiele deel der (M)-kurve is gestippeld]. In fig. 1 is het eene deel der (M)-kurve stabiel, het andere deel metastabiel; in fig. 2 is de (M)-kurve alleen stabiel in het punt i.

In het tweede geval hebben wij:

de beide indifferente phasen hebben tegengesteld teeken, het evenwicht (M) is dus niet transformabel.

De stabiele deelen der kurven (F_p) en (F_{p+1}) gaan van uit het punt i in tegenovergestelde richting; men krijgt dan P, T-diagrammen als in de fig. 3, 4 en 5. In fig. 3 is de (M)-kurve tweezijdig, in

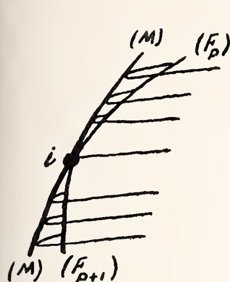


Fig. 3.

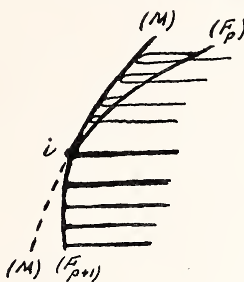


Fig. 4.

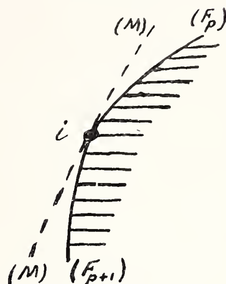


Fig. 5.

fig. 4 éénzijdig, in fig. 5 is zij, behalve in het punt i metastabiel.

[In eene volgende verhandeling zullen wij aantoonen dat de (M)-kurve ook een keerpunt kan hebben. Ligt dit toevallig in het punt i, dan zullen de beschouwde diagrammen hierdoor eenigszins veranderd worden.]

Tusschen de kurven (F_p) en (F_{p+1}) breidt zich het stabiele deel van het veld $(F_p F_{p+1})$ uit. Dit veld is in de figuren door eenige horizontale lijnen en boogjes aangegeven.

In fig. 1 breidt het zich van (F_p) en (F_{p+1}) uit tot aan de (M)-kurve; het stabiele deel van het veld $(F_p F_{p+1})$ bestaat dus uit twee bladen, die elkaar ten deele bedekken.

In fig. 2 kan het stabiele deel van het veld $(F_p F_{p+1})$ zich niet uitbreiden tot het in de nabijheid van het punt i liggende deel der (M)-kurve. Het kan liggen zooals in fig. 2 geteekend en is dan éénbladig.

De afleiding der velden in de fig. 3—5 laat ik aan den lezer over.

Wij zullen thans enkele gevallen beschouwen, die wij gemakkelijk

uit fig. 1 (VIII) en de bijbehoorende fig. 2 (VIII) kunnen afleiden. Wij denken ons in fig. 1 (VIII) de vloeistof L op de lijn GZ_2, zoo dat L en d samenvallen. Wij hebben dan het veranderlijke singuliere evenwicht:

$$(M) = Z_2 + L + G$$

dat transformabel is. Dit evenwicht (M) wordt in fig. 1 (VIII) voorgesteld door de lijn $GdZ_2 = GLZ_2$, de keerlijn van het veld $Z_2 LG$, welks stabiel gedeelte tusschen de kurven La en Lb ligt. Wij onderscheiden nu twee gevallen.

I. Kurve La ligt links en kurve Lb rechts van GZ_2 (nl. als men van G uit naar Z_2 gaat). Het stuk $dZ_2 = LZ_2$ van het evenwicht (M) is dus stabiel, het stuk $dG = LG$ is metastabiel.

Men denke zich in fig. 2 (VIII) nu ook de (M)-kurve geteekend, die volgens fig. 1 (VIII), van i uitgaat en boven de kurven ia en ib moet liggen. De drie singuliere kurven (M), (Z_1) en (Z_3) moeten elkaar dan in i raken. De drie kurven liggen ten opzichte van elkaar dan als in fig. 1.

Men kan de ligging der drie kurven ook uit fig. 3 (VIII) afleiden. Kurve $(M) = dg$, die ia in d raakt, stelt de keerlijn van het veld $(Z_1 Z_3) = Z_2 LG$ voor. Laat men d met i samenvallen, dan moeten ig, ia en ib elkaar in i raken. Men ziet ook hieruit dat de ligging der drie singuliere kurven en die van het veld $(Z_1 Z_3) = Z_2 LG$ met fig. 1 in overeenstemming is.

Zoolang punt L in fig. 1 (VIII) rechts van de lijn GZ_2 ligt, ligt in fig. 2 (VIII) en 3 (VIII) kurve ia boven ib. Valt in fig. 1 (VIII) L echter op GZ_2, dan raken in fig. 2 (VIII) en 3 (VIII) ia en ib elkaar in i, maar kan verder ia zoowel boven als beneden ib liggen. Dit blijkt dadelijk uit fig. 1 (VIII).

Men kan de ligging van L op de lijn GZ_2 als een overgangsgeval beschouwen nl. tusschen het geval dat L rechts [fig. 1 (VIII)] en dat L links van de lijn GZ_2 ligt. In het eerste geval ligt ia boven ib [fig. 2 (VIII)], in het tweede moet echter ib boven ia liggen.

[Wil men dezen overgang nader beschouwen dan bedenke men het volgende. Ligt L als in fig. 1 (VIII) dan moet in fig. 2 (VIII) kurve (Z_3) boven (Z_1) liggen. Dit is echter alleen waar voorzoover men punten dezer kurven in de nabijheid van punt i beschouwt. Uit fig. 1 (VIII) blijkt dat dit zeker waar is voor punten op Ld en Lm. Op verderen afstand van i kunnen de kurven (Z_1) en (Z_3) in fig. 2 (VIII) elkaar echter snijden. Uit de richting der pijltjes b.v. op kurve agb in fig. 1 (VIII). blijkt nl. dat de druk in a en b hetzelfde zou kunnen zijn. Is dit het geval dan moeten in fig. 2 (VIII)

de punten a en b samenvallen en hebben de kurven (Z_1) en (Z_3) dus een snijpunt.]

II. De beide kurven La en Lb liggen in fig. 1 (VIII) rechts van de lijn GZ_2. Het evenwicht (M) is dus, behalve in het punt L, metastabiel.

Men denke zich in fig. 2 (VIII) nu ook de metastabiele (M)-kurve geteekend. Uit fig. 1 (VIII) blijkt dat de (M)-kurve boven kurve (Z_3) en deze weer boven kurve (Z_1) moet liggen. Deze drie kurven moeten elkaar dan in i raken. De ligging der drie singuliere kurven en van het veld $(Z_1 Z_3) = Z_2 LG$ stemt dan met fig 2 overeen.

Wij denken ons nu in fig. 1 (VIII) de vloeistof L op de lijn GZ_3, zoodat L en e samenvallen. Wij hebben dan het veranderlijke singuliere evenwicht:

$$(M) = Z_3 + L + G$$

dat nu echter niet transformabel is. Dit evenwicht (M) wordt in fig. 1 (VIII) voorgesteld door de lijn $GeZ_3 = GLZ_3$, de keerlijn van het veld $Z_3 LG$, welks stabiele deel tusschen de kurven Lb en Lc ligt. Naargelang de ligging van de kurven La, Lb en Lc ten opzichte der lijn GLZ_3 volgen nu in het P,T-diagram van fig. 2 (VIII) verschillende gevallen, die met de fig. 3—5 overeenstemmen.

Bij de afleiding der fig. 1—5 hebben wij het volgende aangenomen. Brengt men de evenwichten (M), (F_p) en (F_{p+1}) van T_0 en P_0 op de temperatuur T_1 en bijbehoorende drukken, dan krijgen de veranderlijke phasen (b.v. F_x) in elk der drie evenwichten andere samenstellingen [b.v. F_x', F_x'' en F_x''']. Dit is echter niet altijd het geval. Nemen wij nl. aan dat in het invariante punt de phasen van het singuliere evenwicht

$$(M) = F_3 + F_4 + \ldots + F_x + \ldots + F_{n+2}$$

tezamen slechts $n-1$ der komponenten bevatten; in het evenwicht (M) ontbreekt dan één der n komponenten; wij noemen deze komponent K.

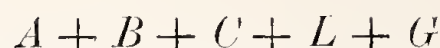
De veranderlijke phase F_x bevat dus ook slechts $n-1$ komponenten (of minder) en dit is niet alleen het geval bij T_0 en P_0 maar ook bij andere T en P; dit is ook niet alleen het geval in het evenwicht (M) maar ook in de andere evenwichten.

Dit is b.v. het geval als F_x een gas is en K een niet vluchtige stof of als F_x een mengkristal is en K hiermede niet mengbaar.

In het evenwicht:

$$(F_1 F_2) = F_3 + F_4 + \ldots$$

hebben wij nu $n-1$ komponenten in n phasen, het is dus niet bivariant, maar monovariant; het wordt in het P,T-diagram dus niet voorgesteld door een veld, maar door eene kurve. De evenwichten (M), (F_1) en (F_2) vallen dus met deze kurve samen. Daar het evenwicht (M) natuurlijk niet transformabel is, (er ontbreekt nl. de stof K in), zoo is de (M)-kurve tweezijdig en vallen de kurven (F_1) en (F_2) dus in tegengestelde richting samen. Men krijgt dan fig. 2 (X). Een dergelijk geval zal b.v. optreden in een ternair stelsel met de komponenten A, B en C als in het invariante punt het evenwicht:



$$A + B + C + L + G$$

bestaat, waarin de gasphase G alleen twee stoffen, b.v. B en C bevat.

Overzicht der P,T-diagramtypen.

Neemt men een invariant punt met de phasen $F_1 \dots F_{n+2}$, dan kunnen verschillende gevallen optreden.

I. Er zijn reacties mogelijk, waaraan alle phasen van het invariante punt kunnen deelnemen. Wij schrijven deze reacties:

$$a_1 F_1 + a_2 F_2 + \dots + a_{n+2} F_{n+2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$\mu_1 a_1 F_1 + \mu_2 a_2 F_2 + \dots + \mu_{n+2} a_{n+2} F_{n+2} = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

Wij onderscheiden nu de volgende gevallen.

A. $\mu_1, \mu_2, \dots$ zijn alle verschillend. Er zijn dus geen indifferente phasen; men krijgt dan de algemeene P,T-diagramtypen.

B. $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Er zijn dus twee indifferente phasen n.l. F_1 en F_2 en drie singuliere kurven n.l. (M), (F_1) en (F_2). In het evenwicht $(F_1\, F_2)$ kan de reactie:

$$(\mu - \mu_3)\, a_3 F_3 + (\mu - \mu_4)\, a_4 F_4 + \dots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

optreden. Dit evenwicht $(F_1\, F_2)$ kan mono- of bivariant zijn, (niet invariant). Is $(F_1\, F_2)$ monovariant, dan wordt het in het P,T-diagram voorgesteld door eene kurve; de singuliere kurven vallen dan samen. [Fig. 1 (X) en 2 (X)].

Is $(F_1\, F_2)$ bivariant, dan wordt het in het P,T-diagram voorgesteld door een veld; de 3 singuliere kurven raken elkaar in het invariante punt, [fig. 1–5 (XV)].

C. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Er zijn dus drie indifferente phasen n.l. F_1, F_2 en F_3 en vier singuliere kurven n.l. (M), (F_1), (F_2) en (F_3). In het evenwicht $(F_1\, F_2\, F_3)$ kan de reactie:

$$(\mu - \mu_4)\, a_4 F_4 + (\mu - \mu_5)\, a_5 F_5 + \dots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

optreden. Dit evenwicht $(F_1\, F_2\, F_3)$ is tri-, bi- of monovariant.

Is het monovariant, dan vallen de singuliere kurven samen. Een voorbeeld is in mededeeling XIV besproken.

D. $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r = \mu$; waarin $r \leq n$. Er zijn dus r indifferente phasen en $r+1$ singuliere evenwichten. In het evenwicht $(F_1 F_2 \ldots F_r)$ kan nu reactie:

$$(\mu - \mu_{r+1})\, a_{r+1}\, F_{r+1} + \ldots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

optreden. Dit evenwicht kan zijn r — tot monovariant.

E. $\mu_1 = \ldots = \mu_k = \mu$ en $\mu_{l+1} = \ldots = \mu_{l+m} = \mu'$, waarin $K < l$. Er zijn dus twee groepen van indifferente phasen. Bij de eerste groep behooren $K+1$, bij de tweede $m+1$ singuliere kurven.

Voor $K = l$ gaat E in D over.

Er kunnen ook drie en meer groepen van indifferente phasen optreden.

Een voorbeeld vindt men in het stelsel water + een zout A + een zout B, als in het invariante punt de phasen $G + A + B + A_m + B_n$ optreden, waarin A_m en B_n hydraten voorstellen.

Er is geen reactie mogelijk, waaraan alle phasen van het invariante punt kunnen deelnemen.

Kan b.v. de phase F_1 aan geene enkele reactie deelnemen, dan wordt in (1) en (2) $a_1 = 0$. Wij hebben dan een invariant punt met $n+1$ phasen, waarvoor de beschouwingen onder *I* gelden.

Leiden, *Anorg. Chem. Lab.* *(Wordt vervolgd).*

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan van den Heer J. D. VAN DER WAALS JR.: *„Over de energie en den Straal van het Electron".*

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ.)

Het is bekend, dat het contraheerend electron (het zoogenaamd LORENTZ-electron) behalve de electrische energie U en de magnetische energie T nog een energie van anderen aard moet bezitten. POINCARÉ [1]) heeft het bedrag dezer energie, die wij door E zullen aanduiden, berekend en ervoor gevonden [2]):

$$E = E_1 + \frac{e^2}{8\pi a^4} \times \frac{4}{3}\, \pi a^3 k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hierin is E_1 een integratie-constante, a de straal van het electron, e de lading ervan, c de lichtsnelheid, $k = \sqrt{1-\beta^2}, \beta = \frac{\mathfrak{w}}{c}$, $\mathfrak{w}$ = de

1) H. POINCARÉ, Rend. del circ. mat. di Palermo. Tomo XXI, Ad. d. 23 Luglio 1905.

2) De notatie is een andere, dan die van POINCARÉ.

snelheid van het electron. De energie is dus te beschouwen als de arbeid, verricht door een inwendigen, constanten, negatieven druk $\frac{e^2}{8\pi a^4}$ bij de volum-verandering van het electron. Indien wij op de gewone, door LORENTZ gevolgde wijze de massa van het electron berekenen uit de electromagnetische hoeveelheid van beweging $\mathfrak{G}$, dan blijkt die massa, althans voor een electron met oppervlakte-lading, waartoe ik mij hier zal beperken, te voldoen aan de betrekking

$$m = \frac{1}{c^2}(T + U + E) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mits wij $E_1 = 0$ stellen. E wordt dan de arbeid noodig om het volume van het electron van 0 op het gegeven volume te brengen, en wij schrijven aan het electron geen andere massa toe, dan die, welke volgens het bekende principe uit de energie volgt.

Ik wil hier de berekening van E wat nader beschouwen. POINCARÉ heeft deze grootheid berekend uit de voorwaarde, dat de gecontraheerde vorm voor het bewegend electron de evenwichtsgedaante zou zijn, en dat E dus werd de arbeid van een kracht, die met de electromagnetische krachten evenwicht maakt. Met de dynamica heeft hij haar niet op juiste wijze in verband gebracht. Immers hij schrijft

$$\mathfrak{G} = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}}(T - U) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

welke vergelijking echter niet uitkomt.

ABRAHAM heeft E anders berekend. Hij heeft juist voorop gesteld, dat vergelijking (3) niet zou gelden, maar gecorrigeerd zou moeten worden tot:

$$\mathfrak{G} = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}}(T - U - E) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

Daar E in deze vergelijking de eenige onbekende is, is zij er uit te berekenen. Dit levert de door vergelijking (1) weergegeven waarde weder op. Bij deze berekening, evenals bij die van POINCARÉ, wordt E als potentieele energie in rekening gebracht. Bovendien wordt door ABRAHAM aangenomen, dat $\mathfrak{G}$ de totale hoeveelheid van beweging van het electron is, d. w. z. dat het geen andere dan de electromagnetische, door $\frac{1}{c^2} \times$ den straalvector bepaalde, hoeveelheid van beweging bezit.

Dit lijkt echter a priori weinig waarschijnlijk. Immers, volgens het principe van de massa van de energie zouden wij verwachten, dat het

electron nog een hoeveelheid van beweging $E \times \frac{\mathfrak{w}}{c^2}$ zou bezitten, die niet van electromagnetischen aard was. Bovendien zou men verwachten dat POINCARÉ's druk bij beweging van het electron tot een transport van energie aanleiding zou geven, die ook nog met een hoeveelheid van beweging gepaard zou gaan. Wij zullen daarom de totale hoeveelheid van beweging door een voorloopig onbekende grootheid $\mathfrak{G}_{tot}$ voorstellen. Wanneer wij niet vooraf stellen, dat $\mathfrak{G}_{t.t} = \mathfrak{G}$, verliest de berekeningswijze van E door ABRAHAM haar geldigheid. Wij zullen dus ter berekening van E een eenigszins anderen weg moeten inslaan. Daartoe zullen wij aangaande $\mathfrak{G}_{tot}$ onderstellen, dat zij aan de vergelijking :

$$\mathfrak{G}_{tot} = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}} (T - U - E) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

zal voldoen, welke de onbekende grootheden $\mathfrak{G}_{tot}$ en E bevat. Als tweede vergelijking, welke noodig is om deze grootheden te berekenen, zullen wij aannemen :

$$\mathfrak{G}_{tot} = \frac{\mathfrak{w}}{c^2} (T + U + E) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

Zoo vinden wij voor E de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{w}} + \frac{\mathfrak{w}}{c^2} E = -\frac{\partial (T - U)}{\partial \mathfrak{w}} + \frac{T + U}{c^2} \mathfrak{w} \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (4)$$

Daar $T - U = -\frac{e^2}{2a} k$ en $T + U = \frac{e^2}{2ak}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}\right)$ vinden wij als oplossing van (4)

$$E = \frac{e^2 k}{6a} + C\, e^{-\frac{\mathfrak{w}^2}{2c^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waarin C een willekeurige integratie-constante voorstelt. Eischt men, dat voor het LORENTZ-electron aan $m = \frac{m_0}{k}$ zal beantwoorden $T + U + E = \frac{1}{k}(T_0 + U_0 + E_0)$, dan wordt $C = 0$ zoodat men voor E de door POINCARÉ en door ABRAHAM berekende waarde terugvindt.

Er blijkt nu achteraf, dat

$$\mathfrak{G}_{tot} = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}} (T - U - E) = \mathfrak{G}$$

zoodat men de beide correcties, waarover boven sprake was, niet aan $\mathfrak{G}$ behoeft aan te brengen om $\mathfrak{G}_{tot}$ te vinden. De beide correcties blijken elkaar op te heffen. Deze uitkomst is opmerkelijk. Zij toont

aan, dat de energie in het electron stilstaat. Aan de voorzijde is de straalvector naar het electron toe gericht. De energie komt dus, als zij de voorzijde van het electron treft, plotseling tot rust, en blijft binnen het electron in rust, tot zij door de achterzijde van het electron wordt bereikt. Dan komt zij weer als stralende energie in beweging, maar nu van het electron afgericht.

Ik wil er even aan herinneren, dat de gebruikelijke berekening van den straal van het electron geheel afhankelijk is van de onderstelling, dat $\mathfrak{S}_{tot} = \mathfrak{S}$. De juistheid van die berekening staat en valt dus met de juistheid van de boven aangenomen onderstellingen:

1e. dat de supplementaire energie E in de functie van Lagrange als potentieele energie moet worden ingevoerd, zooals reeds Poincaré en Abraham hebben aangenomen.

2e. dat de massa van het electron gelijk is aan zijn energie $\times \frac{1}{c^2}$.

Natuurkunde. — De Heer Julius biedt een mededeeling aan van de Heeren W. J. H. Moll en L. S. Ornstein: *„Bijdrage tot de studie der vloeibare kristallen".*

II. *De invloed van de temperatuur op de extinctie; verdere proeven over den invloed van het magnetisch veld.*

(Mede aangeboden door den Heer van der Stok).

Bij het verdere onderzoek van de vloeibare kristallen, waarvan wij hieronder de uitkomsten willen mededeelen, werd gebruik gemaakt van dezelfde opstelling die wij vroeger beschreven. (Deze verslagen XXV pag. 682). Alleen werden eenige verbeteringen aangebracht waarvan de voornaamste is, dat de glaasjes in het oventje vervangen zijn door een schijfje koper met een centrale boring van ongeveer drie millimeter diameter. Op dit schijfje worden dan de beide glaasjes, waartusschen zich het preparaat bevindt, neergelegd. Hierdoor wordt het groote voordeel verkregen dat aanraking van het preparaat met koper is vermeden, en dat snel achter elkaar verschillende preparaten op denzelfden oven onderzocht kunnen worden. De nauwe boring in het koperplaatje verzwakt wel is waar de intensiteit van het lichtbeeld dat de thermozuil treft, maar verzekert daarentegen een volkomen gelijkmatige verwarming van het zeer kleine deel van het preparaat dat zich in observatie bevindt.

§ 1. *De invloed van de temperatuur op de extinctie.*

De meting van de extinctie in hare afhankelijkheid van de temperatuur

geschiedt op de volgende wijze. Het preparaat dat tevoren tusschen twee glaasjes gesmolten en dat daarna gestold is, wordt op het oventje gebracht waarvan de temperatuur beneden het smeltpunt is. Dan wordt de verwarmingsstroom op een zoodanige waarde ingesteld, dat op den duur de smelting tot isotroop-vloeibaar bereikt zal worden. Als dan na eenigen tijd het preparaat gesmolten is, wordt de verwarmingsstroom afgezet (of verminderd) zoodat het preparaat weder vloeibaar-kristallijn wordt en daarna stolt. Op de vroeger beschreven methode wordt gedurende deze temperatuurstijging en temperatuurdaling de extinctie geregistreerd. Onderzocht werden p-azoxy-anisol, p-azoxy-phenetol, anisaldazine en p-azoxy-benzoëzure-aethylester. In fig. 1 en 2 zijn de exinctiekrommen weergegeven van twee dezer stoffen [1]).

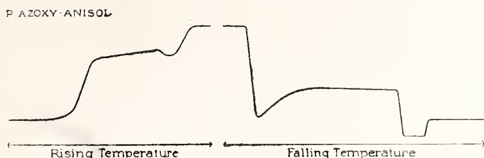


Fig. 1.

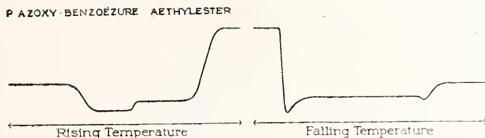


Fig. 2.

Wat bij de beschouwing van deze extinctiekrommen in het oog springt, is dat de extinctie in den vloeibaar-kristallijnen toestand die door smelting van de vaste phase ontstaat („exvast") anders is dan in den vloeibaar-kristallijnen toestand die door afkoeling van de isotrope vloeistof gevormd wordt („exvloeibaar"). Deze verschillende extinctie gaat gepaard met een geheel verschillend uiterlijk.

Het meest opvallend treden deze verschillen aan den dag bij p-azoxy-benzoëzure-aethylester. Bij deze stof is de exvaste toestand melkachtig-troebel, de exvloeibare korrelig-troebel, en bij verwarming van het preparaat slaat (steeds bij dezelfde temperatuur) de eerste toestand in den anderen om. In de kromme toont die overgang zich door een sprongsgewijze vermeerdering der inxtintie. In de afkoe-

[1]) p-azoxy-phenetol en anisaldazine leverden krommen van hetzelfde karakter als p-azoxy-anisol.

lingstak van de extinctiekromme vonden wij slechts een aanduiding dat bij den plotselingen overgang van vloeibaar tot vloeibaar-kristallijn gedurende korten tijd onstandvastig de exvaste staat kon hebben bestaan, maar door zéér snelle afkoeling gelukte het ons uit den vloeibaren staat den exvasten *blijvend* te doen ontstaan.

Ook bij de drie andere onderzochte stoffen vertoont zich een zeer duidelijk onderscheid in extinctie tusschen den exvloeibaren en den exvasten staat maar in tegenstelling met p-azoxy-benzoëzure-aethylester is bij deze drie stoffen van beide vloeibaar-kristallijne toestanden de exvloeibare de meest troebele.

Een verdere bijzonderheid van de extinctiekrommen zijn de verschillende zakvormige inzinkingen.

De inzinkingen bij den overgang van vloeibaar-kristallijn naar isotroop-vloeibaar en omgekeerd zijn onwezenlijk, d.w.z. hebben voor de extinctie als zoodanig geen beteekenis. Zij worden daardoor veroorzaakt, dat de smelting (resp. de troebeling) niet in alle deelen van het preparaat gelijktijdig tot stand komt. Door het groot verschil in brekingsindex van de heldere en de troebele vloeistof hebben daar waar beide phasen aan elkaar grenzen brekingsverschijnselen plaats, tengevolge waarvan, al naar den toevalligen vorm en oriënteering van de grens, het beeld van de Nernst-stift wordt verbreed, vervormd of verschoven. Hiervan zal een tijdelijke verzwakking van den thermostroom, dus een inzinking van de extinctiekromme het gevolg zijn.

Het feit dat de extinctiekromme slechts langzaam stijgt nadat uit de isotroop-vloeibare phase de vloeibaar-kristallijne is ontstaan, meenen wij hierdoor te kunnen verklaren, dat bij de plotselinge troebeling een zeer ontrichte toestand optreedt, waarin zich slechts langzamerhand de richtende invloed van den glaswand doet gelden.

Een eigenaardige inzinking vertoonde een enkele maal de extinctiekromme van p-azoxy-anisol bij den overgang van vloeibaar-kristallijn naar vast. In fig. 1 is deze inzinking aangegeven. Ze deed zich in het bijzonder dan voor, wanneer het preparaat in zeer dunne laag werd onderzocht en dan sterk onderkoeld was geweest. Bij macroscopisch onderzoek bleek ons dat zich onder die omstandigheden groengele kristallen vormden, die wij weldra konden identificeeren met de reeds door Lehmann in 1890 beschreven metastabiele vaste phase. [1])

---

[1]) Het is misschien goed, op te merken dat het ons gelukte van deze groengele phase het smeltpunt te bepalen en wel op 108°. Vorländer zoowel als Schenck betwijfelen de geldigheid van een overeenkomstig resultaat van Lehmann.

Eindelijk is uit onze krommen de temperatuurafhankelijkheid van de extinctie af te lezen. Bepalen wij ons tot p-azoxy-anisol (fig. 1) dan is in den exvasten toestand een sterke temperatuurafhankelijkheid te constateeren in dien zin, dat bij stijgende temperatuur de extinctie afneemt. Ook het omgekeerde effect, toeneming der extinctie bij dalende temperatuur, liet zich voor den exvasten toestand met zekerheid vaststellen. Bij den exvloeibaren toestand is de temperatuurafhankelijkheid veel minder sterk uitgesproken, maar bestaat deze ontwijfelbaar en wel in den zelfden zin als bij exvast. SCHENCK heeft reeds in 1902 desbetreffende metingen verricht met behulp van den spectrophotometer van GLAN, en kwam daarbij tot een negatief resultaat. Maar hij onderzocht de extinctie voor geel licht, terwijl onze methode de extinctie aangeeft voor een stralenmengsel waarin ultrarood overweegt.

Het kwam ons dus gewenscht voor, de temperatuurafhankelijkheid ook in een ander golflengtegebied te onderzoeken. We kozen als zoodanig de photographisch werkzame stralen. Het beeld van de NERNST-stift werd daartoe in plaats van op de verticale spleet van de thermozuil thans op de horizontale spleet van een photographisch registreerapparaat geworpen. De lijn die op deze wijze op het gevoelige papier wordt geregistreerd geeft door haar breedte en de zwarting direct een oordeel over de extinctie van het preparaat.

Zoowel bij exvast als bij exvloeibaar bleek de temperatuur een duidelijk waarneembaren invloed op de extinctie te hebben, doch de richting van het effect is voor de photographisch werkzame stralen juist tegenovergesteld als voor de ultraroode stralen, d.w.z. voor de korte golven neemt bij stijgende temperatuur de extinctie toe. Waar dus blijkbaar het temperatuureffect bij sterk uiteenloopende golflengten een verschillend teeken toekomt is daarmede de schijnbare tegenspraak tusschen het resultaat van SCHENCK en dat hetwelk uit onze extinctiekrommen is af te lezen verklaard. Op de verklaring van het effect als zoodanig hopen wij terug te komen.

§ 2. *De invloed van een magneetveld op de extinctie.*

Het feit dat er twee vloeibaar-kristallijne toestanden bleken te bestaan maakte het gewenscht ons onderzoek naar den invloed van een magneetveld tot den tweeden toestand uit te breiden. Bovendien moest het magneeteffect bij de drie andere stoffen waarover wij beschikten onderzocht worden[1]).

[1]) In onze eerste mededeeling maakten we gewag van den overwegenden invloed dien de aard van het begrenzend oppervlak heeft op het magneeteffect. Om dezen

Bij p-azoxy-benzoëzure-aethylester kon geen invloed geconstateerd worden, ook niet bij de sterkste velden die we konden opwekken (circa 1100 GAUSS). Een onderzoek in nog sterkere magneetvelden is in voorbereiding. Anisaldazine ondervindt een sterken invloed zoowel in exvast als in exvloeibaar. Bij p-azoxy-phenetol is de invloed veel zwakker maar toch in beide toestanden met zekerheid door ons waargenomen. In hoofdzaak is bij deze beide stoffen het effect van hetzelfde karakter als bij p-azoxy-anisol.

Het magneeteffect van p azoxy-anisol in den exvasten toestand wordt door de figuren 3 en 4 voorgesteld. Ter vergelijking drukken we uit onze eerste mededeeling de figuren 5 en 6 nog eens af, die de uitwerking van even sterke velden op den exvloeibaren toestand weergeven [1])

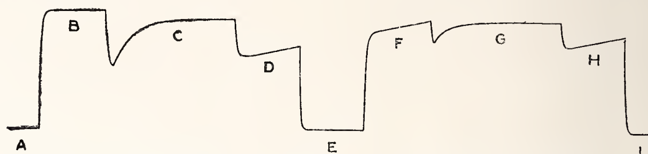


Fig. 3. P-azoxy-anisol exvast verticaal veld (1100 Gauss).

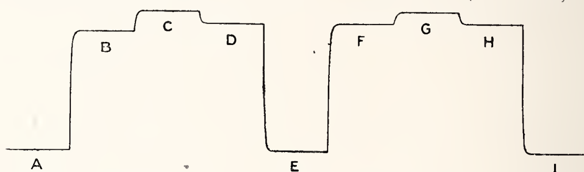


Fig. 4. P-azoxy-anisol exvast horizontaal veld (1100 Gauss).

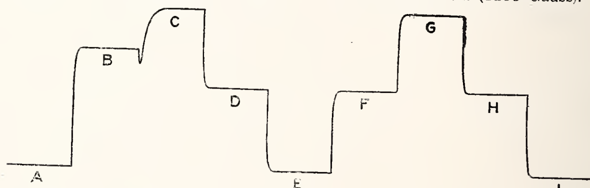


Fig. 5. P-azoxy-anisol exvloeibaar verticaal veld (1100 Gauss).

invloed nader te onderzoeken hebben we het magneeteffect geregistreerd voor preparaten van verschillende dikten, ingesloten tusschen glas dat al en niet chemisch was gereinigd of ingesloten tusschen mica. De daarbij op te merken verschillen zijn echter slechts van quantitatieven aard. (Noot bij de correctie toegevoegd).

[1]) Voor de beteekenis dezer figuren en de wijze van registreeren verwijzen wij naar onze eerste mededeeling.

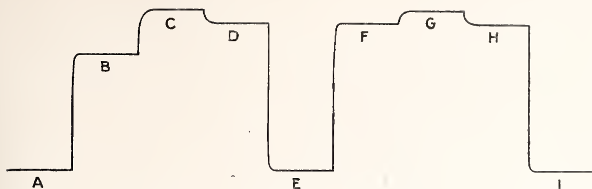


Fig. 6. P-azoxy-anisol exvloeibaar horizontaal veld (1100 Gauss).

Een vergelijking tusschen de figuren 3 en 5 en evenzoo tusschen de figuren 4 en 6 toont aan, dat het magneeteffect voor exvast inderdaad anders is dan voor exvloeibaar. Dat echter het verschil hoofdzakelijk van quantitatieven aard is wordt duidelijk wanneer men figuur 3 vergelijkt met figuur 7. Ook deze figuur is aan onze vorige mededeeling ontleend en geeft de uitwerking van een *zwak* verticaal veld op den exvloeibaren toestand.

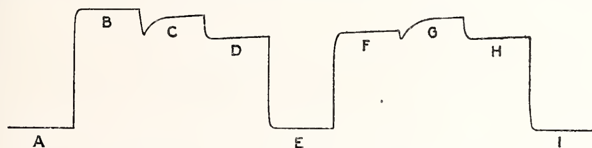


Fig 7. P-azoxy-anisol exvloeibaar verticaal veld (300 Gauss).

Het verschillend magneeteffect in beide toestanden komt dus in hoofdzaak hierop neer, dat een sterk veld op exvast op overeenkomstige wijze werkt als een zwak veld op exvloeibaar.

Ten slotte nog een magneeteffect van bijzonderen aard. Een horizontaal veld roept zoowel in den exvasten als in den exvloeibaren toestand een *blijvende* opheldering te voorschijn. In onze vorige mededeeling hebben wij deze opheldering daaruit verklaard, dat de deeltjes een hooge mate van gerichtheid zouden hebben verkregen. Het scheen ons nu van beteekenis te onderzoeken op welke wijze een verticaal veld deze orde zou *verstoren*. De figuren 8 en 9 vertoonen deze ontrichtende werking van een verticaal veld op exvloeibaar en op exvast nadat het preparaat eerst aan de werking van een horizontaal veld wordt blootgesteld.

De verklaring zooals we die in onze eerste mededeeling van het magneeteffect gegeven hebben, past zonder meer ook voor de hierboven beschreven verschijnselen. De verschillende mate van extinctie in exvloeibaar en exvast en de verschillende invloed daarop

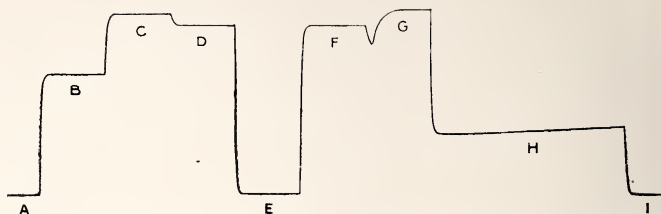


Fig 8. P-azoxy-anisol exvloeibaar horizontaal en daarna verticaal veld.

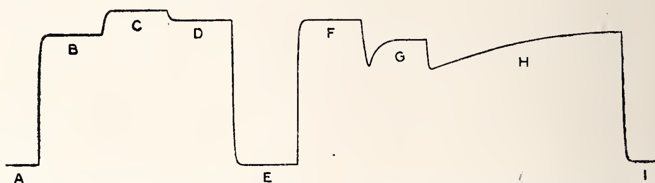


Fig. 7. P-azoxy-anisol exvast horizontaal en daarna verticaal veld.

van een magnetisch veld zouden wij daaraan willen toeschrijven, dat de deeltjes in den exvloeibaren en den exvasten toestand een *verschillende mate van richtbaarheid* bezitten.

SAMENVATTING.

Onderzocht wordt de extinctie van p-azoxy-anisol, p-azoxy-phenetol, anisaldazine en p-azoxy-benzoëzure-aethylester in haar afhankelijkheid van de temperatuur.

Er blijken twee verschillende vloeibaar-kristallijne toestanden te bestaan („exvast" en „exvloeibaar") die verschillende extinctie bezitten en die in verschillende mate invloed ondervinden van een magnetisch veld.

De temperatuurcoëfficient der extinctie blijkt voor ultrarood negatief en voor violet positief te zijn.

Utrecht, Februari 1917. *Natuurkundig Laboratorium, Instituut voor Theoretische Natuurkunde.*

Meteorologie. — De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Heer C. EASTON: *„Afwijkingen en Periodiciteit der Wintertemperatuur in West-Europa sedert het jaar 760."*

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS).

Voor twee vroegere mededeelingen over schommelingen der zonswerkzaamheid en van het klimaat [1]) strekten tot klimatologischen grondslag de historische gegevens, door KÖPPEN bijeengebracht over strenge winters in West- en Westelijk-midden Europa. [2]) Het scheen wenschelijk, voor een nader onderzoek naar mogelijke periodiciteit in het klimaat van West-Europa deze historische gegevens opnieuw en zoo volledig mogelijk te verzamelen, ze kritisch te schiften en ze vervolgens te doen aansluiten bij de latere, wetenschappelijke temperatuurs-waarnemingen, ten einde aldus, over een twaalftal eeuwen, een onafgebroken (zij 't onvolkomen en slechts benaderende) reeks te verkrijgen van een zoo belangrijk klimatologisch element betreffende een zoo belangrijk gebied. Dit materiaal zou dan, ook indien het periodiciteits-onderzoek geen of slechts een gedeeltelijk succes had, zijn eigen waarde behouden.

Alvorens tot publicatie van dit geheele, uiteraard zeer omvangrijke, materiaal en de volledige discussie daarvan, over te gaan, — waarmede in de tegenwoordige ongunstige omstandigheden nog geruime tijd gemoeid kan zijn — acht ik het niet ondienstig, een samenvatting van de verkregen uitkomsten bekend te maken.

Historisch materiaal. De herziening van het historische materiaal betreffende de abnormale winters geschiedde uit drieërlei oogpunt:

1. Beperking van het gebied waarop de aanteekeningen betrekking hebben, tot de West-Europeesche klimaat-provincie. [3])

---

[1]) „Schommelingen der Zonswerkzaamheid en van het Klimaat". (Twee mededeelingen). *Verslagen Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam*, 1904 Nov. 26, 1905 Juni 24, Bd. VII, VIII. Zie ook: „Zur Periodizität der solaren und klimatischen Schwankungen", *Petermanns Mitteilungen*, 51 Bd. VIII.

[2]) W. KÖPPEN, „Ueber mehrjahrige Perioden der Witterung: Die strengen Winter Europas u. s. w. *Zeitschrift d. Oesterr. Ges. f. Met. XVI* (1881).

[3]) De grenzen der eigenlijke klimaat-provincie zijn getrokken ongeveer over Rouaan, Angers, Bordeaux, Toulouse, St. Etienne, Bern, Constanz, Stuttgart, Hannover, Hamburg en Helgoland, zoodat het grootste deel van Frankrijk, N. W. Zwitserland, België, Nederland en westelijk Duitschland wordt omsloten. In Frankrijk volgt de grens dezer klimaat-provincie ongeveer de „ampl. 15° de la variation annuelle", daarna de Cevennes, vervolgens de ampl. 19° tot Genève (Angot, „Climat de la France", T. I. pl. X).

De grens der peripherie gaat van de Shetlands over oostelijk Schotland, langs

2. Verhooging der nauwkeurigheid van het materiaal, door verzameling van alle beschikbare gegevens betreffende de winters in deze klimaatprovincie en hare peripherie, met kritische vergelijking der opgaven.

3. Inachtneming óók van de gegevens over abnormaal w a r m e winters; deze waren in Köppen's materiaal niet opgenomen.

Ik trachtte dus, hoewel mij tot het winterseizoen bepalende, een overzichtelijk beeld te verkrijgen van den geheelen gang der wintertemperatuur, in historische tijden, voor het bedoelde gebied, daarbij natuurlijk rekening houdende met het gebrekkige en zeer onvolledige der gegevens uit de vroegste eeuwen. Een kaartregister en een bibliografie werden aangelegd, deze laatste vooral met het doel om voor elk historisch bericht het gebied waarop het betrekking heeft, zoo goed mogelijk vast te stellen. (De bibliographische index zal ongeveer 300 titels bevatten). Veel moeite is gedaan om van de somtijds bezwaarlijk toegankelijke bronnen er geen van eenig belang ongebruikt te laten: zoo werden niet alleen zeldzame werken als Pilgram's *Untersuchungen über das Wahrscheinliche der Wetterkunde*, Neikter's *Rigidiores hiemes*, of Billing's *Chronique . . . en Alsace* in het oorspronkelijke geraadpleegd, maar ook Engelsche bronnen als Baker en Lowe, die op het vasteland niet beschikbaar bleken te zijn, in de boekerij van het Britsch Museum bestudeerd. Hoewel het aldus bijeengebrachte zeker nog geen aanspraak mag maken op volledigheid, bleek toch bij vergelijking met nieuwere studiën, als die van Speerschneider [1]) alle reden te bestaan om aan te nemen dat het resultaat mijner opsporingen i n g r o o t e t r e k k e n als definitief kan worden beschouwd.

Slechts enkele malen ben ik bij het aanteekenen der opgaven voor de oudere tijden teruggegaan tot de oorspronkelijke kronieken. Controleering van die tallooze getuigenissen met het oorspronkelijke zou, wel is waar, in enkele gevallen tot verbetering van fouten geleid hebben, maar zulke verbeteringen in detail konden in geen verhouding staan tot den ontzaglijken arbeid, die de voltooiing van

---

de grens van Wales over Brighton, O. van de Kanaal eilanden, over St. Nazaire naar St. Sebastiaan, ze omvat het N O. van Spanje en het Z. van Frankrijk behalve de kuststrooken, voorts de Po-vlakte, en loopt over Fiume en Weenen naar Gotland, vervolgens met een bocht zuidwestwaarts, zoodat verder alleen de Z.W. kusten van Zweden en Noorwegen er binnen vallen.

Voor deze peripherie kunnen de resultaten van dit onderzoek slechts ten deele gelden.

[1]) C. J. H. Speerschneider. — „Om Isforholdene i Danske Farvande 690—1860". *Publik. Dansk. Met. Inst.* 1915.

het onderzoek onafzienbaar zou hebben vertraagd: ook scheen zulk een controle niet onvermijdelijk, daar het compilatiewerk van PILGRAM, PFAFF, SCHNURRER, ARAGO-DE BARRAL e. a. over 't geheel den indruk maakt van deugdelijkheid, en de gegevens elkaar controleeren en aanvullen. Wel bleek 't volstrekt noodig, het kritisch bewerkte materiaal zooveel mogelijk te beperken tot een klimaat-provincie, aangezien bijv. bij PILGRAM en SCHNURRER (waarop KÖPPEN's materiaal voor een groot deel berust) gebieden dooreengemengd zijn (Z. Duitschland, Oostenrijk, N. Italië, W. Europa) welke somtijds in meteorologischen zin tegenstrijdige uitkomsten moeten opleveren.

De overblijvende onzekerheid der aldus verkregen gegevens wordt vooral veroorzaakt door de uitteraard zeer vage berichten over w a r m e winters, die niet, gelijk de koude, naar onbetwistbare criteria: ijsvorming en vaartversperring enz., beoordeeld kunnen worden, en voorts door de moeilijkheid om het karakter te bepalen van die winters welke weinig van den norm afwijken of een zeer afwisselend karakter vertoonen. Nadere onderzoekingen zullen deze onzekerheid ten deele, maar waarschijnlijk niet voor het grootste deel, kunnen opheffen. Daarentegen werd uit de vele, vaak elkaar aanvullende bijzonderheden betreffende de winters met een onmiskenbaar koud of warm karakter, in den loop van dit onderzoek zelf duidelijk, dat deze gegevens, zelfs die uit zeer ouden tijd, vollediger en betrouwbaarder zijn dan redelijkerwijze mocht worden ondersteld, zoodat ze, niet enkel omdat ze vóór de thermometrische reeksen het eenige beschikbare materiaal vormen, maar ook wegens hun intrinsieke waarde, een wel voorzichtig te behandelen maar niet te verwaarloozen materie van onderzoek uitmaken.

Nadat dit historische materiaal zoo volledig mogelijk was bijeengebracht en bewerkt, werd aan elken als abnormaal beschouwden winter een positieve of negatieve „kou-factor" toegekend [1]), de overige werden als ongeveer normaal beschouwd en met 0 aangeduid. Als aanvangsjaar werd het jaar 760 genomen, d. i. winter 759—60; vóór het midden der VIIIe eeuw schenen de opgaven weinig bruikbaar. Uit de frequentie der abnormale winters na de XIVe eeuw zou volgen, dat de gegevens van dien tijd af, althans voor de koude winters, een zekere mate van volledigheid bezitten, zoodat ten min-

---

[1]) Zie hiervoor *Peterm. Mitt.* a.a. O. 175. Deze „koufactoren zijn op dergelijke wijze aan de winters toegekend, als KÖPPEN de waarden voor zijn „hervorragende Winter" bezigde. Ik koos echter de schaal —5 tot +5.

De mededeeling der factoren, aan elken winter toegekend, en de classificatie der abnormale winters naar intensiteit, duur en uitgebreidheid, moet voor de uitvoeriger publicatie bewaard blijven.

ste over de laatste vijf eeuwen weinig of geen abnormale winters in onze lijst ontbreken. De geheele reeks 760—1916 omvat 1157 jaren.

Deze nieuwe reeks werd nu op mogelijke periodiciteit onderzocht zonder eenige voor-onderstelling en zonder (gelijk bij het vroegere onderzoek) verband met de wisselende zons-activiteit als uitgangspunt te nemen. Vier methoden werden daarbij beproefd:

1. De integratie-methode, door W. SCHMIDT (Weenen) onlangs aanbevolen [1]), en in hoofdzaak indertijd reeds gevolgd door BUYS BALLOT bij zijn bepaling van de „overwaarde".

Deze methode, toegepast op verschillende groepen uit ons materiaal (koude en warme, enkel koude, enkel strenge winters, enz.) leverde ten slotte niets anders op dan een tamelijk vage aanduiding van zes golvingen tusschen ong. 1340 en 1870, dus een gemiddeld ong. 90 j. periode.

2. Een geometrische methode is door den heer J. W. N. LE HEUX op de gegevens toegepast. Dit interessante onderzoek leverde als waarschijnlijk op: een periodiciteit van omstreeks 85 jaar, wellicht eene van 4 × 85 jaren gevolgd door perioden van 85.

3. Een grafische methode, die als een vereenvoudiging van SCHUSTER's periodogram-methode kan worden beschouwd. Als mogelijk periodiek werden aldus gevonden de intervallen 45, 58, 72, 82, 90, 105, 225, waaronder 90 en 225 de beste schenen.

4. De harmonische analyse. In weerwil der onzuiverheid en onvolledigheid van het materiaal werd een proef genomen met deze aanbevelenswaardige methode. Door de vriendelijke medewerking van Dr. J. P. VAN DER STOK was het mogelijk, in de Bilt een aanvang te doen maken met de uitvoerige becijferingen; deze gaven echter zoo weinig uitzicht op succes, dat besloten werd, den arbeid te staken.

Alles tesaam genomen, hebben deze pogingen niet tot eenig definitief resultaat geleid. Het is opmerkelijk dat ook bij de periodiciteit der zonnevlekken zelfs de methode van FOURIER, door TURNER, KIMOERA e.a. toegepast, onderling afwijkende en grootendeels twijfelachtige resultaten heeft opgeleverd. Bestaat er werkelijk geenerlei periodiciteit in de abnormale winters, of heeft men evenals bij de zonsactiviteit — waarbij niemand het bestaan van periodiciteit en het overwegen eener ongeveer elfjarige periode ontkent — bij het aardsche verschijnsel te doen met een voorshands niet te ontwarren

---

[1]) Dr. W. SCHMIDT, „Nachweis von Perioden langer Dauer". *Meteor. Zeitschr.* 1911, 9 en 1913, 8.

samenstel van perioden? Dat de gang der aardsche temperatuurs-afwijkingen de wisselende zonsactiviteit weerspiegelt, zij 't in geringe mate, staat sedert de onderzoekingen van KÖPPEN, NORDMANN, NEWCOMB e.a. vast [1]), en daar de winters in West-Europa nu eens overwegend onder den invloed van het Noord-Atlantische, dan weer onder dien van het Euro-Aziatische actie-centrum staan, lijkt het a priori niet onwaarschijnlijk, dat deze correlatie zich in een gebied met zoo labiel atmosferisch evenwicht sterker zou afspiegelen. Een ongeveer 89-jarige periode, die bij het vroegere empirisch onderzoek 't sterkst scheen uit te komen, werd ook bij dit latere onderzoek althans aangeduid. Er bleef nu nog een middel over om de realiteit van zulk een periode te toetsen. Bestaat ze werkelijk, dan moet het stuk van de laatste periode, liggende tusschen het midden der XIXe eeuw en onzen tijd — de ongeveer 65 jaren waarin de thermometrische waarnemingen in West-Europa redelijk homogeen en betrouwbaar geacht kunnen worden — passen in de kromme, uit het historische materiaal sedert 760 afgeleid.

Voor deze toetsing moest zoowel het historische als het moderne waarnemingsmateriaal in onderling vergelijkbaren vorm worden gebracht.

Het historische materiaal tusschen 760 en 1916 omvat 13 perioden van 89 jaar. Voor elk periode-jaar zijn nu de kou- en warmtefactoren saamgevat, waarbij aan de zeven eerste perioden (vóór 1383) het halve gewicht werd toegekend. De kou- en warmtefactoren werden echter tegelijkertijd omgezet in temperatuurs-afwijkingen in graden Celsius; een vergelijking met de waarnemingsreeksen Zwanenburg—Utrecht—de Bilt, van 1734 tot op onzen tijd, behoorlijk gereduceerd, verschafte daartoe de mogelijkheid. Hoewel zulk een omzetting natuurlijk slechts een zéér globale aanwijzing der werkelijke temperatuursafwijkingen kan opleveren, scheen deze herleiding mij toch verkieslijk boven een verder gebruik der „kou-factoren" voor de bedoelde toetsing. Wij krijgen aldus, een 89-jarige periode onderstellend, een gemiddelde uit dertien historische temperatuurs-krommen.

Moderne waarnemings-reeksen. Het tijdvak 1852—1916 loopt van het 25^e tot het 89^e jaar der jongste 89-jarige periode, die naar de hier gevolgde nummering met 1828 zou aanvangen. Als goede representanten der West-Europeesche klimaatprovincie werden

[1]) S. NEWCOMB *Astrophys. Journal* 1901, A. WOLFER *Meteor. Zeits.* 1902, *Astron. Mitteilungen* XCIII en volgende jaren, enz. Zie voor een literatuur-opgaaf JUL. v. HANN's *Handbuch der Klimatologie*, Bd. I, 3e Aufl. (1908) 354 sq.

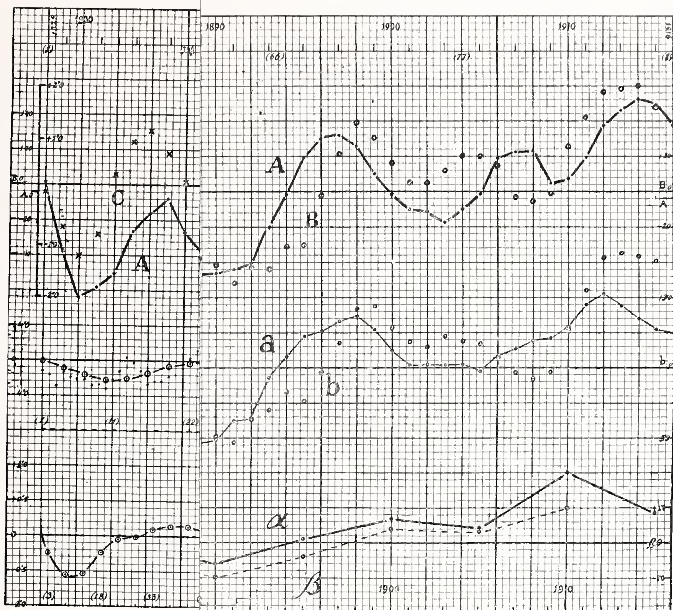
gekozen de stations Parijs (St. Maur) en Utrecht—de Bilt [1]); als meteorologische elementen werden genomen 1°. de maandgemiddelden over den meteorologischen winter, 2°. de drie minimale temperaturen in elken winter maar in verschillende maanden [2]). Om deze gegevens

TABEL I.
Kromme uit 13 perioden van 89 jaar, 760—1916.

Periode jaar	Temp.-afwijking	Per. jaar	Temp.-afwijking	Per. jaar	Temp.-afwijking	Per. jaar	Temp.-afwijking
1	+ 0.2	24	+ 0.9	47	— 0.6	70	+ 1.2
2	— 1.1	25	+ 0.5	48	— 0.6	71	+ 1.0
3	— 2.0	26	— 0.1	49	+ 0.1	72	+ 0.5
4	— 1.8	27	— 0.7	50	0.0	73	+ 0.1
5	— 1.5	28	— 0.9	51	— 0.4	74	— 0.2
6	— 0.7	29	— 0.5	52	— 0.7	75	— 0.3
7	— 0.4	30	— 0.2	53	— 0.8	76	— 0.4
8	— 0.1	31	+ 0.3	54	— 0.4	77	— 0.2
9	— 0.7	32	+ 0.2	55	+ 0.2	78	+ 0.1
10	— 1.1	33	+ 0.1	56	+ 1.1	79	+ 0.8
11	— 1.1	34	— 0.2	57	+ 1.9	80	+ 0.9
12	— 0.7	35	0.0	58	+ 2.0	81	+ 0.9
13	— 0.3	36	+ 0.3	59	+ 1.1	82	+ 0.3
14	— 0.3	37	+ 0.4	60	— 0.2	83	+ 0.4
15	— 0.2	38	+ 0.3	61	— 1.3	84	+ 0.8
16	— 0.4	39	+ 0.3	62	— 1.4	85	+ 1.4
17	— 0.3	40	+ 0.5	63	— 1.4	86	+ 1.7
18	— 0.3	41	+ 0.4	64	— 1.3	87	+ 1.9
19	— 0.2	42	+ 0.5	65	— 1.2	88	+ 1.8
20	— 0.2	43	+ 0.4	66	— 0.5	89	+ 1.4
21	— 0.2	44	+ 0.6	67	+ 0.1		
22	+ 0.2	45	+ 0.3	68	+ 0.8		
23	+ 0.6	46	— 0.5	69	+ 1.1		

[1]) Voor de mededeeling van nog niet gepubliceerde gegevens en voor wenken betreffende de reductie der ZWANENBURG reeks op Utrecht—de Bilt ben ik den heeren ANGOT te Parijs en VAN EVERDINGEN en GALLÉ in de Bilt dank verschuldigd.

[2]) Als „meteorologische winter" worden steeds beschouwd de maanden December, Januari en Februari, de winter wordt aangeduid naar het jaar waarin de twee



ıgen.

gekozen de stations Parijs (St. Maur) en Utrecht—de Bilt [1]); als meteorologische elementen werden genomen 1°. de maandgemiddelden over den meteorologischen winter, 2°. de drie minimale temperaturen in elken winter maar in verschillende maanden [2]). Om deze gegevens

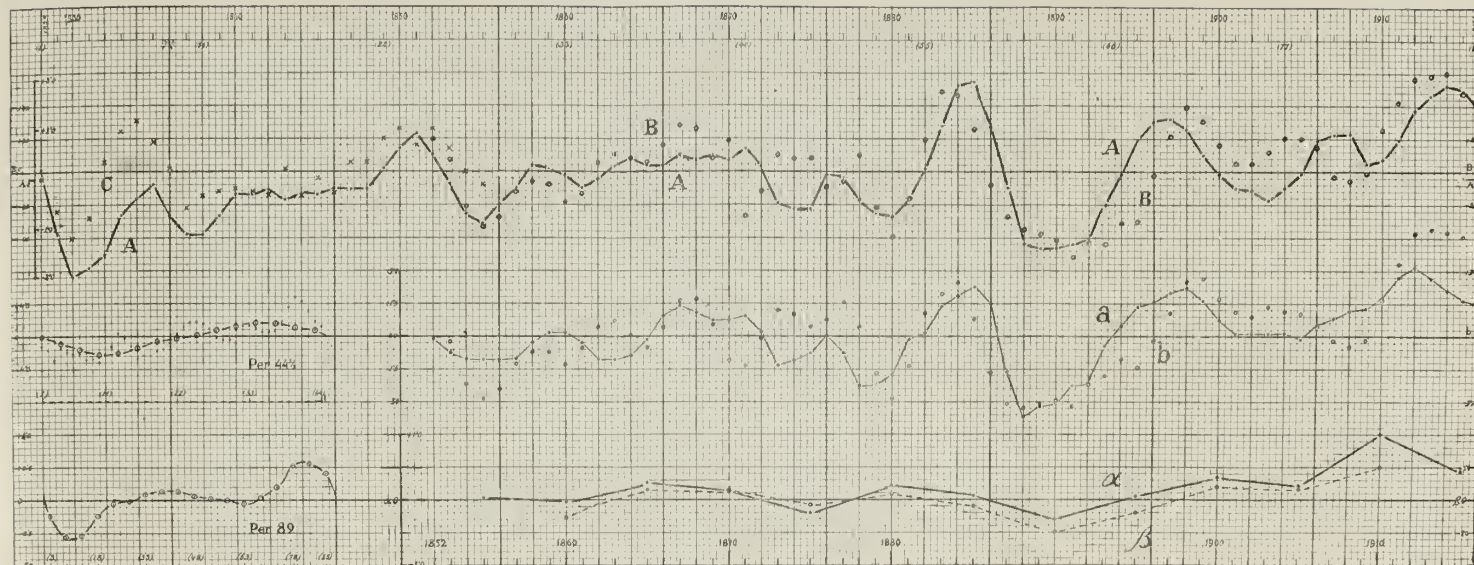
TABEL I.
Kromme uit 13 perioden van 89 jaar, 760—1916.

Periode jaar	Temp.-afwijking	Per. jaar	Temp.-afwijking	Per. jaar	Temp.-afwijking	Per. jaar	Temp.-afwijking
1	+ 0.2	24	+ 0.9	47	— 0.6	70	+ 1.2
2	— 1.1	25	+ 0.5	48	— 0.6	71	+ 1.0
3	— 2.0	26	— 0.1	49	+ 0.1	72	+ 0.5
4	— 1.8	27	— 0.7	50	0.0	73	+ 0.1
5	— 1.5	28	— 0.9	51	— 0.4	74	— 0.2
6	— 0.7	29	— 0.5	52	— 0.7	75	— 0.3
7	— 0.4	30	— 0.2	53	— 0.8	76	— 0.4
8	— 0.1	31	+ 0.3	54	— 0.4	77	— 0.2
9	— 0.7	32	+ 0.2	55	+ 0.2	78	+ 0.1
10	— 1.1	33	+ 0.1	56	+ 1.1	79	+ 0.8
11	— 1.1	34	— 0.2	57	+ 1.9	80	+ 0.9
12	— 0.7	35	0.0	58	+ 2.0	81	+ 0.9
13	— 0.3	36	+ 0.3	59	+ 1.1	82	+ 0.3
14	— 0.3	37	+ 0.4	60	— 0.2	83	+ 0.4
15	— 0.2	38	+ 0.3	61	— 1.3	84	+ 0.8
16	— 0.4	39	+ 0.3	62	— 1.4	85	+ 1.4
17	— 0.3	40	+ 0.5	63	— 1.4	86	+ 1.7
18	— 0.3	41	+ 0.4	64	— 1.3	87	+ 1.9
19	— 0.2	42	+ 0.5	65	— 1.2	88	+ 1.8
20	— 0.2	43	+ 0.4	66	— 0.5	89	+ 1.4
21	— 0.2	44	+ 0.6	67	+ 0.1		
22	+ 0.2	45	+ 0.3	68	+ 0.8		
23	+ 0.6	46	— 0.5	69	+ 1.1		

[1]) Voor de mededeeling van nog niet gepubliceerde gegevens en voor wenken betreffende de reductie der ZWANENBURG reeks op Utrecht—de Bilt ben ik den heeren ANGOT te Parijs en VAN EVERDINGEN en GALLÉ in de Bilt dank verschuldigd.

[2]) Als „meteorologische winter" worden steeds beschouwd de maanden December, Januari en Februari, de winter wordt aangeduid naar het jaar waarin de twee

C. EASTON, „Afwijkingen en Periodiciteit der Wintertemperatuur in West-Europa sedert het jaar 760."



A. Historische kromme dertien 89-j. perioden 760—1916 saamgevat.
B. Thermometr. kromme Parijs (S. Maur) en De Bilt gecombineerd, 1852—1916.
C. Thermometr. kromme: Parijs (Observatoire) 1828—1855.

a. Historische kromme: twaalf 89-j. perioden 760—1827, alleen de sterke afwijkingen.
b. Thermometr. kromme Par. De B. 1852—1916, alleen maandgemiddelden.

α. Historische kromme A, dubbel vereffend.
β. Thermometr. kromme B dubbel vereffend.

Sterk vereffende kromme eener 44½ j. periodiciteit.
Sterk vereffende kromme eener 89 j. periodiciteit.

TABEL II.
Winter-temp. Parijs—de Bilt gecomb., 1852—1916.

Periode jaar	T. afwijking	Per. jaar	T. afwijking	Per. jaar	T. afwijking	Per. jaar	T. afwijking
25	+ 19	42	+ 8	59	— 8	76	+ 12
26	+ 7	43	+ 19	60	— 27	77	+ 20
27	— 21	44	— 27	61	— 35	78	+ 20
28	— 33	45	— 12	62	— 37	79	+ 15
29	— 27	46	+ 10	63	— 41	80	— 3
30	— 12	47	+ 8	64	— 52	81	— 5
31	— 6	48	+ 8	65	— 43	82	— 1
32	— 8	49	— 9	66	— 44	83	+ 26
33	— 19	50	— 6	67	— 31	84	42
34	— 13	51	+ 9	68	— 30	85	57
35	+ 6	52	— 21	69	— 2	86	59
36	+ 11	53	— 39	70	+ 21	87	60
37	+ 8	54	— 18	71	+ 39	88	(56)
38	+ 6	55	+ 19	72	+ 31	89	(81)
39	+ 16	56	+ 48	73	+ 16		
40	+ 28	57	+ 46	74	+ 5		
41	+ 26	58	+ 25	75	+ 5		

te kunnen samensmelten werd, ten einde tegemoet te komen aan het willekeurige in het begrip „abnormaliteit", de waarschijnlijke fout van iedere reeks bepaald en het bedrag der afwijkingen voor elk winterseizoen daarin uitgedrukt. Voor elk station werden de twee aldus verkregen reeksen van de waarden $\frac{d}{e}$ en $\frac{d'}{e'}$ ten slotte gecombineerd, en van deze getallen werd, jaar voor jaar, het gemiddelde genomen. Er is reden om aan te nemen dat de enkele aldus verkregen thermometrische kromme den gang der wintertemperaturen van 1852—1916 in het behandelde gebied, globaal genomen, behoorlijk weergeeft.

De gegevens voor de historische en de thermometrische kromme, beide vereffend volgens $C = \frac{1}{9}(a + 2b + 3c + 2d + e)$, vindt men in de twee voorgaande tabellen.

laatste maanden vallen. Vaak worden Nov. en Maart met het halve gewicht in rekening gebracht, het resultaat is dan echter op 3 maanden gereduceerd.

Ter wille van een beter overzicht heb ik, op het 3^e, 8, 13^e, 18^e... jaar der 89-j. periode, de waarden dezer beide tabellen sterker saamgevat door het gemiddelde te nemen van elf jaren. De uitkomst, voor het 33^e tot het 83^e jaar (1860—1910) volgt in tabel III.

TABEL III.

Vergelijking d. historische gegevens in 89-j. periode met de thermometrische, (sterk saamgevat).

89-j. Periode	Periode-jaar	Parijs—de Bilt
— 0.02	33	— 0.27
+ 0.27	38	+ 0.29
+ 0.15	43	+ 0.27
— 0.20	48	— 0.18
+ 0.22	53	+ 0.19
+ 0.07	58	— 0.20
— 0.30	63	— 0.98
+ 0.04	68	— 0.41
+ 0.34	73	+ 0.41
+ 0.22	78	+ 0.33
+ 1.00	83	+ 1.00

Ik heb nu eerst nog nagegaan of een naburige periodiciteit (bijv. van 88, 90, 88$^1/_2$ jaar) de overeenkomst tusschen de beide krommen kon verbeteren; een eenvoudige grafische methode was daartoe voldoende. Het resultaat was negatief; alleen een periode 88$^1/_2$ gaf *in een deel* der kromme een iets betere uitkomst; er scheen echter alle reden om aan de 89-jarige de voorkeur te geven.

Om de bedenking te weerleggen, als zou de wijze van bewerking der thermometrische gegevens, of de opneming ook der laatstverloopen periode in het historische materiaal, ten gevolge kunnen hebben dat een schijnbare overeenkomst tusschen de krommen werd teweeggebracht, voerde ik nog de volgende bewerking uit. In de plaats van àlle historische winters gebruikte ik voor een nieuwe 89-jarige kromme slechts de extreme waarden (= > 3 of — 3 Kf.), kende aan alle hetzelfde gewicht toe, en liet de jaren na 1827 weg. De hier gebruikte opgaven zijn natuurlijk de beste, maar schaarsch (1 op 8.7 jaar). Ter vergelijking werd weder een Parijs—de Bilt-kromme sedert 1852 uitgezet, maar nu enkel ontleend aan de, gemakkelijk te controleeren, afwijkingen der maandgemiddelden.

Deze laatste krommen staan op het diagram middenin (a en b); de oorspronkelijke krommen zijn met A (Tabel I) en B (Tabel II), de sterker saamgevatte met α en β (Tabel III) aangeduid.

Het leek van belang, den gang der thermometrische kromme ook vóór 1852 bij benadering te kunnen nagaan. Daartoe heb ik de afwijkingen der maandgemiddelden (afw. van het gemiddelde 1816—1860) van Paris-*Observatoire* voor 1828—1855 op het diagram met de kruisjes-lijn C aangeduid; hoewel dit materiaal veel slechter is dan het voor lijn B aangewende (C ligt klaarblijkelijk te hoog), vormt het toch een gewenschte aanvulling.

Kortheidshalve zijn a, b en C alleen op het diagram, niet in tabellen, aangegeven.

De schaal van het diagram (waarop de kleinste verdeeling, bij de reproductie eenigszins gereduceerd, met t w e e millimeter overeenkomt) is:

Kromme A, 89 j. periode (doorgetrokken): 1.5 c.M. voor 1°0 C, gem. afwijking, per meteor. winter, van het gemiddelde —0.68. (Dit gemiddelde is negatief omdat de historische opgaven betreffende koude winters veel talrijker zijn dan die betreffende warme winters). De norm voor de kromme A is echter, ter betere vergelijking, ontleend aan de periode-jaren 1852—1916, deze is —0.56 (aangenomen: —0.6) en ligt dus iets hooger dan de ware norm der 89-j. periode. Daar de som van alle pos. en neg. afwijkingen der B-kromme (Parijs de Bilt) 127, die van de overeenkomstige afwijkingen der A-kromme over deze 62 jaren 49 bedraagt, is de schaal-verhouding 3 : 1 genomen.

Voor de krommen a en b (andere bewerking) is natuurlijk de norm der b-kromme (afwijk. maandgem.) als gemeenschappelijke norm genomen. Schaal 1 c.M. voor 1°5 C. som afw. meteor. winter. Het spreekt van zelf dat de waarden der a kromme de „historische" afwijkingen zeer onvolledig weergeven; ook zijn hier de niet-gereduceerde „kou-factoren" gebruikt: 1 Kf = ong. 0.5 m.m.

Voor de krommen α en β (vereenvoudigde krommen) is de schaal 1 c.M. voor 1°0 C. bij β; 1 c.M. voor 0.5 eenheden bij α. De eerste stip van de β-kromme ligt abusievelijk ongeveer een verdeeling te laag.

De overeenkomst der beide krommen, uit zoo verschillend materiaal opgebouwd, gaat niet tot in bijzonderheden, zooals een vergelijking der afzonderlijke historische perioden reeds bij voorbaat had vastgesteld. Niettemin lijkt die overeenkomst mij verrassend. Men vindt in beide krommen niet alleen de daling tusschen de periode-

jaren 25 en 31, en de verheffing boven de norm in de volgende jaren, maar gedurende de laatste 40 jaren vertoonen de doorgetrokken en de gestipte lijn dezelfde golvingen, eenig phase-verschil in aanmerking genomen. Vooral treft dat, waar de details geëlimineerd zijn, zooals in de historische en thermometrische krommen α en β. Mij dunkt althans het karakter der beide krommen, ook A—B en a—b, voldoende gelijkvormig om een toevallige overeenstemming ten deze volstrekt onaannemelijk te maken, vooral in verband met het feit dat deze overeenkomst reeds verloren gaat zoodra men de 89 j. periode bijv. met een jaar verlengt of verkort.

Het ligt voor de hand, dat de overeenstemming tusschen de krommen a en b minder goed kan zijn dan bij de andere; toch blijft ze m.i. merkwaardig genoeg om de opvatting te bevestigen dat de gevonden overeenkomst niet denkbeeldig, en dus de 89-jarige periodiciteit reëel is.

Over den aard dezer 89-j. periodiciteit wil ik, nu de analyse niets definitiefs heeft opgeleverd, verder niet veel zeggen. Het is duidelijk, dat wij hier niet met een enkelvoudige kromme te doen hebben. Opmerking verdient, dat H. H. TURNER, na zijn uitvoerig onderzoek van de schommelingen der zons-activiteit [1]) als voornaamste periodieke termen verkreeg: (*a*) 8.3, (*b*) 10.2, (*c*) 11.4, en (*d*) 14.7 jaar, en dat $a \times 11 = 91.3$, $b \times 9 = 91.8$, $c \times 8 = 91.2$, $d \times 6 = 88.2$, gemiddeld ongeveer 90 of 91 jaar. De afwijking van onze 89-j. periode (welker gemiddelde lengte niet zeer rekbaar bleek) zou intusschen groot genoeg zijn om op den duur de overeenkomst te verstoren, indien TURNER's onderzoekingen zich niet hadden uitgestrekt over een veel korteren tijd dan onze klimatologische reeksen. Het zonnevlekken-verschijnsel (en alleen dit element der zons-activiteit is sedert geruimen tijd bestudeerd) is slechts gedurende drie eeuwen waargenomen, en vóór 1820 zoo onvolledig, dat WOLFER aan de vroegere waarnemingen tegenover de latere slechts een gemiddeld

---

1) Uit de omvangrijke literatuur over de periodiciteit der zonsactiviteit worde hier enkel vermeld:

R. WOLF en SPÖRER (*Mem. d. Soc. d. spettrosc. ital.*, X), R. WOLF (*Astr. Nachrichten* 2563), NEWCOMB (*Astrophys. Journal* XIII), A. WOLFER (*Astron. Mitteilungen* XCIII e. volg.), KIMOERA (*Monthly Notices R.A.S.* 73), HIRAJAMA (bij KIMOERA), SCHUSTER (*Phil. Trans.* 206, 1906), TURNER (*Monthly Not.* 73 74), MICHELSON (*Aph. J.* XXXVIII), DOUGLASS (*Aph. J.* XLI).

Merkwaardig is de conclusie van MICHELSON's onderzoek met den „harmonic analyzer": „Indeed it would seem that with the exception of the 11 y. period and possibly a very long period of the order of 100 years, the many periods found by previous investigators are illusory."

gewicht van 0.4 toekent. De analyse van een veel langere reeks zonswaarnemingen zou wellicht periodieke termen van iets langeren of korteren duur opgeleverd hebben. Daarbij is ook in aanmerking te nemen dat de ongeveer 11-jarige periodiciteit, met de grootste amplitude, door alle andere onderzoekers korter gevonden is dan door TURNER (NEWCOMB, WOLFER en SCHUSTER $11^1/_8$, R. WOLF en HIRAJAMA $11^1/_3$, KIMOERA $11^1/_9$), terwijl $11^1/_8 \times 8 = 89$.

Bovendien volgde reeds uit mijn vroeger onderzoek — en deze conclusie wordt door het nieuwe materiaal versterkt — dat zeer waarschijnlijk noch lengte noch amplitude der perioden, die wellicht binnen de 89-jarige klimaatperiodiciteit verborgen liggen, constant zijn, en TURNER zegt van de door hem gevonden zonsperiodes: „that their coefficients do not remain constant", only the 11.4 y. period being sensible at the present time.

In verband daarmêe moge verwezen worden naar een conclusie van mijn vorig onderzoek: (Deze Verslagen, Aug. 1905, p. 160 sq.) dat vertraging of versnelling der zonsactiviteit correspondeert met overeenkomstige verschijnselen in de meteorologische kromme.

Ook de diepere oorzaken die aan beide verschijnselen ten grondslag liggen, blijven hier onbesproken.

Opmerking verdient, dat ik noch BRÜCKNER's bekende klimaatperiode van 34.8 jaar, noch die van 12.4 jaar, door KAPTEYN gevonden [1]), in mijn materiaal heb kunnen terugvinden — hetgeen overigens niets bewijst vóór of tegen.

De theorie nu ter zijde latende, kunnen wij nagaan, of een empirisch-statistisch onderzoek van het materiaal iets bruikbaars oplevert.

Het ligt voor de hand, aangezien een 89-jarige periode toch wel verband moet houden met de zons-activiteit, welke zich het duidelijkst in een ongeveer 11-jarige vlekkenperiode manifesteert, onze periode in te deelen in 8 onder-perioden van 11 jaar. Willen wij een gekunstelde indeeling ontgaan, dan mag met de afwisselende lengte der gemiddeld $11^1/_8$-j. zons-periode geen rekening worden gehouden; alle vakken omvatten dus 11 jaar, het 45e periode-jaar is, om geheele getallen te kunnen houden, over de naburige vakken verdeeld. Bijgevolg moet ieder tijdvak eigenlijk $11^1/_8$ jaar lang gerekend worden. (Deze indeeling had dus evenzoo genomen kunnen worden indien geenerlei verband van het aardsche verschijnsel met

[1]) E. BRÜCKNER, „Klimaschwankungen seit 1700", Wien u. Olmütz, E. HÖLTZEL 1890; J. C. KAPTEYN, „Tree-growth and meteorol. factors", Recueil d. travaux botaniques néerlandais, 1914.

eerst is $\omega(x_\mu)$ een punt dat niet buiten de sirkel (γ) ligt. Immers, zoals we al in herinnering brachten, is de maksimummodulus

$$\sigma = |\omega(x_\sigma)|$$

van ω, op de omtrek van (α), hoogstens gelijk aan γ. A fortiori is dus

$$|\omega(x_\mu)| \leq \gamma.$$

en derhalve $\omega(x_\mu)$ een punt dat, hetzij binnen, hetzij hoogstens op de omtrek van (γ) ligt. Hieruit volgt weer, in verband met de betekenis van x_m'

$$|\omega(x'_m) - x'_m| \geq |\omega\{\omega(x_\mu)\} - \omega(x_\mu)| = |\omega_2(x_\mu) - \omega(x_\mu)| \; . \; . \quad (62)$$

Uit de betekenis van x_m volgt verder

$$|\omega(x_m) - x_m| \geq |\omega(x_\mu) - x_\mu| \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (63)$$

De betrekkingen (60), (61), (62) en (63) geven nu aanleiding tot de volgende herleidingen:

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha + |\omega(x_m) - x_m| + |\omega(x'_m) - x'_m| \\ &\geq \alpha + |\omega(x_\mu) - x_\mu| + |\omega_2(x_\mu) - \omega(x_\mu)| \\ &\geq \alpha + |\omega(x_\mu) - x_\mu + \omega_2(x_\mu) - \omega(x_\mu)| \\ &\geq \alpha + |\omega_2(x_\mu) - x_\mu| \\ &\geq \beta_1, \end{aligned}$$

waarmee de gezochte uitkomst verkregen is. Dat niet alleen voor P, maar ook voor $T = S^2$ zelf, (β) als N. V. F. bij (α) als N. V. O. genomen kan worden, volgt hieruit weer, als men bedenkt dat $\beta_1 \geq \sigma_1$ is, waarin σ_1 de grootste modulus van $\omega_2(a)$ in het gebied (α) is, en deze de straal van het kleinste gebied aangeeft dat men als N. V. F. bij (α) als N. V. O. kan aannemen.

Dat hier, behalve het ongelijkteken, ook het gelijkteken kan voorkomen, bewijst het biezondere geval waarin $\omega = c + x$ is, c een konstante zijnde. In dit geval is dus de majorantwaarde, die ons teorema aangeeft voor het getal dat, voor de rezulterende reeks P, met α korrespondeert, tevens de *juiste* waarde, waaruit blijkt dat het teorema die majorantwaarde volstrekt niet altijd te ruim levert.

Volledigheidshalve vermelden we dat men hier voor de beide operatieffunksies $f_1 = f_2 = \varphi$ heeft

$$\varphi = \sum_0^\infty {}_m \frac{(\omega - x)^m z^m}{m!} = e^{z(\omega - x)} .$$

Daar de rezulterende transmutatie eveneens een substitutie is, met de substitutiefunksie $\omega_2(x)$, moet men dus ook hebben

$$f = e^{z(\omega_2 - x)},$$

hetgeen door de formule van BOURLET werkelik wordt opgeleverd.

27. Derde voorbeeld. We nemen $T_1 = S_\omega$, $T_2 = D^{-1}$, dus $T = S_\omega D^{-1}$. Aangezien beide komponenten transmutaties zijn die we reeds in de voorgaande voorbeelden behandeld hebbén, kunnen we volstaan met een enkel punt toe te lichten. Voor het drietal van getallen α, γ, β, kunnen we hier blijkbaar nemen: $\alpha, \gamma, 2\gamma$, als γ weer bepaald wordt door (60). We laten nu de eerste uitspraak van het teorema rusten, omdat de transmutatie SD^{-1} niet zó als *enkelvoudige* transmutatie bekend is dat we, bij onze verifikatie van dat punt, naar bekende dingen kunnen verwijzen: de toetsing zou dientengevolge vrijwel neerkomen op een herhaling van het *algemene* bewijs. Maar punt 2°. kunnen we altijd op de proef stellen. We kunnen n.l., hetzij door de formule van BOURLET, hetzij langs andere weg, de rezulterende reeks P bepalen, en zien of deze aan de uitspraak, in dat punt vervat, voldoet.

We willen dus tonen dat het getal β_1 dat, voor de reeks P, met α korrespondeert, kleiner is dan

$$2\gamma = 2\alpha + 2|\omega(x_m) - x_m| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

De reeks P bepalen we hier het gemakkelikst langs *direkte* weg, d. w. z. door middel van de getransmuteerden ξ_k van de funksies x^k. Blijkbaar is

$$\xi_k = S_\omega D^{-1}(x_k) = \frac{\omega^{k+1}}{k+1}.$$

Past men met behulp hiervan formule (24) toe, dan komt er na enige herleiding

$$a_m = \frac{(\omega - x)^{m+1} - (-x)^{m+1}}{m+1}.$$

De grootheid $a_x = \overline{lim}\, |a_m|^{\frac{1}{m}}$ is dus gelijk aan

$$|\omega - x| \quad \text{of} \quad |x|,$$

al naarmate het eerste of het tweede de grootste waarde heeft. De maksimumwaarde $a(\alpha)$ van a_x in het gebied (α) is dus gelijk aan

$$|\omega(x_m) - x_m| \qquad \text{of} \qquad \alpha,$$

al naarmate de maksimummodulus van $\omega - x$ op de omtrek van (α) groter of kleiner is dan α. Men heeft dus ook in deze beide gevallen resp.

$$\beta_1 = \alpha + |\omega(x_m) - x_m| \qquad \text{of} \qquad \beta_1 = 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Nu is voor de reeks P_2, die bij S_ω behoort, het met α korresponderende getal gelijk aan het eerste bedrag, en voor de reeks P_1, die bij D^{-1} behoort, is het met α korresponderende getal gelijk aan het tweede bedrag. We kunnen dus zeggen dat voor de reeks P, die bij de kombinatie $T = S_\omega D^{-1}$ behoort, het met α korresponderende getal gelijk is aan het *grootste* van de twee getallen die voor de *afzonderlike* reeksen met α korresponderen.

TABEL V.

Frequentie der strenge (zeer strenge) winters
760—1916, in 22-j. tijdvakken.

Periode N°.	P. jaar 1 –22	P. jaar 23–45	P. jaar 45–67	P. jaar 68 - 89
I	1 (1)	0 (0)	1 (1)	0 (0)
II	1 (1)	1 (1)	2 (1)	2 (0)
III	2 (1)	1 (0)	3 (1)	1 (0)
IV	3 (1)	2 (0)	2 (2)	1 (0)
V	3 (1)	2 (1)	2 (1)	0 (0)
VI	5 (2)	1 (1)	3 (1)	1 (0)
VII	2 (1)	3 (1)	2 (0)	1 (1)
VIII	3 (0)	2 (1)	3 (2)	2 (1)
IX	1 (0)	2 (1)	2 (0)	1 (0)
X	2 (1)	2 (0)	2 (2)	0 (0)
XI	4 (1)	1 (1)	3 (1)	0 (0)
XII	1 (1)	3 (0)	4 (3)	1 (0)
XIII	2 (1)	2 (0)	2 (2)	1 (0)
VIII—XIII	2.2 (0.7)	2.0 (0.5)	2.7 (1.7)	0.8 (0.2)
I—XIII	2.3 (0.9)	1.7 (0.5)	2.4 (1.3)	0.8 (0.2)

Geeft zulk een tabel — ook al ligt de ware oorzaak der periodiciteit voorshands nog in het duister — niet eenigen grond voor een, althans beperkte, prognose op langen termijn, eenigermate complementair aan de prognose op korten termijn, door het onlangs in deze Verslagen gepubliceerde onderzoek van den heer P. H. Gallé in uitzicht gesteld? Wellicht mag ik mij ten deze beroepen op Prof. J. C. Kapteyn, die op blz. 7 van zijn „Tree-growth and meteorological factors" schrijft: „What I heard and what I read has long brought me to think, that in the present state of science any investigation on long period regularity in the weather must be a purely empirical one .... Though the empirical finding out of a regularity may hardly be claimed as a scientific achievement, it may nevertheless become in future of the greatest utility in weather forecast a long time in advance". Hierbij zij nog aangeteekend dat, al is de aard van het verband tusschen de klimatologische kromme en die

der zons-activiteit nog niet vast te stellen, zulk een verband ongetwijfeld bestaat, zoodat de grondslag eener prognose in ons geval hechter ligt dan bij enkel empirisch gevondene regelmaat het geval zou zijn.

In het jaar 1905 schreef ik in *Petermanns Mitteilungen* (Bd. 51, Heft VIII, S. 176): „z. B. scheint der Schluss auf einen Teilabschnitt mit aussergewöhnlich wenig kalten Wintern, an deren Beginn wir uns jetzt befänden, gewiss gerechtfertigt". Ook het diagram in het Akademieverslag van dat jaar toont, ongeveer tusschen 1900 en 1918, een te verwachten bijna volkomen afwezigheid van strenge winters (krommen I, C en IIα). Vergelijk daarmede het buitengewone warmtesurplus dat zich in de laatste reeks van winters inderdaad heeft voorgedaan (zie ons Diagram).

Zoo zou de prognose voor het eerstvolgende 22-jarige tijdvak (1917—1938) wijzen op een aanzienlijke daling der wintertemperaturen en op tenminste een tweetal strenge winters waarvan althans één zeer strengen.

In het volgende zijn nu de conclusies van ons onderzoek saamgevat, in hoofdzaak op grond van Tabel IV, ten deele volgens Tabel V, en wat Concl. VII betreft in verband met mijn vroeger in deze Verslagen gepubliceerd onderzoek. In herinnering moge gebracht worden dat dit alles slechts geldt voor de West-Europeesche klimaat-provincie, ten deele nog voor hare peripherie.

CONCLUSIËN

I. — Binnen elk tijdvak van $44^1/_2$ jaar, te beginnen met het jaar 759.5 (1872.0) is de eerste helft kouder dan de tweede.

[Het verschil in temp.-afwijkingen is per 44 winters gemiddeld 20° gevonden; na het jaar 1383: gem. 26°.

Afwijkingen, of schijnbare afwijkingen, van den regel: 2 op 26 gevallen sedert 760; na het jaar 1200 geen afwijkingen.]

II. —. Het verschil tusschen de temperatuurs-afwijkingen van achtereenvolgende tijdvakken van $22^1/_4$ jaar, te beginnen met 759.5 (1894.25) is afwisselend negatief en positief.

[Op 51 gevallen 6 afwijkingen of schijnbare afwijkingen van dezen regel; geen afwijkingen na het jaar 1450.]

III. — Binnen elk tijdvak van 89 jaar, te beginnen met het jaar 759.5 (1827.5) is de eerste helft kouder dan de tweede.

[Het verschil in temp.afwijkingen is per 89 winters gemiddeld 22° gevonden.

74

Afwijkingen van den regel: op 13 gevallen sedert 760 twee, benevens twee twijfelachtige; sedert 1116 één].

IV. — Het verschil tusschen de temperatuursafwijkingen van achtereenvolgende tijdvakken van $44^1/_2$ jaar, te beginnen met 759.5 [1872.0) is afwisselend negatief en positief.

[Op 25 gevallen 6 (7?) afwijkingen van dezen regel; na 1383 twee afwijkingen].

V. — Binnen elk tijdvak van 89 jaar, te beginnen met 759.5 (1827.5) overwegen in het eerste vierdedeel de koude, in het laatste vierdedeel de warme winters, relatief tot de verhouding in het geheele tijdvak.

[Op 26 gevallen 4 afwijkingen van dezen regel; na het jaar 1000 twee (onbelangrijke), na de XVe eeuw geen afwijkingen.

Sterkere anomalie in het midden van het tijdvak is aangeduid, maar niet nader vast te stellen].

VI. — De kans, dat het laatste vierdedeel eener 89-jarige periode (826.25—848.5 . . . 1894 25—1916.5) een geringer aantal strenge winters telt dan de voorafgaande en volgende 22 j. tijdvakken is 0.88. Binnen het laatste vierdedeel eener 89-j. periode is de kans dat een willekeurige winter streng (resp. zeer streng) zijn zal, geringer dan 0.04 (resp. 0.007), d. i. nog niet $^1/_2$ ($^1/_5$) van de algemeene kans. In de naburige 22-j. tijdvakken is die kans ong. 3 (5) maal grooter.

VII. — Versterkte en versnelde activiteit van het zons-oppervlak correspondeert in 't algemeen met een heviger en sneller dan normaliter intredende periode van winterkoude in West-Europa; omgekeerd correspondeert een verslapte en vertraagde zonsactiviteit met slapper en later intredende koude winters.

VIII. — Uit ons materiaal volgt, dat alle tot dusver gebruikte temp. gemiddelden sedert 1852, (bijv. 1852—1916) te hoog zijn ten opzichte van de ware norm. Alleen een 89-jarige reeks, kan, voor zooveel thans na te gaan, een waar gemiddelde geven, dit zal per meteorologische winter ong. 0°18 lager liggen dan het nu uit ongeveer 65-jarige waarnemingen beschikbare gemiddelde.

Plantkunde. — De Heer WENT biedt een mededeeling aan van den Heer U. P. v. AMEIJDEN over: *„De invloed van licht- en zwaartekracht-prikkels op de kiemplantjes van Avena sativa bij totale en gedeeltelijke onttrekking van vrije zuurstof".*

(Mede aangeboden door den Heer MOLL).

§ 1. *Inleiding.*

De voorstelling, die men over den invloed van de zuurstofonttrekking op de geotropie en phototropie koestert, dankt men hoofdzakelijk aan CORRENS[1]). Zijn methode van werken bestond hierin, de plantjes, waarmede hij experimenteerde, in vacuum of althans onder sterk verminderden druk te brengen. Dit was trouwens de methode, die ook door de meeste onderzoekers vóór hem gevolgd was. Hij onderzocht de afhankelijkheid van het geotropisch prikkel-proces van de zuurstof, door de lucht in den recipient, waarin zich verschillende kiemplantjes bevonden, tot op verschillenden graad te verdunnen, en daarna horizontaal te plaatsen. De kiemplantjes werden dan na 6—12 uur op een mogelijk opgetreden kromming onderzocht. Zoo vond hij b.v. dat kiemplantjes van Helianthus met een spoor zuurstof nog in staat waren een reactie te geven; voor Sinapiskiemplantjes daarentegen, was er minstens 4 tot 5 % zuurstof noodig voor het optreden van een kromming. Ontstond er geen kromming, zoo bleef ook later in gewone lucht een nawerking achterwege.

Uit deze proeven concludeert CORRENS dat de zuurstof tot uitvoering van een geotropisch proces noodzakelijk is. Zijn heliotropische proeven richtte hij zóó in, dat de kiemplantjes in den recipiënt voortdurend aan het eenzijdig invallende daglicht waren blootgesteld. Ook voor het heliotropische prikkelproces besluit hij tot de noodzakelijkheid van de aanwezigheid van zuurstof. Echter wijken de minimum hoeveelheden zuurstof, waarbij nog heliotropische krommingen kunnen optreden af van de, hoeveelheden, waarbij nog juist een geotropische reactie mogelijk is. Zoo mocht voor kiemplantjes van Sinapis voor het uitvoeren van een phototropische reactie de zuurstof hoogstens tot 6 % verdund worden.

De geotropische krommingen worden dus, volgens CORRENS, door dezelfde objecten bij geringere hoeveelheden zuurstof uitgevoerd, als de phototropische. Naar mijn meening heeft CORRENS geen recht deze conclusie uit zijn proeven te trekken, daar hij prikkelintensiteiten

---

[1]) C. CORRENS. Ueber die Abhängigkeit der Reizerscheinungen höherer Pflanzen von der Gegenwart freien Sauerstoffes. Flora 75. 1892.

met elkaar vergelijkt, die zich misschien in krommingen van zeer verschillenden graad van sterkte uiten. Alleen dan eerst bestaat er reden geotropische en phototropische prikkels te vergelijken, indien gewerkt wordt met zoodanige prikkels, dat deze maximale krommingen van dezelfde sterkte teweeg brengen.

Árpád Paál[1]) heeft een onderzoek gepubliceerd alleen over den invloed van de luchtverdunning op het geotropische prikkelproces en behandelt daarin de perceptie en reactie gescheiden, de eerste door het bepalen van praesentatietijden onder normalen druk en na tot op verschillenden graad geëvacueerd te hebben, de laatste door onder normalen druk te percipieeren en de reactie bij luchtverdunning te laten tot stand komen. Zijn proeven doen hem aannemen, dat bij toenemende luchtverdunning de praesentatietijden en de reactietijden verlengd worden. Hier dient bij vermeld te worden dat hij omtrent praesentatie- en reactietijd natuurlijk nog de oude opvatting koestert en er dus nog niet de beteekenis aan hecht, die er later door Arisz[2]) aan gegeven is. Door mij zijn beide woorden steeds gebruikt in den zin als Arisz ze bezigt, vandaar de schijnbare tegenstrijdigheid tusschen mijn resultaten en die van Árpád Paál.

§ 2. *Methode.*

De proeven werden alle bij éénzelfde temperatuur gedaan, doordat de bakjes met de kiemplantjes in een electrisch verwarmden thermostaat geplaatst werden, waarin de temperatuur door middel van een thermoregulator constant gehouden werd. In het midden van den achterwand van den thermostaat bevond zich een opening, waardoorheen de as van den klinostaat reikte, bevat in een oliepakking, zoodat hierlangs geen lucht van buiten kon binnenkomen; tevens ondervond de as bij het draaien hierdoor geen noemenswaardigen weerstand. Het einde der as in den thermostaat kon geschroefd worden in de klem, bestemd om de bakjes met de kiemplantjes vast te klemmen. Deze bleven gedurende den geheelen duur van de proef in den thermostaat, konden op deze wijze zoowel geotropisch, als phototropisch geprikkeld worden, daar de voor- en zijwanden uit glas bestonden, en onmiddellijk na het toedienen van den prikkel konden ze dus om de horizontale klinostaatas gedraaid worden. Steeds werd met één bakje tegelijk gewerkt. Wel bevatte

---

[1]) Árpád Paál. Analyse des geotropischen Reizvorgangs mittels Luftverdünnung Jahrb. f. wiss. Bot. L. pag. 1. 1912.

[2]) W. H. Arisz. Untersuchungen über den Phototropismus. Recueil des Travaux Botaniques Néerlandais. Vol. XII. 1915.

de klem twee bakjes, daar deze hierop ingericht was, maar het tweede diende alleen als tegengewicht, om zooveel mogelijk een gelijkmatige draaiing van de klinostaatas te verkrijgen.

Alle proeven heb ik gedaan onder druk van één atmosfeer. Daarom werd door geleidelijke diffusie de lucht in den thermostaat door stikstof vervangen. Deze laatste betrok ik uit in den handel verkrijgbare metalen stikstofcilinders. Daar in deze ongeveer 4 à 5 procent zuurstof zit, werd het gas eerst geleid door een paar waschfleschjes met een alkalische pyrogalloloplossing, om de zuurstof op te nemen. Daar echter niet alle zuurstof geabsorbeerd werd, en er bovendien CO ontstond, werd het gas verder geleid door een buis met gloeiend koper, om de overgebleven zuurstof te absorbeeren en met een weinig CuO om de ontstane CO tot CO_2 te oxydeeren. Het op deze wijze behandelde gas liet ik den thermostaat binnenstroomen, ten gevolge waarvan de daarin aanwezige lucht langzaam door een uitstroomingsopening verdreven werd. Het duurde $1\frac{1}{2}$ à 2 uur vóór alle sporen zuurstof verdreven waren, zooals uit bepalingen met de phosphorpipet bleek.

Om den invloed van zuurstofonttrekking op het geotropische of phototropische prikkelproces na te gaan, heb ik eerst een groot aantal proeven in lucht gedaan om een maatstaf te hebben, waarnaar eventueele afwijkingen konden worden afgemeten. Bij deze proeven ging ik uit van een prikkel van willekeurig aangenomen sterkte. Zoo prikkelde ik geotropisch door de kiemplantjes een kwartier in den horizontalen stand te brengen, wat dus beteekent een prikkelsterkte van 900 mgs. Phototropisch werd geprikkeld door acht seconden lang te belichten met een lamp, opgesteld op een meter afstand van 't midden van het bakje met de plantjes zóódanig dat de lichtsterkte op deze plaats 5 M.K. bedroeg. Dit komt dus overeen met een prikkelsterkte van 40 M.K.S. Ik bepaalde nu de maximale krommingen, die bij beide prikkels behooren en de tijden, die verloopen tusschen het begin der prikkeling en het bereiken van de maximale kromming, m.a.w. de reactietijden. Het resultaat is dat de maximale kromming voor beide prikkels bedraagt 2 mM. en voorts, dat de geotropische reactietijd 65 minuten en de phototropische 75 minuten beloopt.

§ 3. *De invloed van zuurstofonttrekking op de perceptie.*

Om na te gaan of kiemplantjes van Avena in een zuurstofvrije atmosfeer in staat zijn een prikkel te percipieeren, liet ik ze eerst eenigen tijd in den thermostaat, waar steeds een stroom stikstof doorheen ging,

Waren de objecten op deze wijze enkele uren van zuurstof verstoken geweest, dan werd, eveneens nog in stikstof, de prikkel toegediend, terwijl onmiddellijk hierop de stikstofstroom afgebroken werd, en gewone lucht door middel van een aspirator door een thermostaat gezogen werd. Bij het opgegeven aantal uren voorverblijf in stikstof, moet in het oog gehouden worden, dat hieronder begrepen zijn de 1½ à 2 uur, noodig om den thermostaat volkomen zuurstofvrij te maken. De kiemplantjes bevonden zich dus gedurende den reactietijd in lucht. Was deze verstreken, dan werd de thermostaat geopend, de objecten eruit gehaald en de krommingen gemeten.

1. Geotropische proeven.

Twee en drie uren voorverblijf hadden niet den minsten invloed. Een daarna toegediende prikkel van 900 mgs uitte zich in lucht in een maximale reactie van 2 mM. Een voorverblijf van vijf uur was duidelijk merkbaar in een verzwakte reactie, terwijl na zes uur geen reactie meer optrad.

TABEL 1.

Prikkelsterkte 900 mgs. Temperatuur 20° C. Reactietijd 65 minuten.

Voorverblijf in stikstof	Aantal kiemplantjes	Sterkte van de krommingen in mM.
5 uur	5	1 1 ½ 0 0
	7	1 1 1 ½ 0 0 0
	5	1 ½ ½ ½ 0
	4	½ ½ 0 0
6 uur	8	alle ongekromd
	5	id.
	5	id.

2. Phototropische proeven.

Ook bij deze proeven had een voorverblijf van drie uur nog niet den minsten invloed op het verloop van de krommingen, zelfs zes uur voorverblijven in stikstof was niet geheel voldoende om geen reactie meer te doen plaats vinden, wat wel het geval was, als de kiemplantjes vóór de prikkeling acht uur in stikstof hadden doorgebracht.

Het blijkt dus, dat de kiemplantjes langen tijd van zuurstof ver-

TABEL 2.

Prikkelsterkte 40 M. K. S. Temperatuur 20° C. Reactietijd 75 minuten.

Voorverblijf in stikstof	Aantal kiemplantjes	Sterkte van de krommingen in mM.
6 uur	5	1½ 1 ½ ½ ½
	8	1½ ½ ½ ½ 0 0 0 0
	7	1 1 ½ ½ 0 0 0
	4	½ ½ ½ ½
	6	1 ½ ½ ½ 0 0
8 uur	6	alle ongekromd
	6	id.
	8	id.

stoken moeten zijn geweest om het vermogen op prikkels te reageeren geheel te verliezen. Daar de mogelijkheid bestond, dat voornamelijk in de ruimte tusschen het cotyl en het eerste blad nog geruimen tijd voldoende zuurstof voor de plantjes was overgebleven, om daardoor hun langdurige gevoeligheid te verklaren, heb ik dezelfde proeven herhaald met kiemplantjes van Sinapis alba en verkreeg daar mutatis mutandis dezelfde resultaten; zoodat aangenomen dient te worden, dat de objecten, ten gevolge van intramoleculaire ademhaling, voldoende energie ter beschikking hebben om nog langen tijd, zij het dan ook in steeds minder wordende mate, een prikkel te percipieeren. Echter mag uit deze proeven niet zonder meer geconcludeerd worden, dat er zonder zuurstof geen prikkelperceptie kan plaats vinden; het is immers zeer wel mogelijk, dat in bovengenoemde gevallen de prikkel wel degelijk gepercipieerd werd, doch dat de processen in de plant, die de reactie veroorzaken, reeds van te voren door het langdurig gemis aan zuurstof in die mate beïnvloed waren, dat elke kromming achterwege bleef. Om deze redenen heb ik geotropische proeven gedaan, waarbij ik de objecten een voorverblijf van zes uur gaf in stikstof en phototropische, waarbij dit voorverblijf acht uur bedroeg; de perceptie echter geschiedde in beide gevallen in lucht, waarin dus het eenige verschil met de vorige proeven gelegen is.

1. Geotropische proeven.

TABEL 3.

Prikkelsterkte 900 mgs. Temperatuur 20° C. Reactietijd 65 minuten.

Voorverblijf in stikstof	Aantal kiemplantjes	Sterkte van de krommingen in Mm.
6 uur	8	2 1½ 1 1 1 1 1 ½ ½
	7	1½ 1½ 1 1 1 1 ½
	7	2 1 1 1 1 1 ½
	8	1½ 1½ 1½ 1 1 1 ½ ½

2. Phototropische proeven.

TABEL 4.

Prikkelsterkte 40 M. K. S. Temperatuur 20° C. Reactietijd 75 minuten.

Voorverblijf in stikstof	Aantal kiemplantjes	Sterkte van de krommingen in mM.
8 uur	9	1½ 1½ 1 1 ½ ½ ½ ½ 0
	8	1½ 1½ 1 1 ½ ½ ½ 0
	6	1 1 ½ ½ ½ ½
	8	1½ 1½ 1 1 1 ½ ½ 0

Vergelijkt men deze proeven met degene vermeld in tabel 1 en 2, dan volgt uit het feit, dat hier wel en daar geen krommingen optraden, terstond, dat de kiemplantjes niet in staat zijn zonder aanwezigheid van zuurstof een geotropischen of phototropischen prikkel te percipieeren.

Dat de krommingen, verkregen bij de laatste proeven, geringer zijn dan degene, die onder normale omstandigheden tot stand komen, bewijst, dat de plantjes een schadelijken invloed van langdurig zuurstofgemis ondervonden hebben, die zich nog doet gevoelen, nadat de normale omstandigheden weer in 't leven geroepen zijn.

§ 4. *De invloed van zuurstofonttrekking op de reactie.*

Ter bestudeering van de wijze waarop de reactie beïnvloed wordt door een atmosfeer zonder zuurstof, gaf ik de kiemplantjes een voorverblijf van drie uren in stikstof, diende hierin den prikkel toe en liet ze vervolgens ook gedurende den reactietijd zonder zuurstof. Uit de voorgaande proeven is gebleken, dat, na een drie-urig voorverblijf in stikstof, de prikkel hierin normaal gepercipieerd wordt.

Bij enkele proeven observeerde ik de plantjes nog geruimen tijd langer in stikstof, om te zien of er later nog een kromming optrad. In dat geval zou er ten gevolge van de afwezigheid van zuurstof besloten moeten worden tot een verlenging van den reactietijd. Bij de overige proeven liet ik, na het verstrijken van den gewonen reactietijd onmiddellijk lucht toetreden, om te zien of hierin nog een nawerking plaats had.

1. Geotropische proeven.

De objecten blijven voortdurend in stikstof.

TABEL 5.

Prikkelsterkte 900 mgs. Temperatuur 20° C.

Voorverblijf in stikstof	Verstreken tijd sinds begin van de prikkeling in minuten	Aantal kiem-plantjes	Sterkte van de krommingen in mM.
3 uur	65	7	alle ongekromd
	100		id.
	125		id.
	150		id.
	65	8	id.
	100		id.
	130		id.
	65	8	7 ongekromd, 1 een asymmetrische top
	100		id.
	130		id.
	65	7	alle ongekromd

2. Phototropische proeven.

De objecten blijven voortdurend in stikstof. (Zie tabel 6, p. 1142).

Verving ik na 65, resp. 75 minuten de stikstof door lucht, dan had er steeds een zwakke nawerking plaats, die ongeveer een uur na het begin van de luchtdoorzuiging duidelijk zichtbaar was. Wederom een bewijs, dat de prikkel wel gepercipieerd was, maar zich zonder zuurstof niet in een reactie kon uiten. Dat deze krommingen zoo gering bleven, is een bewijs, dat de prikkel reeds bezig was uit te klinken en dus mag men niet spreken van een verlenging van den reactietijd, ten gevolge van de afwezigheid van zuurstof.

Deze proeven doen zien, dat een gepercipieerde geotropische of phototropische prikkel niet in staat is, bij afwezigheid van zuurstof,

TABEL 6.
Prikkelsterkte 40 M. K. S. Temperatuur 20° C.

Voorverblijf in stikstof	Verstreken tijd sinds begin van de prikkeling in minuten	Aantal kiem-plantjes	Sterkte van de krommingen in mM.
3 uur	75	7	alle ongekromd
	100		id.
	140		id.
	170		id.
	75	8	id.
	105		id.
	130		id.
	75	8	id.
	100		id.
	135		id.
	75	9	id.

een reactie te geven; voorts dat er geen aanduidingen bestaan, die pleiten voor een verlenging van den reactietijd.

§ 5. *Invloed van een gasmengsel met laag zuurstofgehalte.*

Door het gas uit den stikstofcilinder onmiddellijk in den thermostaat te leiden, zonder het eerst de waschfleschjes met pyrogallol en de buis met gloeiend koper te laten passeeren, bevonden de plantjes zich in een atmosfeer, die 4 à 5 % zuurstof bevatte. Ik heb alleen nagegaan den invloed op de perceptie, door de kiemplantjes een voorverblijf te geven in dit gasmengsel, hierin tevens de perceptie te doen plaats vinden, om daarna de mogelijke reactie in gewone lucht tot stand te doen komen.

1. Geotropische proeven.

TABEL 7.
Prikkelsterkts 900 mgs. Temperatuur 20° C. Reactietijd 65 minuten.

Voorverblijf in 4.3 % stikstof	Aantal kiemplantjes	Sterkte van de krommingen in mM.								
6 uur	9	2½	2	2	2	2	1½	1½	1½	1
8 „	9	3	2½	2	2	2	2	1½	1½	1½
24 „	8	2	1½	1	1	1	1	½	½	

2. Phototropische proeven.

TABEL 8.
Prikkelsterkte 40 M. K. S. Temperatuur 20° C. Reactietijd 75 minuten.

Voorverblijf in 4.7% stikstof	Aantal kiemplantjes	Sterkte van de krommingen in mM.								
10 uur	9	2½	2	2	2	2	1½	1½	1½	0
24 »	9	2	1½	1½	1½	1	1	1	0	0

Na 24 uur voorverblijf in het mengsel stikstof en zuurstof, is in beide gevallen een invloed op de perceptie merkbaar. De kiemplantjes blijven dus langen tijd in staat, bij een betrekkelijk laag zuurstofgehalte van de hen omringende atmosfeer, een geotropischen en phototropischen prikkel te percipieeren, terwijl ook hier geen aanduidingen bestaan, die wijzen op een verschillend gedrag van beide soorten van prikkels, in tegenstelling derhalve met de meening van CORRENS, volgens welke een geotropische kromming bij een geringer percentage zuurstof uitgevoerd kon worden dan een phototropische.

Utrecht, Februari 1917.

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt een mededeeling aan van den Heer H. J. WATERMAN, over: *„Amygdaline als voedsel voor Aspergillus niger.”* II.

(Mede aangeboden door den Heer HOLLEMAN).

In eene vorige mededeeling [1]) is aangetoond, dat amygdaline voor *Aspergillus niger* een beter voedsel is dan glukose, indien men tenminste het verkregen mycelium-gewicht als maatstaf neemt.

Rekening werd gehouden met de mogelijkheid, dat *in* de cel wèl benzaldehyd zou kunnen gevormd worden, terwijl tevens werd bewezen, dat *buiten* de cel amygdaline niet of in ieder geval niet in belangrijke hoeveelheden, in glukose, benzaldehyde en HCN wordt gesplitst.

Dit laatste resultaat hebben wij nu langs anderen weg door eene nieuwe reeks proeven bevestigd, uit welke proeven men met zekerheid af kan leiden, dat *amygdaline, zonder* dat hieraan *eenige split-*

[1]) Deze Verslagen, 27 Januari 1917, pg. 1035.

TABEL. Invloed van amygdaline op de ontwikkeling van Aspergillus niger ten koste van benzaldehyde als organisch voedsel. Temperatuur: 33°.

	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	H_1
Samenstelling voedingsvloeistof	45 cM.^{3} P 5 cM.^{3} H_2O	25 cM.^{3} P 25 cM.^{3} H_2O	20 cM.^{3} P 30 cM.^{3} H_2O	10 cM.^{3} P 40 cM.^{3} H_2O	5 cM.^{3} P 45 cM.^{3} H_2O	2 cM.^{3} P 48 cM.^{3} H_2O	1 cM.^{3} P 49 cM.^{3} H_2O	50 cM.^{3} H_2O
Ontwikkeling na 1 dag	—	—	?	?	?	?	—	—
Ontwikkeling na 2 dagen	—	—	—	—	?	+ (gering)	+ (gering)	—
	A_2	B_2	C_2	D_2	E_2	F_2	G_2	H_2
Samenstelling voedingsvloeistof	45 cM.^{3} P 5 cM.^{3} Q	25 cM.^{3} P 5 cM.^{3} Q 20 cM.^{3} H_2O	20 cM.^{3} P 5 cM.^{3} Q 25 cM.^{3} H_2O	10 cM.^{3} P 5 cM.^{3} Q 35 cM.^{3} H_2O	5 cM.^{3} P 5 cM.^{3} Q 40 cM.^{3} H_2O	2 cM.^{3} P 5 cM.^{3} Q 43 cM.^{3} H_2O	1 cM.^{3} P 5 cM.^{3} Q 44 cM.^{3} H_2O	5 cM.^{3} Q 45 cM.^{3} H_2O
Ontwikkeling na 1 dag	—	—	—	?	—	+ (zeer gering)	+ (gering)	?
Ontwikkeling na 2 dagen	—	—	—	?	?	++	++	—
	A_3	B_3	C_2	D_3	E_3	F_3	G_3	H_3
Samenstelling voedingsvloeistof	50 cM.^{3} H_2O	25 cM.^{3} P 25 cM.^{3} Q	20 cM.^{3} P 25 cM.^{3} Q 5 cM.^{3} H_2O	10 cM.^{3} P 25 cM.^{3} Q 15 cM.^{3} H_2O	5 cM.^{3} P 25 cM.^{3} Q 20 cM.^{3} H_2O	2 cM.^{3} P 25 cM.^{3} Q 23 cM.^{3} H_2O	1 cM.^{3} P 25 cM.^{3} Q 24 cM.^{3} H_2O	25 cM.^{3} Q 25 cM.^{3} H_2O
Ontwikkeling na 1 dag	—	?	—	?	—	?	+ (gering)	?
Ontwikkeling na 2 dagen	—	—	—	—	+	++	++	—

Vloeistof *P* werd als volgt bereid: 1,5 gr. NH_4NO_3, 1,5 gr. KH_2PO_4, 1,5 gr. $MgSO_4 . 7 H_2O$ en $\pm$ 0,3 gr. $CaCl_2$ werd, onder opkoken, opgelost in gedistilleerd water; na afkoeling werd $\pm$ 1,85 gr. benzaldehyde toegevoegd, goed geschud en de heldere oplossing aangevuld met H_2O tot 1 Liter.

Vloeistof *Q* werd verkregen door 2,5 gr. amygdaline op te lossen in gedistilleerd water, even op te koken en na afkoeling, met H_2O aan te vullen tot 250 cM^3.

sing in glukose, benzaldehyde en HCN voorafgaat, door de cellen wordt *opgenomen*.

Het overzicht dezer proeven vindt men in de tabel.

Uit deze proeven volgt, dat door de toevoeging van amygdaline de schadelijke werking van benzaldehyde wordt verminderd. Men vergelijke E_1, F_1 en G_1 eenerzijds met E_2, F_2, G_2 en E_3, F_3, G_3 anderzijds.

Indien bij de amygdaline-opname hieraan eene splitsing in glukose, benzaldehyde en HCN zou voorafgaan, dan had men juist het omgekeerde moeten waarnemen.

Hiermee is dus bewezen, dat eene, aan de opname door de cel voorafgaande, splitsing van amygdaline in de genoemde enkelvoudige stoffen buitengesloten is.

Crystallographie. — De Heer Böeseken biedt, namens den Heer A. L. W. E. van der Veen, een mededeeling aan over: „*Diphenyl-jodonium-chloride*: $C_{12}H_{10}I—Cl$."

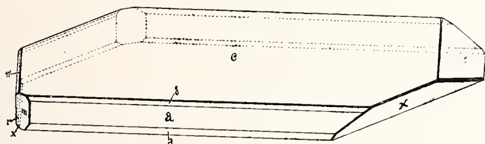
(Mede aangeboden door den Heer Molengraaff).

Monoklien sphenoïdisch.

a : b : c = 1,2195 : 1 : 1,1871 [1] $\beta = 102°15'$

Soortelijk gewicht: 1,67 (nauwkeurig totop 0,005).

Kristalliseert uit water in pinacoïdale individuën, die gestrekt zijn volgens de b-as (zie figuur). De habitus wordt bepaald door de pina-



coïden c en a, terwijl het polair karakter is uitgedrukt door een prisma aan het stompe (vermoedelijk analoge) einde en een sphenoïde aan het scherpe einde. De gemiddelde lengte van de gemeten kristallen bedroeg 5 mm. Merkwaardigerwijze bestond de niet-uitgezochte hoeveelheid, mij door den Heer E. H. Büchner gegeven, louter uit linker individuën, als het afgebeelde.

[1]) Berekend uit $a \angle m$ en $c \angle d$.

	Berekend.	Gemeten.
a : m = 100 : $1\bar{1}0$	→	56° 0'* (tot op 5')
c : d = $00\bar{1}$: $10\bar{1}$	→	50°10'* („ „ „)
a : δ = 100 : 101	39°30' 2"	39°33'
c : m = 001 : $1\bar{1}0$	80°15'18"	81°56'
c : n = 001 : $1\bar{3}0$	86°43'55"	87°27'
c : x = $00\bar{1}$: $1\bar{3}\bar{4}$	43°34' 7"	43°15'
c : r = $00\bar{1}$: $1\bar{3}\bar{1}$	77°35'49"	77° 3'
c : π = 001 : $1\bar{3}3$	48°22'12"	48° 3'
c : x = $00\bar{1}$: 134	43°34' 7"	43°55'

Volkomen splijtbaar volgens het orthopinacoid a.

Het optisch assenvlak is klinopinacoïdaal gericht. De optische assenhoek is groot, de dubbelbreking matig (c.a : 0,02).

V. MEYER [1]) vermoedde een analogie tusschen diphenyljodonium en thallium, doch thalliumchloride kristalliseert regulair (cubisch splijtend).

Dierkunde. — De Heer BOEKE biedt eene mededeeling aan van den Heer H. C. DELSMAN: *„Over de betrekking tusschen anus en blastoporus en over het ontstaan van den staart der gewervelde dieren.”*

(Mede aangeboden door den Heer VAN BEMMELEN).

Waren de beide vorige mededeelingen (27 Mei en 25 November 1916) voornamelijk aan de wijze van samentrekking van den blastoporusrand der amphibien gewijd, in deze derde zou ik, mede aan de hand van eenige hierop gerichte onderzoekingen, enkele feiten en beschouwingen willen geven betreffende het definitieve lot van den blastoporus, met name omtrent het vraagstuk van de betrekking van den anus der chordaten tot den blastoporus.

De opgaven hieromtrent van de talrijke onderzoekers, die zich ermede bezig gehouden hebben, loopen nog steeds zoozeer uiteen, dat het hem, die niet uit eigen aanschouwing met het onderwerp bekend is, buitengewoon moeilijk vallen moet, zich een juist oordeel over de betreffende feiten te vormen. Waar, naar ik geloof te kunnen aantoonen, de toepassing der aan mijn theorie omtrent den oorsprong der vertebraten ten grondslag liggende beginselen andermaal de oplossing van een oud, maar vooral door GROBBEN's (1900) indeeling van het dierenrijk weer actueel geworden vraagstuk en de overeenstemming tusschen schijnbaar principieel verschillende resultaten aan

[1]) Ber. Deutsch. Chem. Ges. 27 p.p. 426—502—1592.

den dag brengen zal, lijkt het mij hier de juiste plaats, nog eens — zeer in 't kort — de verschillende inzichten en bevindingen van vroegere onderzoekers te gedenken. In hoofdzaak zal ik mij daarbij beperken tot het amphibiënei, waarbij voor het eerst een betrekking tusschen anus en blastoporus opgemerkt werd, en daarbij Anuren en Urodelen afzonderlijk behandelen, omdat, gelijk ik op grond van mijn eigen onderzoekingen aan *Rana esculenta* en *Ambtystoma tigrinum* ten volle bevestigen kan, deze beide groepen in de verhouding van den anus tot den blastoporus een opmerkelijk verschil vertoonen. Beginnen wij dus met die groep, waaromtrent het eerst waarnemingen gedaan zijn, de Anuren.

Balfour (1881) geeft in zijn Leerboek een beschrijving van het ontstaan van den anus, waarbij hij voornamelijk steunt op de afbeeldingen door Goette (1875) voor *Bombinator igneus* gegeven en eigen onderzoekingen aan *Rana temporaria*, waar de anus iets vroeger doorbreekt dan bij padden in het algemeen het geval schijnt te zijn. De blastoporus wordt tot canalis neurentericus en de anus ontstaat daarna aan het uiteinde van een „diverticulum of the alimentary tract, ... which meets an invagination of the skin." Doorbraak vindt volgens Goette's bekende afbeelding van een overlangsche doorsnede bij *Bombinator* eerst plaats, als de staart reeds flink aan het uitgroeien is, bij *Rana temporaria* volgens Balfour iets vroeger.

Daarentegen komt Spencer (1885) bij *Rana temporaria* tot de conclusie, dat de blastoporus open blijft en direct tot anus wordt. De blastoporus wordt door de medullairplooien niet omvat, zoodat er geen canalis neurentericus is. Bij het eerste sluit zich Durham (1886) aan, secundair komt echter volgens hem een canalis neurentericus tot stand, onafhankelijk van den blastoporus. Ook Kupffer (1887) komt aan hetzelfde object tot de conclusie, dat de blastoporus als anus open blijft, evenzoo Perenyi (1888).

Schanz (1887) onderzocht eveneens *Rana temporaria*, benevens *Triton* waarover echter onder de Urodelen meer. Bij de eerste soort komt hij tot de gevolgtrekking, dat de medullairplooien wel degelijk den blastoporus omvatten, dat er wel een canalis neurentericus bestaat, al is het lumen niet duidelijk, en dat de anus door perforatie op den bodem van een groefje daarachter ontstaat. Over zijn theoretische opvattingen hieromtrent en zijn poging, dit met zijn afwijkende bevindingen voor *Triton* in overeenstemming te brengen, later meer. Wat het feitelijke betreft sluit zich Sidebotham's (1888) opvatting hier geheel bij aan. Volgens hem is Balfour's beschrijving de juiste, ook hij ziet op coupes het „diverticulum from the hind end of the mesenteron, dipping down towards a distinct pit in the epiblast

below the blastopore and quite separate from it." Hierop volgt perforatie. Ook MORGAN (1890) ziet bij *Rana halecina* en *Bufo lentiginosus* den anus door perforatie op den bodem van een kuiltje in het ectoderm achter den blastoporus ontstaan. Over zijn theoretische opvattingen en zijn poging, deze uitkomst met zijn afwijkende bevindingen voor *Amblystoma* in overeenstemming te brengen, waarbij hij zich in dezelfde richting als SCHANZ beweegt, hieronder meer.

GOETTE (1890) komt na een hernieuwd onderzoek aan *Bombinator igneus* en eenig andere Anuren tot de conclusie, dat de voorste helft van den spleetvormigen blastoporus tot canalis neurentericus, de achterste direct tot anus wordt, maar meent bij *Pelobates* toch te vinden, dat deze achterste helft zich eerst sluit en pas later de anus doorbreekt.

Gelijk men ziet bracht in dezen tijd bijna elk jaar een nieuw onderzoek over dit onderwerp. In 1890 verscheen dat van ERLANGER over *Rana esculenta*, in 1891 dat van ROBINSON en ASSHETON aan *Rana temporaria*, in hetzelfde jaar een kleine beschouwing van ERLANGER omtrent enkele opmerkingen door de beide Engelsche onderzoekers naar aanleiding van zijn werk gemaakt. Men is het er echter over eens, dat de anus in beide gevallen door perforatie ontstaat. Ook in hun theoretische opvattingen stemmen beide partijen in hoofdzaak met elkaar en ook met SCHANZ en MORGAN overeen. Hierover echter eerst na de behandeling der Urodelen.

De rij der elkaar snel opvolgende onderzoekingen, speciaal op dit onderwerp gericht, is hiermede plotseling geëindigd. Het vraagstuk wordt blijkbaar als opgelost of wel als onoplosbaar beschouwd, in ieder geval schijnen latere onderzoekingen geen nieuwe gezichtspunten geopend en aanleiding tot publicatie gegeven te hebben. Alleen in onderzoekingen van meer algemeene strekking worden in later jaren nog enkele mededeelingen over het lot van den blastoporus gedaan, zoo door BLES (1905), die voor *Xenopus laevis*, en door SEEMANN (1907), die voor *Alytes obstetricans* opgeeft, dat de blastoporus niet door de medullairplooien omgroeid wordt en direct in den anus overgaat, zoodat er geen canalis neurentericus is.

Het meerendeel der onderzoekers komt dus tot de slotsom, waarbij ik mij na mijn eigen onderzoek aan *Rana esculenta* zonder voorbehoud kan aansluiten, dat de anus door perforatie een eindje achter den blastoporus, die tot canalis neurentericus wordt, ontstaat. Een korte beschrijving moge hier aan de hand der bijgevoegde afbeeldingen voor *Rana esculenta* nogmaals volgen.

Nadat de dooierprop (Fig. 9 der vorige mededeeling) zich teruggetrokken heeft, vertoont de blastoporus zich als een korte overlangsche

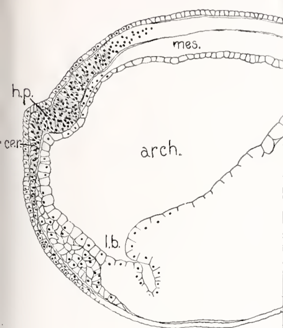


Fig. 1. *Rana escu*
Sagittale doorsnede door het e

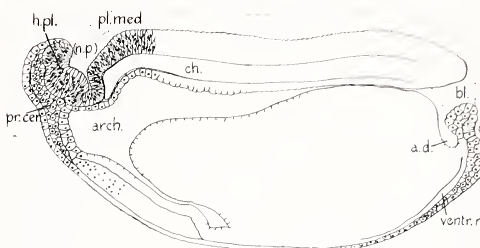


Fig. 3. *Rana esculenta.*
Sagittale doorsnede door het ei van tekstfig. 1*c*.

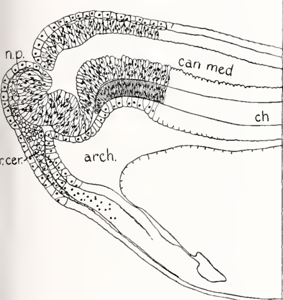


Fig. 4. *Rana e*
Sagittale doorsnede door een ei m

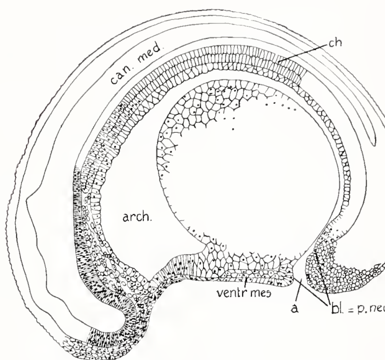


Fig. 7. *Amblystoma tigrinum.*
Sagittale doorsnede door het ei van tekstfig. 2*d*

VERKLARING DER FIGUREN.

a. anus, (*a*) plaats van den toekomstigen anus, *a.d.* anaalda *arch.* archenteron, *bl.* blastoporus, *can. med.* medullairkan *h.p.* hersenplaat, *l.b.* leverbocht, *mes.* mesoderm, *n.p.* neuro rus, (*n.p.*) plaats van den toekomstigen neuroporus, *p. n* porus neurentericus, *pl. med.* medullairplooi, *pr. cer.* p cerebrale ectodermverdikking, *ventr. mes.* ventraalmesode

below the blastopore and quite separate from it." Hierop volgt perforatie. Ook MORGAN (1890) ziet bij *Rana halecina* en *Bufo lentiginosus* den anus door perforatie op den bodem van een kuiltje in het ectoderm achter den blastoporus ontstaan. Over zijn theoretische opvattingen en zijn poging, deze uitkomst met zijn afwijkende bevindingen voor *Amblystoma* in overeenstemming te brengen, waarbij hij zich in dezelfde richting als SCHANZ beweegt, hieronder meer.

GOETTE (1890) komt na een hernieuwd onderzoek aan *Bombinator igneus* en eenig andere Anuren tot de conclusie, dat de voorste helft van den spleetvormigen blastoporus tot canalis neurentericus, de achterste direct tot anus wordt, maar meent bij *Pelobates* toch te vinden, dat deze achterste helft zich eerst sluit en pas later de anus doorbreekt.

Gelijk men ziet bracht in dezen tijd bijna elk jaar een nieuw onderzoek over dit onderwerp. In 1890 verscheen dat van ERLANGER over *Rana esculenta*, in 1891 dat van ROBINSON en ASSHETON aan *Rana temporaria*, in hetzelfde jaar een kleine beschouwing van ERLANGER omtrent enkele opmerkingen door de beide Engelsche onderzoekers naar aanleiding van zijn werk gemaakt. Men is het er echter over eens, dat de anus in beide gevallen door perforatie ontstaat. Ook in hun theoretische opvattingen stemmen beide partijen in hoofdzaak met elkaar en ook met SCHANZ en MORGAN overeen. Hierover echter eerst na de behandeling der Urodelen.

De rij der elkaar snel opvolgende onderzoekingen, speciaal op dit onderwerp gericht, is hiermede plotseling geëindigd. Het vraagstuk wordt blijkbaar als opgelost of wel als onoplosbaar beschouwd, in ieder geval schijnen latere onderzoekingen geen nieuwe gezichtspunten geopend en aanleiding tot publicatie gegeven te hebben. Alleen in onderzoekingen van meer algemeene strekking worden in later jaren nog enkele mededeelingen over het lot van den blastoporus gedaan, zoo door BLES (1905), die voor *Xenopus laevis*, en door SEEMANN (1907), die voor *Alytes obstetricans* opgeeft, dat de blastoporus niet door de medullairplooien omgroeid wordt en direct in den anus overgaat, zoodat er geen canalis neurentericus is.

Het meerendeel der onderzoekers komt dus tot de slotsom, waarbij ik mij na mijn eigen onderzoek aan *Rana esculenta* zonder voorbehoud kan aansluiten, dat de anus door perforatie een eindje achter den blastoporus, die tot canalis neurentericus wordt, ontstaat. Een korte beschrijving moge hier aan de hand der bijgevoegde afbeeldingen voor *Rana esculenta* nogmaals volgen.

Nadat de dooierprop (Fig. 9 der vorige mededeeling) zich teruggetrokken heeft, vertoont de blastoporus zich als een korte overlangsche

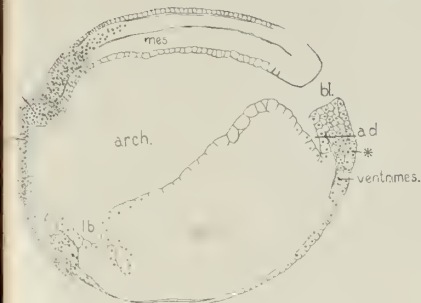


Fig. 1. *Rana esculenta.*
Sagittale doorsnede door het ei van tekstfig. 1*a*.

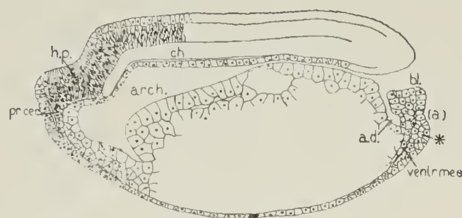


Fig. 2. *Rana esculenta.*
Sagittale doorsnede door een ei als tekstfig. 1*b*.



Fig. 3. *Rana esculenta.*
Sagittale doorsnede door het ei van tekstfig. 1*c*.

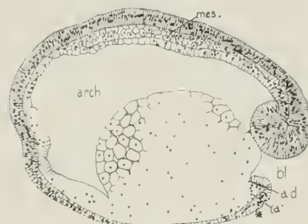


Fig 5. *Amblystoma tigrinum.*
Sagittale doorsnede door het ei van tekstfig. 2*a*.

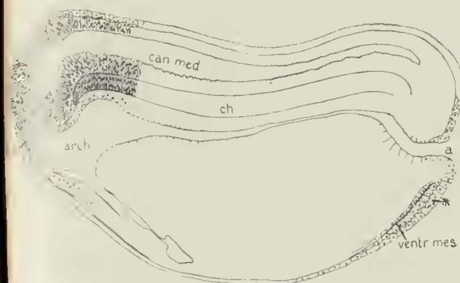


Fig. 4. *Rana esculenta.*
... doorsnede door een ei met gesloten medullairplooien.



Fig. 6. *Amblystoma tigrinum*
Sagittale doorsnede door het ei van tekstfig. 2*b* en *c*.

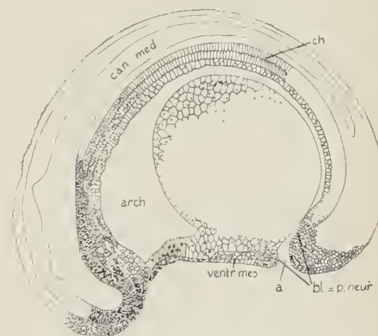


Fig. 7. *Amblystoma tigrinum.*
Sagittale doorsnede door het ei van tekstfig. 2*d*.

VERKLARING DER FIGUREN.

a. anus, (*a*) plaats van den toekomstigen anus, *a.d.* anaaldarm, *arch.* archenteron, *bl.* blastoporus, *can. med.* medullairkanaal, *h.p.* hersenplaat, *l.b.* leverbocht, *mes.* mesoderm, *n.p.* neuroporus, (*n.p.*) plaats van den toekomstigen neuroporus, *p. neur.* porus neurentericus, *pl. med.* medullairplooi, *pr. cer.* praecerebrale ectodermverdikking, *ventr. mes.* ventraalmesoderm.

spleet. (Tekstfig. 1*a*). Een sagittale coupe door dit ei is in Fig. 1

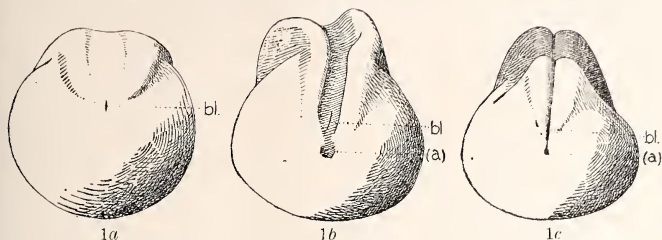


Fig. 1. Drie eieren van *Rana esculenta* tijdens het sluiten der medullairplooien. (*a*) kuiltje waar de anus ontstaan zal. *bl.* blastoporus.

der plaat afgebeeld. Het gelukt op een dergelijke, goedgerichte, overlangsche serie beter dan men zou durven verwachten, de blastoporusspleet als opening te krijgen (*bl.*), al is dit natuurlijk slechts op één of twee coupes het geval. Hoewel natuurlijk lang niet zoo sterk als de dorsale, is toch de ventrale blastoporuslip goed ontwikkeld en sluit tusschen zich en de dooiermassa in het archenteron den anaaldarm (Afterdarm, anal diverticulum, *a. d.*) in, die intusschen niets anders is dan de doorsnede van een de dooiermassa ringvormig omgevende insnijding, die wij aan de voorzijde bij de z.g. leverbocht (*l. b.*) terugvinden en die zich over de zijden van de dooiermassa naar achteren voortzet.

In een iets verder stadium zien wij van buiten aan het ei (tekstfig. 1*b*) achter den spleetvormigen blastoporus een ondiepe indeuking in het ectoderm optreden (*a*), die op een overlangsche doorsnede, als in fig. 2, duidelijk aan den dag komt. Onder deze indeuking valt een verdikte plek in het ectoderm op, waarvan reeds in fig. 1 de aanvang te zien was (*). Tegenover de ectodermindeuking bevindt zich op den bodem van den zg. anaaldarm een dergelijke indeuking in het entoderm.

In een ei als in tekstfig. 1*c* afgebeeld is aan het achtereinde van de vermelde ondiepe ectodermindeuking een, nog niet zeer diep, kuiltje ontstaan, vanwaar naar voren een nog ondieper gleuf naar den blastoporus loopt. De overlangsche doorsnede van dit ei wordt in fig. 3 gegeven. Zij sluit zich nauw bij fig. 2 aan, de anaalmembraan is echter dunner geworden. De stap naar fig. 4 schijnt tamelijk groot, doch is dit in werkelijkheid niet. Reeds in fig. 3 zien wij hoe de hersenplaat zich inkromt. Opvallend is de scherpe tegenstelling tusschen de praechordale hersenplaat en de epichordale

medullairplaat, die in dit stadium overigens geen platte plaat meer is, doch tot een gleuf tusschen de medullairplooien ingekromd. Een beeld als in fig. 3 levert de hersenplaat nu echter alleen op de 1 of 2 doorsneden, die haar precies mediaan treffen, naar links en naar rechts wordt in de coupes terstond een der medullairplooien geraakt, als in fig. 3 met een stippellijn aangegeven [1]). Wij hebben ons het punt (*n.p.*), de plaats van den toekomstigen neuroporus, dus niet voor te stellen als de doorsnede van een breede dwarse hersenplooi, maar veeleer als een uiterst smalle verbinding tusschen de beide zijdelingsche medullairplooien. Een paramediane coupe uit deze serie vertoont dientengevolge een veel grooter overeenkomst met fig. 4, waar de medullairplooien zich met elkaar vereenigd hebben, dan de mediane van fig. 3.

Fig. 4 is ook hierom van belang, omdat hier blijkbaar voor het eerst bij Anuren de neuroporus afgebeeld wordt. In zijn bewerking van „Die Morphogenie des Centralnervensystems" in Hertwig's Handbuch zegt Kupffer (1906) betreffende de Anuren: „Der Neuroporus ist im letzten Momente vor seinem Schlusse noch nicht zur Beobachtung gekommen", en ook in onderzoekingen na dien verschenen is hieromtrent niets te vinden. Kupffer beeldt dan ook alleen een overlangsche doorsnede af van een stadium, iets verder gevorderd dan mijn fig. 2 en voorts latere stadien dan mijn fig. 4, waar de plaats van den neuroporus zich nog herkennen laat aan de aanwezigheid van een kegelvormige ectodermverdikking of van een recessus neuroporicus aan den voorwand van het hersenblaasje. Uit de ligging daarvan concludeert Kupffer: „Es haben sich wohl die Ränder des Neuroporus bei Einleitung des Schlusses einwärts gerollt und damit die Hirnwand zurückgelagert." Wij zien in fig. 4 inderdaad, hoe het terugkrommen van den voorrand van de hersenplaat minstens een even groote rol bij het sluiten speelt, als het overgroeien der zijdelingsche randen. De hersenplaat vormt in fig. 4 als het ware een deksel op de opening van de epichordale medullairbuis.

Op nog een enkele andere omstandigheid zou ik de aandacht willen vestigen, met name hierop, dat niet alleen het ectoderm van de hersenplaat, maar ook dat, hetwelk vóór de dwarse hersenplooi

---

[1]) In verschillende der hier gegeven afbeeldingen heb ik de vrijheid genomen, eenige op elkaar volgende coupes met elkaar te combineeren, daar het in de praktijk natuurlijk niet mogelijk is, bij het snijden zóó precies te richten of zelfs maar een zóó volkomen gestrekt embryo te vinden, dat op dezelfde coupe, waar de spleetvormige blastoporus zich opent, ook de hersenplaat precies mediaan getroffen wordt, of, als in fig. 4, de uiterst kleine neuroporus. Gekleurd werd met alcoholkarmijn (kernen) en bleu de Lyon (dooierkorrels).

gelegen is en dus volgens mijn theorie met dat deel van de topplaat der Anneliden-trochophora overeenkomt, dat bij de Cranioten niet in de hersenplaat wordt opgenomen, sterk verdikt is, en dat het, bijv. in fig. 1 (*pr. cer.*), een even scherpe scheiding van deklaag en grondlaag vertoont als het ectoderm van hersen- en medullairplaat. Ook in fig. 2 is deze overeenstemming tusschen hersenplaat en het daarvoor gelegen, wat wij zouden kunnen noemen prae-cerebrale deel van de topplaat te zien. Verder echter verloopt de ontwikkeling van de beide deelen der topplaat verschillend. In de hersenplaat vindt, evenals in de medullairplaat, een innige vereeniging van dek- en grondlaag plaats, de grens tusschen beide verdwijnt en de deklaag wordt, gelijk ook reeds Assheton (1909) opmerkte, in den hersen- en ruggemergswand opgenomen. In het prae-cerebrale deel van de topplaat daarentegen wordt het verband tusschen deklaag en grondlaag steeds geringer, wat ongetwijfeld hiermede samenhangt, dat dit deel van het ectoderm de hersenplaat overgroeien moet, waarbij groote dikte slechts hinderlijk zou zijn. Wij zien dan ook, dat de dunne deklaag hier geheel de rol van ectoderm op zich neemt en de hersenplaat overgroeit, terwijl de grondlaag er als een compacte celmassa los onder komt te liggen (fig. 4, *pr. cer.*). Te oordeelen naar de door Kupffer (1906) gegeven afbeeldingen van latere stadien is het deze celmassa, die, later onder het hersenblaasje schuivend, de hypophyse levert. Zelf heb ik dit nog niet kunnen nagaan en zal hiertoe wellicht ook geen gelegenheid meer hebben. Een eventueel verband tusschen den oorsprong der hypophyse en de animale pool zou zeker een nader onderzoek waard zijn.

Keeren wij thans weder naar het achtereinde van het lichaam terug, dan zien wij, dat ook hier de mediane coupes van fig. 3 en 4 meer van elkaar verschillen, dan paramediane uit diezelfde seriën. De anus is doorgebroken, zoodat het schijnt of de ventrale blastoporuslip nu plotseling verdwenen is. De blastoporus zelf is overgroeid door de medullairplooien. Deze hebben zich in het achterste einde van de medullairbuis zoo vlak tegen elkaar gelegd, dat het lumen van die buis er niet in doorloopt en dus ook slechts van een virtueelen canalis neurentericus gesproken kan worden. Later schijnt, naar afbeeldingen van andere onderzoekers te oordeelen, toch nog een lumen op te treden en daarmede een werkelijke canalis neurentericus. Tot mijn spijt vond ik onder mijn materiaal geen stadium, waar de anus juist doorbreekt, gelijk dat door enkele vroegere onderzoekers (Sidebotham, Erlanger) afgebeeld wordt. Uit de studie van oppervlaktebeelden blijkt ten duidelijkste, dat de medullairplooien zich achter den spleetvormigen blastoporus vereenigen en

dat daarachter op den bodem van het reeds in fig. 1*c* afgebeelde kuiltje de anus doorbreekt.

Op een eigenaardigheid, die alleen door ERLANGER (1890) terloops vermeldt wordt, zou ik, in verband met wat wij bij Urodelen vinden zullen, nog bijzonder de opmerkzaamheid willen vestigen, n.m. deze, dat in het korte tijdsverloop, dat het stadium van fig. 3 van dat van fig. 1 scheidt, de afstand tusschen blastoporus en toekomstigen anus een weinig geringer wordt, m.a.w., nemen wij de plaats van den toekomstigen anus als een vast punt aan, dan schuift de spleetvormige blastoporus een weinig naar achteren daarheen. Het ventrale blastoporuslipje wordt dus op sagittale coupes niet alleen smaller, door het optreden der groeve tusschen blastoporus en anus, maar ook iets korter. Hierop komen wij later terug.

Wenden wij ons thans tot de Urodelen. Karakteristiek voor de vroege ontwikkelingsstadiën is hier de geringe uitbreiding van het buikectoderm en de sterke ontwikkeling der dorsale deelen, zoodat de eerste aanleg van het embryo om het ei gekromd ligt over een afstand van veel meer dan 180°. Deze eigenaardigheid deelen de Urodelen met de Dipnoi en de Petromyzonten, waarvan de vroegste ontwikkelingsstadiën, zoowel uitwendig als op doorsneden, een frappante overeenstemming met die der Urodelen vertoonen.

SCOTT en OSBORNE (1879) laten den blastoporus van *Triton* door de medullairplooien omgroeien en tot canalis neurentericus worden, zeggen echter niets over de vorming van den anus. SEDGWICK (1884) schrijft in zijn bekende opstel over den oorsprong der metamerie betreffende *Triton cristatus*: „in this animal the blastopore appears not to close, but to persist as the anus" en zijn leerlinge ALICE JOHNSON (1884) bevestigde dit aan coupes. Een canalis neurentericus, als door SCOTT en OSBORNE beschreven, heeft zij nooit waargenomen. SCHANZ (1887) komt bij *Triton punctatus* tot de gevolgtrekking, dat de blastoporus in het midden ingesnoerd wordt, de voorste opening wordt tot canalis neurentericus, de achterste tot anus. HOUSSAY en BATAILLON (1888) vinden bij den axolotl daarentegen, „qu'il n'y a pas de canal neurentérique, que le blastopore demeure toujours ouvert et qu'il devient l'anus définitif." Hierop volgt het nauwkeurige onderzoek van MORGAN (1889, 1890) voor den axolotl. Ook hij vindt, dat het achterste uiteinde van den blastoporus tot anus wordt; terwijl het voorste deel door de medullairplooien overgroeid wordt. Daar mijn uitkomsten zich geheel bij de zijne aansluiten en beide elkaar in sommige opzichten aanvullen, zal ik er later uitvoeriger op terugkomen.

GOETTE (1890) ziet eveneens bij eenige Anuren (*Triton*, *Siredon*) het achterste einde van den blastoporus tot anus worden.

Eerst uit den jongsten tijd zijn daarna weer enkele mededeelingen omtrent het lot van den blastoporus te vermelden, zoo die van DE LANGE (1907, 1912) en ISHIKAWA (1908) betreffende *Megalobatrachus maximus*, van KUNITOMO (1911) betreffende *Hynobius* en van SMITH (1912) betreffende *Cryptobranchus alleghaniensis*. Allen zijn het erover eens, dat het achterste deel van den spleetvormigen blastoporus als anus open blijft, het voorste deel door de medullairplooien overgroeid wordt, behalve ISHIKAWA, die meent dat dit verloop der feiten slechts bij uitzondering voorkomt, de anus daarentegen in den regel als nieuwvorming optreedt, wat door DE LANGE (1912) tegengesproken wordt.

Ook voor Cyclostomen en Dipnoi wordt door de meeste onderzoekers opgegeven, dat òf de heele blastoporus òf het achterste einde direct tot anus wordt.

Mijn eigen onderzoekingen betreffende den axolotl [1]) bevestigden geheel de conclusie, waartoe reeds de meeste mijner voorgangers gekomen waren, dat n.m. het achterste deel van den blastoporus tot anus wordt. Wanneer ik dan ook aan de hand mijner waar-

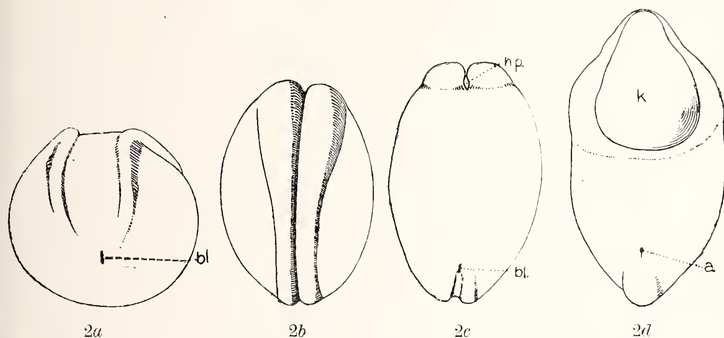


Fig. 2. Drie eieren van *Amblystoma tigrinum* tijdens het sluiten der medullairplooien.

a van achteren, *b* dorsaal, *c* (hetzelfde als *b*) en *d* ventraal gezien.
a. anus, *bl.* blastoporus, *h.p.* hersenplaat, *k.* kop.

---

[1]) Aan Dr. H. W. DE GRAAF moet ik hier mijn hartelijken dank betuigen voor de welwillende wijze, waarop hij een collectie zelf gekweekte axolotl-eieren en embryonen te mijner beschikking stelde. Hoewel 20 jaar geleden gefixeerd, bevond dit materiaal zich in uitstekenden toestand en bleek alle door mij gewenschte stadiën te bevatten.

nemingen de feiten nog eens kort beschrijf, dan is dit vooral om op enkele omstandigheden, die door vorige onderzoekers niet opgemerkt werden en mij van belang voorkomen bij het geven van een juiste verklaring, den nadruk te leggen.

Het in tekstfig. 2*a* en fig. 5 afgebeelde stadium komt geheel overeen met dat van tekstfig. 1*a* en fig. 1 voor *Rana esculenta*. Ook hier beginnen de medullairplooien op te treden en heeft de blastoporus zich tot een korte overlangsche spleet samengetrokken. Reeds thans valt in fig. 5 op, hoe weinig de buikzijde en hoe sterk de rugzijde ontwikkeld is, zoodat de afstand van animale pool (die volgens EYCLESHYMER, 1895, hier eveneens vlak voor de dwarse hersenplooi terug te vinden is) tot blastoporus hier, over de buikzijde gemeten, veel minder dan 180° bedraagt. Het is wellicht gewaagd voorspellingen te maken, maar ik zou vermoeden, dat prikproeven als voor de beide *Rana*'s beschreven, bij den axolotl ongeveer tot dit resultaat zouden voeren, dat de plaats van optreden van dorsale en ventrale blastoporus-lip het meest met *R. esculenta* overeenkomt, — wellicht zal de ventrale lip nog hooger op de ventrale zijde liggen [1]) — doch het sluiten van den blastoporus in zooverre meer met *R. fusca*, dat het alleen de dorsale lip is, die zich voortbeweegt over den geheelen blastoporus, en de ventrale op zijn plaats blijft, zoodat de sluiting plaats vindt ventraal, op minder dan 180° van de animale pool.

Weinigen slechts valt het voorrecht ten deel, een blijvende plaats in den dienst der wetenschap te worden waardig gekeurd. Alvorens mijn onderzoekingen te besluiten, hoop ik echter nog eenmaal gelegenheid te hebben, de al of niet juistheid van de boven gemaakte onderstelling door prikproeven aan axolotl-eieren te controleeren [2]). In ieder geval is het met haar in overeenstemming, dat, gelijk fig. 5, vergeleken met fig. 1, leert, de dorsale blastoporuslip en de oerdarm buitengewoon sterk, de ventrale blastoporuslip en de zg. anaaldarm (*a.d.*) bijzonder zwak ontwikkeld zijn. Toch zijn de beide laatste nog zeer goed te herkennen en op den buitenkant van de ventrale lip, een klein eindje achter den blastoporus, is zelfs een kleine indenking van het ectoderm (*a*) zichtbaar op de plaats, waar zich de toekomstige anus verwachten laat, als alles op

[1]) Iets dergelijks geeft, naar ik zie. SMITH (1912) inderdaad voor *Cryptobranchus* op: ventrale zoowel als dorsale blastoporuslip treden ongeveer 68° boven de vegetatieve pool op.

[2]) Hiertoe heb ik sindsdien gelegenheid gehad. De uitkomsten, die ik in een volgende mededeeling hoop te geven, bevestigden, dat het inderdaad niet zonder gevaar was, hier voorspellingen te wagen.

dezelfde wijze als bij Anuren ging. Vlak achter die ondiepe inzinking vinden wij ook hier weer dezelfde ectodermverdikking (*) als bij *Rana* opgemerkt werd (verg. fig. 1, 2, 3). Er is dus geen principieel verschil, integendeel in alle opzichten overeenstemming met wat wij bij *Rana* vonden.

Nu constateerden wij bij *Rana*, dat de blastoporus, nadat hij spleetvormig geworden is, nog een kleine verschuiving naar achteren uitvoert, zoodat de afstand tot den toekomstigen anus iets geringer wordt, wat zich op overlangsche coupes hierin uit, dat het lipje, dat de doorsnede van den ventralen blastoporusrand voorstelt, iets korter wordt. Hetzelfde zien wij in even verder gevorderde stadiën van het axolotl-ei gebeuren: uitwendig verandert de blastoporusspleet niet, maar op doorsneden blijkt de ventrale lip kleiner te worden, en, daar hij hier reeds zoo klein is, spoedig geheel te verdwijnen! Ik bezit thans verschillende overlangsche coupenserieën, waaraan zich dit proces nauwkeurig vervolgen laat. In het ei van tekstfig. 2*b* en *c* zijn de medullairplooien op het punt zich tegen elkaar te leggen, behalve aan voor- en achtereinde. De blastoporus vertoont zich nog steeds als een spleet, in dit ei in het midden een weinig versmald, waarvan echter bij andere eieren in dit en dergelijke stadiën weer niets te bespeuren valt. Op de overlangsche doorsnede (fig. 6) blijkt de ventrale blastoporuslip vrijwel geheel verdwenen te zijn: ten gevolge van de achterwaartsche verschuiving is dus het achtereinde van den spleetvormigen blastoporus gekomen op de plaats, waar de anus ontstaan moet!

Bijzonder belangwekkend is vervolgens het ei van tekstfig. 2*d*, waar de medullairbuis zich geheel gesloten heeft, behalve nog op het allerachterste uiteinde, waar juist het voorste deel van den spleetvormigen blastoporus door de beide plooien van links en rechts overgroeid wordt. Terwijl bij *Rana* aldus de heele blastoporus omvat wordt, laten de medullairplooien bij den axolotl boven het ventrale uiteinde van den blastoporus een opening over, den anus (*a*).

Een dergelijk ei trof ik onder mijn materiaal slechts in één enkel exemplaar aan. Dit werd overlangs gesneden. Morgan onderzocht een dergelijk ei aan dwarscoupes. Ik reproduceer hier in omtrek zijn voortreffelijke teekeningen, die mijn wijze van voorstellen geheel bevestigen. Tekstfig. 3*a* stelt voor een doorsnede door het ruggemergskanaal vlak voor den blastoporus. Eronder wordt de spleetvormige anaaldarm getroffen. De medullairplooien raken elkaar juist. Tekstfig. 3*b* en *c* treffen den blastoporus in zijn voorste helft, gelijk dat natuurlijk op vele op elkaar volgende coupes geschiedt. Men ziet de medullairplooien zich boven den blastoporus tegen elkaar

leggen, terwijl deze laatste zelf de verbinding vormt tusschen de voortzetting van het medullairkanaal en den anaaldarm, dus als canalis neurentericus fungeert. Tekstfig. 3*d* en *e* liggen nog verder naar achteren, de medullairplooien zijn minder ontwikkeld, wijken uit elkaar, vereenigen zich niet, gelijk bij den kikker, maar laten

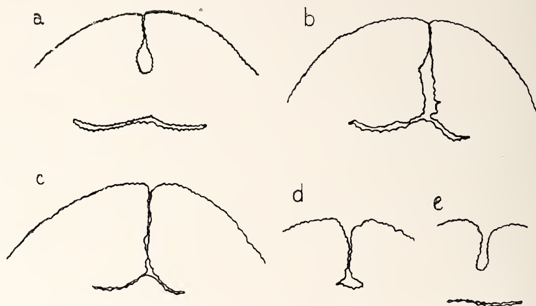


Fig. 3. Dwarse doorsneden door den blastoporus van een ei van *Amblystoma punctatum*, waar de medullairplooien zich er juist over sluiten, naar MORGAN (1890).
a voor den blastoporus, *b* en *c* door voorste helft, *d* en *e* door achterste helft (anus).

een opening over, den anus. Wie mijn beschrijving met die van vroegere onderzoekers vergelijkt, zal opmerken, dat ik, mij streng aan de feiten houdend, van deze niettemin een weinig andere voorstelling geef: ik laat de medullairplooien niet halverwege de lengte van den blastoporusspleet eindigen, maar boven het achterste deel van den blastoporus alleen een opening vrijlaten, den anus. Men kan dan ook, het medullairkanaal naar achteren volgend, niet alleen door den canalis neurentericus in het archenteron, maar ook door den anus naar buiten komen, daar dit nergens belet wordt door een versmelting van de beide medullairplooien dwars over het midden van den blastoporus, zooals vele onderzoekers geneigd zijn aan te nemen.

In de overlangsche doorsnede (fig. 7) nu zijn blastoporus (*bl.* = *p. neur.*) en anus (*a*) zeer goed uit elkaar te houden. De blastoporus wordt tot canalis, of laat ons liever zeggen porus neurentericus (onder canalis neurentericus toch is eigenlijk het laatste deel van het medullairkanaal te verstaan, en een porus, gelijk de blastoporus, kan niet tot een canalis worden). Den anus ingaande, kan men via den porus neurentericus in het archenteron komen. Het voorste deel

van den porus neurentericus wordt intusschen — en is in fig. 7 reeds — virtueel, daar achteraan de medullairplooien zich zoo vlak tegen elkaar leggen, dat het lumen van het medullairkanaal zich er niet meer tusschen voortzet, gelijk ook MORGAN reeds opmerkte. Vandaar de meening van verschillende onderzoekers, dat de medullairplooien den blastoporus niet bereiken en er geen canalis neurentericus is. Het achterste deel blijft open als inwendige opening van den anus. De zaak komt dus eigenlijk hierop neer, dat de achterwand van het allerachterste deel van de medullairbuis door den anus doorboord wordt, die bij Anuren vlak er achter ontstaat, en de oorzaak hiervan is, dat de porus neurentericus, de voormalige blastoporus dus, bij Urodelen zoover naar achteren verschoven is, dat zijn achtereinde op de plaats gekomen is, waar de anus bij Anuren doorbreekt. Dit is tevens de oplossing van de schijnbare tegenstelling tusschen Anuren en Urodelen in dit opzicht.

De verklaring, welke tot nu toe, bij gebrek aan beter, vrij algemeen voor deze tegenstelling gegeven werd, is die van SCHANZ (1887), MORGAN (1890), ERLANGER (1890) en ROBINSON en ASSHETON (1891), volgens welke de plaats, waar de anus bij de Anuren doorbreekt, eigenlijk beantwoorden zou aan het achtereinde van den oorspronkelijken, wijden blastoporus waarvan de zijdelingsche randen achteraan van links en rechts ten deele met elkaar vergroeid zouden zijn, op dezelfde wijze als de concrescentietheorie dit voor het vóór den definitieven, spleetvormigen blastoporus gelegen gebied aannam. De overlangsche groeve, die in het stadium van tekstfig. 1*c* blastoporus en aanleg van den anus verbindt, scheen een aanduiding van een vergroeiïngsnaad te zijn. De anus zou dus bij Amphibien slechts tijdelijk gesloten zijn en geen nieuwvorming. ERLANGER nam aldus concrescentie aan voor- zoowel als aan achterrand van den blastoporus aan, ROBINSON en ASSHETON alleen aan den achterrand. De vergroeiïngslijn wordt in beide gevallen met een primitiefstreep vergeleken, die, naar ROBINSON en ASSHETON in aansluiting aan BALFOUR's beschouwingen hieromtrent opmerken, alleen achter den blastoporus denkbaar is. Ten onrechte noemen de aanhangers der concrescentieleer de door hen vóór den blastoporus aangenomen vergroeiïngsnaad primitiefstreep. Men zou hier echter m. i. nog bij moeten voegen, dat een primitiefstreep zich alleen bij een dooierrijk ei met een kiemschijf verwachten laat, waarop wij thans echter niet verder in zullen gaan.

De concrescentieleer vindt, zelfs onder hen, die de ontwikkeling van beenvisschen, waarvoor HIS haar het eerst opstelde, bestudeerden, steeds minder aanhangers (verg. SUMNER, 1904). Men ziet bij het amphibien ei inderdaad vaak vanaf den blastoporus een fijne, mediane

lijn naar voren loopen, die sterk aan een vergroeiïngsnaad denken doet. Alleen, gelijk ROBINSON en ASSHETON ook opmerken: deze lijn strekt zich naar voren tot aan het vooreinde van de hersenplaat uit, waar nooit blastoporus geweest is! Voor concrescentie aan den achterrand pleit nog veel minder, en de diepte van den anaaldarm in Fig. 1 geeft waarschijnlijk evenmin de plaats aan, waar de ventrale blastoporusrand het eerst opgetreden is, als het punt, waar de leverbocht ligt, de plaats, waar de dorsale rand het eerst optrad. In beide gevallen heeft blijkbaar actieve splijting tot verdieping van de archenteron-instulping veel bijgedragen. De langzaam duidelijker (maar niet langer!) wordende groeve tusschen blastoporus en anaal-indeuking is dan ook geenszins als een vergroeiïngsnaad te beschouwen. Wellicht is zij iets even onverklaarbaars als de „Rückenrinne'' van salamandergastrula's, wellicht ook ontstaat zij op dezelfde wijze als de groeve, die de beide indeukingen verbindt, welke men in elkaars nabijheid met twee vingers in een week kussen maakt.

Omtrent het verband tusschen blastoporus en anus bij vertebraten zou men drie onderstellingen kunnen maken:

1°. er is een primair verband,

2°. er is geen verband,

3°. er is een secundair verband.

De eerste onderstelling boven behandeld, is thans de meest verbreide, zelfs waar bij Anuren 2°. schijnt te gelden, tracht men dit toch terug te voeren op 1°., aannemende, dat wat bij de Urodelen gevonden wordt, ook in principe voor de Anuren gelden moet. Aldus tracht bijv. MAURER (1906) in Hertwig's Handbuch de bevindingen bij alle chordaten op 1° terug te voeren, wat niet altijd even makkelijk gaat. Reeds *Amphioxus*, waar geenerlei verband tusschen anus en blastoporus valt te constateeren, is al dadelijk een spelbreker.

De mogelijkheid van 1° is op grond mijner theorie bij Vertebraten geenszins uitgesloten, zoolang de mogelijkheid van een verband tusschen blastoporus en anus voor Protostomia bestaat, gelijk zich dat op grond van SEDGWICK's bekende theorie (1884), volgens welke mond en anus uit voor- en achtereinde van een spleetvormigen, in het midden dichtgroeienden actinienmond ontstaan, verwachten liet. De mond en anus verbindende vergroeiïngsnaad, die over de buikzijde der anneliden zou moeten loopen, zouden wij, deze theorie op vertebraten overbrengend, dan terug moeten vinden tusschen blastoporus en anus, dus in de zg. „Afterrinne", den „primitiefstreep" van ROBINSON en ASSHETON (zie boven), — niet in de hypothetische vergroeiïngsnaad vóór den blastoporus, den „primitiefstreep" der

concrescentie-theorie, gelijk LAMEERE (1891) en HUBRECHT (1905) in hun toepassing van SEDGWICK's theorie op de Vertebraten meenen. Het eventueele bestaan van een primair verband tusschen anus en blastoporus bij Vertebraten, zou ons dus geenszins noodzaken, deze met GROBBEN (1908) van de Deuterostomia af te leiden, zoolang de mogelijkheid van een dergelijk verband bij Protostomia bestaat. Toen ik na het verschijnen mijner theorie aan verschillende bekende onderzoekers in binnen- en buitenland hun oordeel daarover vroeg, bleek voor velen, hoe welwillend overigens ook vaak hun antwoord was, niettemin juist hierin een bezwaar te bestaan, dat ik thans getracht heb te weerleggen, doch dat ik door mijn verdere betoog geheel en al hoop op te heffen.

De theorie van SEDGWICK toch vindt in de ontwikkeling der Protostomia al even weinig steun als, naar blijken zal, in die der Tritostomia (Vertebraten). Bij de eerste zoowel als bij de laatste groep is het verband tusschen anus en blastoporus ver te zoeken. Telkens weer zien wij den anus als een nieuwvorming, door perforatie, ontstaan. Met name bij Anneliden, waarvoor SEDGWICK zijn theorie in de eerste plaats opgesteld heeft, is, gelijk ik in mijn *Scoloplos*-onderzoek (1916) nagegaan heb, nergens een directe overgang van het achtereinde van den blastoporus in den anus geconstateerd. Zelfs bij den primitieven *Polygordius*, waar inderdaad de blastoporus door versmelting der zijdelingsche randen in het midden in tweeën gedeeld wordt, sluit zich nochtans de achterste opening, en de anus ontstaat later door perforatie achter de beide teloblasten, die aan den achterrand van den blastoporus lagen. Mij schijnt dan ook de meest waarschijnlijke opvatting omtrent het ontstaan van den anus deze, dat in een larve van het protrochula-type (MÜLLER'sche larve der Polycladen, pilidium der Nemertinen) het entodermzakje, dat reeds naar achteren gekeerd is, zich tegen den ventralen lichaamswand gelegd heeft en doorgebroken is, op dezelfde wijze als dit bij de Deuterostomia geschiedt, zoodat aldus een trochophora-larve ontstond.

Het denkbeeld van een primair verband tusschen anus en blastoporus meen ik dus voor Proto- zoowel als Tritostomia, evenals voor Deuterostomia, te moeten verwerpen. De anus is bij Proto- zoowel als bij Tritostomia een nieuwvorming, onafhankelijk van den blastoporus, ontstaande door perforatie. Bovendien schijnt mij de anus der Tritostomia, als ontstaande op overeenkomstige plaats, homoloog aan dien der Protostomia, dus van de Anneliden overgeërfd. Op de vraag, hoe het bij de Vertebraten met de perianale groeizone, die het ectoderm van het soma der Anneliden levert, staat, komen wij zoo aanstonds terug.

Van de 3 boven vermelde mogelijkheden betreffende de betrekking tusschen anus en blasporus is dus m.i. de tweede, zoowel voor Proto- als Tritostomia de juiste. De derde mogelijkheid echter vinden wij bij de Urodelen en blijkbaar evenzoo bij de daarmee in hun vroegste ontwikkeling zoo geheel overeenstemmende Dipnoi en Petromyzonten verwerkelijkt. Roepen wij ter verklaring thans mijn theorie ter hulp.

Volgens deze is de Vertebraat uit de Annelide af te leiden, doordat het stomodaeum zoo sterk naar achteren uitgegroeid is, dat het zich, als medullairbuis, over de geheele lengte van het soma en, naar wij zien zullen, zelfs nog verder (staartvorming!) uitstrekt. Voor den overgang van het stomodaeum in het entodermale deel van den darmtractus wil ik hier den naam porus cardiacus invoeren. Dit is dus de voormalige blastoporus. Reeds bij de ontwikkeling der Anneliden zien wij dezen porus cardiacus door het langer worden van het stomodaeum in telkens verder naar achteren gelegen segmenten wegschuiven. Bij vertebraten gaat deze achterwáártsche verschuiving zoo ver, dat de porus cardiacus geheel aan het achtereinde van het soma, vlak voor den anus komt te liggen, als porus neurentericus. Deze achterwaartsche verschuiving wordt blijkbaar teweeggebracht door een groeizone, die aan het binnenste uiteinde van het stomodaeum, rondom den porus cardiacus, opgetreden is en door welks werkzaamheid het stomodaeum steeds meer naar achteren verlengd werd. Deze groeizone zou ik de periporale groeizone willen noemen. De lengtegroei van het soma der Anneliden daarentegen gaat uit van een perianale groeizone. Beide groeizones oefenen nu, naar ik hoop aan te toonen, haar werkzaamheid bij de vroegste ontwikkeling der Vertebraten uit, en de toestand wordt nog meer gecompliceerd, doordat beider werkzaamheid, ontogenetisch vervroegd, reeds tijdens de gastrulatie plaats vindt. Ik meen hieromtrent tot de volgende voorstelling te moeten komen, die door verdere hierop gerichte onderzoekingen (prikproeven, tellen der mitosen) nader te bevestigen zou zijn.

Het ectoderm, dat later, ook dorsaal, den lichaamswand van het geheele soma leveren moet, ligt in een stadium als tektsfig. 1*a* en 2*a* hoofdzakelijk ventraal en lateraal en breidt zich eerst later, bij het sluiten van de medullairbuis, ook over de rugzijde uit. De uitbreiding van dit somatische ectoderm moet nu dus plaats vinden vanuit de perianale groeizone: in de buurt van den toekomstigen anus, dus een eindje onder de ventrale blastoporuslip laten zich de meeste mitosen verwachten.[1]) Wanneer echter de blastoporus gesloten is

[1]) Ik grijp de hier geboden gelegenheid aan, om, wat ik reeds vroeger had

(tekstfig. 1*a*, 2*a*), neemt de uitbreiding van dit ventrale ectoderm naar achteren een einde, wellicht in verband met den bolvorm van het ei. Blijft de perianale groeizone nu toch doorwerken, dan zal een ringvormige ectodermverdikking om de plaats van den anus optreden. Deze laat zich inderdaad waarnemen, het komt mij voor, dat wij hierin de verklaring hebben van de ectodermverdikking, die wij in de fig. 1, 2 en 3 (plaat) zich in toenemende mate vlak onder de anaalinstulping zien ontwikkelen (*) en die zich, gelijk de paramediane coupes leeren, ook links en rechts daarvan naar voren uitstrekt. Bij den axolotl, waar de uitbreiding van het ventrale ectoderm zoo gering is, is ook deze ectodermverdikking, hoewel waarneembaar, toch van zeer weinig beteekenis (fig. 5*). De werkzaamheid der perianale groeizone schijnt spoedig daarop te eindigen en de ectodermverdikking verdwijnt in volgende stadiën weer langzamerhand. De somatogenese is hiermede geëindigd[1]).

Wenden wij ons thans tot de periporale groeizone, die het uitgroeien van het stomodaeum resp. de medullairbuis resp. de medullairplaat, benevens de achterwaartsche verschuiving van den porus cardiacus (Anneliden) resp. den blasporus resp. den porus neurentericus (Chordaten) bewerkt. Organen of processen, die voor den bouw van het volwassen dier van veel belang zijn, treden ontogenetisch vaak vervroegd op. Bij Lamellibranchiaten stulpt zich de schaalklier bijv. reeds tijdens de gastrulatie in, hoewel het laatste proces phylogenetisch ongetwijfeld veel ouder is. Zoo treedt ook de werkzaamheid der periporale groeizone en de daarmede gepaard gaande achterwaartsche verschuiving van den porus cardiacus, op dit tijdstip nog blastoporus, zeer vervroegd op, n.m. reeds tijdens de gastrulatie. De interferentie van het samentrekken van den blastoporusrand met de achterwaartsche verschuiving van den blastoporus veroorzaakt de caudaad-excentrische sluiting van den blastoporus, typisch voor de chordaten. De werkzaamheid der periporale groeizone uit zich, zoolang de buisvorming nog niet opgetreden is, niet in de vorming van een stomodaeumbuis resp. medullairbuis, gelijk

---

willen doen, de door mij in Fig. 2 van mijn artikel in de Mitth. Neapel (1913) gegeven voorstelling van het uitgroeien van vertebraat en annelide uit de trochophora in twee tegengestelde richtingen als minder juist te herroepen: vertebraat en annelide groeien beide in dezelfde, n.m. caudale, richting uit.

[1]) Zou de somatogenese ook na de beëindiging der gastrulatie voortduren, dan zou de anus zich van de dooiercellenmassa verwijderen en ergens tusschen deze laatste en de punt van den staart komen te liggen. Dit geval komt vrij algemeen bij visschen voor. Als voorbeeld vermeld ik de steur (tekstfig. 5), doch ook vele beenvisschen zouden hier genoemd kunnen worden, bij wier „larven" de plaats van den anus zeer verschillend en voor het determineeren van belang kan zijn.

dat later tijdens de staartvorming het geval is, maar voorloopig in de vorming van de medullairplaat. Het uitgroeien van het stomodaeum tot medullairbuis is dus, gelijk ik reeds meer opmerkte, wat zijn eerste, somatogenetische deel betreft, als het ware op een plat vlak, het rugvlak van het embryo, geprojecteerd te denken. Als de blastoporus zich tot een spleet gesloten heeft en de buisvorming optreedt in den vorm der medullairplooien, blijft niettemin de caudade verschuiving van dezen spleetvormigen blastoporus, gelijk wij gezien hebben, voortgaan, weliswaar slechts over een kleinen afstand, gelijk echter bij den korten duur van dit stadium ook niet anders te verwachten is, en dus waarschijnlijk met onverminderde snelheid. Verder dan den anus kan deze verschuiving intusschen niet gaan, phylogenetisch: het naar achteren uitgroeiende stomodaeum van de Annelide stuit ten slotte op den anus. Wordt nu halt gemaakt even voor den anus, dan zal er geenerlei betrekking tusschen porus neurentericus = blastoporus en anus zijn (tekstfig. 4*a*), gelijk wij dat bij den kikker zagen. Gaat de verschuiving echter nog even verder (tekstfig. 4*b*), dan komt een secundaire betrekking tusschen den porus neurentericus = blastoporus en den anus tot stand.[1]) De anus breekt a.h.w. door het allerlaatste uiteinde van het medullairkanaal naar buiten, uit het medullairkanaal kan men zoowel door den anus naar buiten als door den porus neurentericus in het archenteron komen, en uit het archenteron via porus neurentericus en anus naar buiten. In de

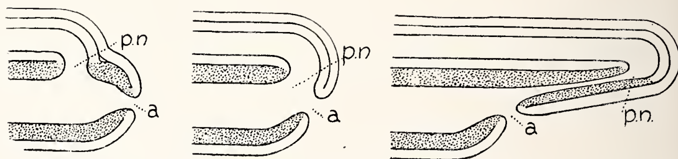


Fig. 4. Schema van de verhouding tusschen blastoporus en anus, en van de staartvorming.

a. toestand bij Anuren. *b.* toestand bij Urodelen etc. *c.* staartvorming.
a. anus, *p.n.* porus neurentericus; gestippeld in het entoderm.

ontogenie zal deze toestond zich hierin uiten, dat de medullairplooien zich niet over de achterste helft van den spleetvormigen blastoporus sluiten, maar een opening laten, den anus. Zelfs zullen zij zich links en rechts van het achterste deel van den blastoporus wellicht nauwelijks of niet ontwikkelen onder den invloed van de anaalinstulping,

[1]) Op een overlangsche doorsnede als in tekstfig. 4 schijnt de toestand in 4*b* op het eerste gezicht wel principieel verschillend van dien in 4*a*. Men denke zich alles echter in de ruimte!

die hier, als bijv. bij den kikker, optreedt. Denkt men zich alles eens buitengewoon vergroot, dan zal men, door den anus naar binnen kijkende, den spleetvormigen blastoporus = porus neurentericus in de diepte zien liggen, al zal het achtereinde hiervan, juist onder invloed van de vorming van den anus, waarschijnlijk een weinig verwijd zijn. Met deze voorstelling stemmen nu de door ons bij Urodelen geconstateerde feiten zoo volkomen overeen, dat aan de juistheid dezer verklaring wel nauwelijks meer twijfel mogelijk is. Wij zien bij den axolotl den blastoporus naar achteren schuiven tot de plaats, waar bij de Anuren de anus doorbreekt. Wij zien, hoe boven die plaats, dus boven het achtereinde van den blastoporus, de medullairplooien zich niet, gelijk bij de Anuren, vereenigen, maar een opening laten. Wij zagen, hoe wij uit de medullairbuis zoowel via den anus naar buiten als via den porus neurentericus in het archenteron kunnen komen. Wat den toestand even later minder overzichtelijk maakt is, dat de medullairplooien zich caudaal zoo vlak tegen elkaar leggen, dat er geen medullairkanaal meer is, — evenals bij den kikker — en dat dus, evenals bij den kikker, ook de porus neurentericus virtueel zou worden, indien niet het achterste einde als anaalopening open bleef. Alleen het voorste deel van de spleet wordt dus virtueel en hieruit zijn de opgaven van verschillende schrijvers betreffende Urodelen, Dipnoi en Petromyzonten te verklaren, volgens welke de blastoporus tot anus zou worden en een canalis neurentericus ontbreken zou. Hiermede heeft de schijnbare controverse tusschen Anuren en Urodelen c.s. dus zijn oplossing gevonden. Het zou ons geenszins kunnen verwonderen, indien bij een Anure eens een toestand gevonden werd, gelijk die bij Urodelen regel schijnt te zijn, of omgekeerd, daar het verschil tusschen beide niet principieel blijkt te zijn. Men zou zelfs bij een zelfde soort wel eens

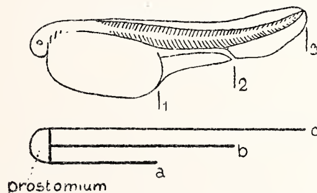


Fig. 5. Larve van de steur volgens KUPFFER uit HERTWIG's Handbuch.
1. grens gastrulatie, 2. grens somatogenese, 3 grens urogenese.
Er onder: Schema van de interferentie van de gastrulatie (a) met de werkzaamheid der perianale (b) en der periporale (c) groeizones.

nu het eene, dan weer het andere geval kunnen aantreffen (verg. DE LANGE en ISHIKAWA over *Megalobatrachus!*).

Ik sprak boven van halt maken der caudade verschuiving van den porus neurentericus = blastoporus vóór den anus. Van halt maken is echter in werkelijkheid geen sprake. Hoewel de anus een onoverkomelijke hinderpaal voor de verdere achterwaartsche uitgroeiïng van het stomodaeum = medullairbuis schijnt op te leveren, is niettemin de werkzaamheid der periporale groeizone nog niet uitgedoofd, wanneer dat met de perianale wel het geval is. Daar er intusschen binnen het lichaam geen plaats is voor verdere uitgroeiïng, is het gevolg, dat vóór den anus een uitpuiling van den lichaamswand optreedt, waarin het stomodaeum = medullairbuis uitgroeit: de staartknop (tekstfig. 4*c*). Zoo zien wij den staart der gewervelde dieren ontstaan, doordat de periporale groeizone haar werkzaamheid voortzet, nadat die van de perianale is opgehouden. Aldus komt de anus der gewervelde dieren niet terminaal te liggen, gelijk bij de Anneliden, doch aan den wortel van den staart, die hem overgroeit en die juist aan de aanwezigheid van den anus zijn ontstaan te danken heeft. Phylogenetisch moeten wij ons dit zoo denken, dat de lengtegroei van het stomodaeum (medullairbuis) die van het lichaam (soma) overtreft, zoodat de porus cardiacus (neurentericus) a. h. w. den anus inhaalt en hem voorbijsnelt. Evenals bij de Anneliden ligt de anus der Vertebraten terminaal ten opzichte van het eigenlijke soma, de staart is een achterwaarts gerichte uitgroeiïng van de rugzijde van dit laatste. Volgens deze opvatting behoort ook de ventrale zijde van den staart dus tot de dorsale zijde van het soma. Hiermede stemt overeen, dat de dorsale ongepaarde huidplooi der visch- en amphibienlarven zich over de punt en de onderzijde van den staart tot aan den anus voortzet. Daar het mesoderm aan den blastoporusrand ontstaat, blijkbaar een product is van de periporale groeizone, neemt ook dit aan de staartvorming op belangrijke wijze deel.

Terecht wordt door DE LANGE (1912) de nadruk gelegd op de tegenstelling tusschen somatogenese en urogenese, al kan ik mij met de door hem aan de woorden cephalo- en somatogenese verbonden begrippen betreffende gastrulatie en mesodermvorming geenszins vereenigen. Uit het bovenstaande blijkt, dat de somatogenese, evenals de somatogenese der Anneliden, het werk is van de perianale groeizone, die het toekomstige somatische (in tegenstelling tot het neurale, d.i. dat van de medullairplaat) ectoderm van de romp levert, hetwelk, zoolang de medullairplaat open is, hoofdzakelijk ventraal en op de zijden ligt. Tegelijkertijd met de somatogenese is echter ook de periporale groeizone aan het werk, die de achterwaartsche ver-

schuiving van den blastoporus en de achterwaarsche verlenging van de medullairplaat = den aanleg van de medullairbuis bewerkt. En beide groeiprocessen worden met een derde, gelijktijdig verloopend proces gecombineerd: de gastrulatie, zich aan de oppervlakte uitend in de samentrekking van den blastoporusrand.

De urogenese daarentegen treedt op, nadat twee van deze drie processen geëindigd zijn, te weten de gastrulatie en de werkzaamheid der perianale of somatische groeizone[1]), en is dus uitsluitend het gevolg van de werkzaamheid des periporale groeizone, die een verlenging van de medullairbuis veroorzaakt, onevenredig aan de lengte van het soma. De tegenstelling tusschen somatogenese en urogenese is hiermede verklaard. De werkzaamheid der periporale groeizone, zich uitend in de caudade verschuiving van den blastoporus, interfereert dus eerst met de gastrulatie, wat de caudaad-excentrische sluiting van den oermond ten gevolge heeft, uit zich vervolgens in de door ons geconstateerde terugschuiving van den spleetvormigen blastoporus (welk stadium slechts kort duurt), daarna in de staartvorming als lengtegroei van de medullairbuis.

Van halt houden der terugschuivende beweging van den blastoporus resp. porus neurentericus vóór den anus (verg. tekstfig. 4) is dus geen sprake, en het verschil tusschen Anure en Urodeel is dan ook niet hierin gelegen, dat bij de eerste de porus neurentericus een eindje vóór den anus halt maakt, bij de laatste eerst als de anus bereikt is, maar wel hierin, dat bij Anuren de buisvorming, d. i. het sluiten der medullairplooien, plaats vindt even vóór den anus, bij de Urodelen, Dipnoi en Cyclostomen eerst, als de anus bereikt is. En dit, slechts gradueele verschil, hangt blijkbaar weer samen met de omstandigheid, dat bij de Urodelen de werkzaamheid der periporale groeizone krachtiger is dan bij de Anuren, de werkzaamheid der perianale daarentegen zwakker is dan bij dezen. Dit uit zich, gelijk wij reeds opmerkten, hierin, dat bij Urodelen de medullairplaat zeer sterk, de buikzijde zeer zwak ontwikkeld is in vergelijking met de Anusen. Hetzelfde geldt voor de Dipnoi en Cyclostomen. Nu werkt, gelijk wij zagen, de perianale groeizone voornamelijk ventraal en op beide zijden van den (toekomstigen) anus, om de eenvoudige reden, dat bij open medullairplaat het toekomstige rompectoderm ook alleen ventraal en op de beide zijden van het ei ligt. Toch is ook dorsaal van den (toekomstigen) anus een, zij het ook zwakke,

[1]) Terwijl bij de Anuren de processen ongeveer gelijktijdig ophouden, komt het, gelijk boven reeds opgemerkt werd, bijv. bij visschen zeer veelvuldig voor, dat de somatogenese nog voortgaat na afloop der gastrulatie. zoodat de anus ergens tusschen de dooiercellenmassa en de staartpunt komt te liggen. (Tekstfig. 5).

werkzaamheid aanwezig, gericht naar den ventralen blastoporuslip, die dan ook sterker ontwikkeld is, waar de perianale groeizone krachtiger werkt (Anuren, fig. 1), zwakker, waar de perianale groeizone zwakker werkt (Urodelen enz., fig. 5).

Nu wordt de werkzaamheid van dit dorsale deel der perianale groeizone tegengewerkt door die van de periporale groeizone, die den blastoporus naar achteren duwt. En met de relatieve sterkte dezer beide groeizones hangt het nu ongetwijfeld samen, dat bij Urodelen de blastoporus vóór de buisvorming [1]) tot den anus teruggeduwd wordt, bij Anuren daarentegen dezen niet geheel bereikt. Ik hoop, dat de kortheid, welke ik genoodzaakt ben in acht te nemen, de duidelijkheid van dit betoog niet te zeer schaden moge. Uitvoeriger uiteenzetting zal ongetwijfeld te eeniger tijd elders volgen.

Terwijl aldus, naar het mij voorkomt, de toepassing mijner theorie hier omtrent verschillende duistere vraagstukken licht verspreid heeft, leveren de geschilderde feiten en uitkomsten wederom een steun aan die theorie, en wel een, welks waarde niet te onderschatten valt.

LITERATUUR.

Assheton, R., 1909, Professor Hubrecht's Paper on the Early Ontogenetic Phenomena in Mammals. Quart. Journ. Micr. Sc. N. S. Vol. 54.

Balfour, F. M., 1881, A Treatise on Comparative Embryology.

Bles, E. J., 1905, The Life-History of Xenopus laevis. Trans. R. Soc. Edinb. Vol. XXXXI.

Delsman, H. C., 1913, Der Ursprung der Vertebraten. Mitth. Zool Stat Neapel, Bd. 20.

—— 1913, Ist das Hirnbläschen des Amphioxus dem Gehirn der Kranioten homolog? Anat Anz. Bd. 44.

——, 1916, Eifurchung und Keimblattbildung bei Scoloplos armiger. Tijdschr. Ned. Dierk. Ver. (2) Dl. XIV.

——, 1916, De verhouding der eerste drie klievingsvlakken tot de hoofdassen van het embryo bij Rana fusca Rösel. Versl Kon. Acad. Wetensch. Dl. XXV.

——, 1916, De gastrulatie van Rana esculenta en van Rana fusca, ibid.

Durham, H. E., 1886, Note on the presence of a neurenteric canal in Rana, Quart. Journ. Micr. Sc. Vol. XXVI..

Erlanger, R. von, 1890, Ueber den Blastoporus der anuren Amphibien, sein Schicksal und seine Beziehungen zum bleibenden After. Zool. Jahrb. Abt. Anat. Ont. Bd. IV.

——, 1891, Zur Blastoporusfrage bei den anuren Amphibien. Anat. Anz. Bd. VI.

Eycleshymer, A. C., 1895, The early Development of Amblystoma, with Observations on some other Vertebrates, Journ. Morph. Vol. X.

[1]) Waarvan het optreden weer bepaald wordt door het einde der gastrulatie, evenals bij Protostomia de stomodaeumbuis terstond na beeindiging der gastrulatie gevormd wordt. Bij Selachiï, waar het einde der gastrulatie door den grooten dooierrijkdom zoo zeer vertraagd wordt, treedt de urogenese reeds vóór de buisvorming op, zoodat er aanvankelijk een open, gleufvormige canalis neurentericus (sulcus neurentericus) is.

GOETTE, A. 1875, Die Entwickelungsgeschichte der Unke (Bombinator igneus) als Grundlage einer vergleichenden Morphologie der Wirbeltiere.

——, 1890, Entwicklungsgeschichte des Flussneunauges. Abhandl. z. Entw.geseh. der Tiere, Heft 5, T. I.

GROBBEN, C., 1908, Die systematische Eintheilung des Thierreiches. Verh. Zool. Botan. Ges. Wien.

HIS, W., 1874, Unsere Körperform und das physiologische Problem ihrer Entstehung.

HOUSSAY, F. et BATAILLON, 1888, Segmentation de l'oeuf et sort du blastopore chez l'axolotl. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, T. CVII.

HUBRECHT, A. A. W 1905, Die Gastrulation der Wirbelthiere. Anat. Anz Bd. XXVI.

ISHIKAWA, C., 1908, Ueber den Riesensalamander Japans. Mitt. deutsch. Ges. f. Natur- und Völkerkunde Ostasiens, T. XI.

JOHNSON, A., 1884, On the Fate of the Blastopore and the Presence of a Primitive Streak in the Newt (Triton cristatus). Quart. Journ. Vol. XXIV.

KUNITOMO, K., 1911, Die Keimblattbildung des Hynobius nebulosus. Anat. Hefte, 1. Abt. Bd. 44.

KUPFFER, K. VON, 1887, Ueber den Canalis neurentericus der Wirbelthiere. Sitz Ber. Ges. Morph. Phys. München, Bd. III.

——, 1906, Die Morphogenie des Centralnervensystems. HERTWIG's Handbuch vergl. exp. Entw. Bd. II, T. III.

LAMEERE, A., 1891, L'origine des Vertébrés. Bull. Soc. Belge Microscopie, T. 17.

LANGE, D. DE, 1907, Die Keimblätterbildung des Megalobatrachus maximus Schlegel. Anat. Hefte, Bd. 32.

——, 1912, Mitteilungen zur Entwicklungsgeschichte des Japanischen Riesensalamanders. Anat. Anz. Bd. 42.

MAURER, F., 1906, Die Entwickelung des Darmsystems, 5. Die Entwickelung des Afters. HERTWIG's Handbuch Bd. II, T. I

MORGAN, T. H., 1890, On the amphibian Blastopore. Baltimore, Stud. Biol. Lab. (ook '89, John Hopkins Univ. Circul.).

PERENYI, J., 1888, Ueber das Verharren des Blastoporus bei den Fröschen. Math. Nat. Ber. Ungarn, Bd. V.

ROBINSON, A. en R. ASSHETON, 1891, The formation and fate of the primitive streak, with observations on the Archenteron and Germinal Layers of Rana temporaria. Quart. Journ. N. S. Vol. XXXII.

SCHANZ, F. 1887, Das Schicksal des Blastoporus bei den Amphibien. Jen. Zeitschr. Bd. XXI.

SCOTT, W. B. en H. F. OSBORNE, 1879, On some points in the early development of the common newt. Quart. Journ. Vol. XIX.

SEDGWICK, A., 1884, On the Origin of metameric Segmentation and some other morphological Questions. Quart. Journ. Vol. XXIV.

SEEMANN, J., 1907, Ueber die Entwicklung des Blastoporus bei Alytes obstetricans. Anat. Hefte, 1 Abt. Bd. 33.

SIDEBOTHAM, H., 1889, Note on the fate of the blastopore in Rana temporaria. Quart. Journ. N. S. Vol. XXIX.

SMITH, B. G., 1912, The embryology of Cryptobranchus alleghaniensis. Journ. Morph. Phil. Vol. XXIII.

SPENCER, W. B., 1885, On the fate of the blastopore in Rana temporaria. Zool. Anz. Bd. VIII.

SUMNER, F. B., 1904, A Study of Early Fish Development. Arch. Entw. Mech. Bd. XVII.

Dierkunde. — De Heer Boeke biedt eene mededeeling aan van Mevrouw C. E. Droogleever Fortuyn—van Leyden: „*Over een aal met het linkeroog in de onderkaak.*"

(Mede aangeboden door den Heer Bolk.)

Door de welwillendheid van Dr. H. C. Redeke werd mij een aal ter hand gesteld, waaraan het linkeroog op de gewone plaats ontbrak, terwijl aan de onderzijde van den kop, iets links van de mediaanlijn een oog te zien was, dat uiterlijk volkomen normaal was gebouwd.

Ten einde te onderzoeken of dit onderkaaksoog het linkeroog was en zoo ja, hoe dit oog op zoo'n vreemde plaats was komen te liggen en of het ook inwendig normaal was gebouwd, werden twee dwarse snedenseries gemaakt, één van de onderkaak en één van de rest van den kop.

Het bleek, dat inderdaad het linkeroog naar beneden was verhuisd, dat de bouw geheel normaal was en een goed ontwikkelde nervus opticus en krachtige spieren, die op de gewone wijze zich aan de sclera vasthechtten, het mogelijk en zelfs heel waarschijnlijk maken, dat het oog gefunctioneerd heeft. Deze zenuw en spieren waren afkomstig uit het bovengedeelte van den kop; de zenuw trad op de gewone manier uit de hersenen, volkomen symmetrisch met de zenuw van het rechteroog; de spieren verliepen in hun caudale deel geheel symmetrisch met de spieren van den rechterkant. Zenuw en spieren volgden echter slechts over korten afstand den normalen weg, bogen zich weldra om naar beneden en daalden af door den kop naar de onderkaak, dwars door de mondholte, langs een steel, die boven- en onderkaak met elkaar verbond en welke vlak vóór de tong gelegen was. De zenuw was omgeven door de vier rechte oogspieren; de twee schuine waren oraal van eerstgenoemd spierzenuwcomplex gelegen.

Vanuit deze steel liep het geheele complex dwars door de onderkaak naar beneden naar de plaats, waar het oog zich bevond. Behalve zenuw en spieren daalde mede af een bloedvat, dat tegelijk met de zenuw het oog binnendrong.

Van het beenige monddak, dat dit spierzenuwcomplex gepasseerd was, was het entopterygoid, dat tusschen parasphenoid en maxillare ligt, opzij en naar achteren geschoven, zoodat het niet meer aansloot bij het parasphenoid. Een spier, de musculus adductor arco-palatini was sterk verlengd en boog zich achter langs het spierzenuwcomplex om van het entopterygoid naar het parasphenoid.

Overigens was weinig verandering opgetreden in het bovengedeelte

van den kop. De plaats, waar het oog behoorde te liggen, was op een klein putje na, opgevuld met bindweefsel. De tong was verkort en de copula van de hyoidboog sterk saamgedrukt, waarschijnlijk tengevolge van de steel, die vlak vóór de tong langs liep. In de onderkaak was de musculus genio-hyoideus aan den linkerkant eveneens sterk saamgedrukt; verder was ook hier weinig verandering te bespeuren.

Wat mag wel de oorzaak zijn van dezen abnormalen groei en hoe kan de toestand zich aldus hebben ontwikkeld? Over het eerste punt moeten we volslagen in het duister blijven. Wat het tweede punt betreft, kunnen we van twee veronderstellingen uitgaan: 1° het oog is in volwassen toestand gezakt, 2° het oogblaasje is al dadelijk bij uitstulping uit de hersenen van den gewonen weg afgeweken en heeft zich op de abnormale plaats tot oog ontwikkeld. Volgens mijn meening is het eerste geval onmogelijk. De veranderingen toch in den kop teweeggebracht, wijzen er op, dat het *oog* zijn weg heeft gekozen en de op zij geschoven beenderen en spieren zich aan den abnormalen toestand, die zij bij hun ontstaan vonden, hebben aangepast. Ware het oog afgeweken, nadat de beenderen zich ontwikkeld hadden, dan zou niet het entopterygoid van zijn plaats zijn geweken, maar zou het spierzenuwcomplex langs het been zijn gegroeid. Ook is het niet waarschijnlijk, dat de tong nà zijn ontwikkeling zou zijn saamgedrukt, maar wèl, dat die zich ontwikkeld heeft, nàdat de oogsteel gevormd was en zoo in haar groei is belemmerd. Ten slotte nog is het moeilijk zich voor te stellen, hoe bij een volwassen oog de cornea zal zijn meegezakt.

Stellen we het tweede geval nl. dat het oogblaasje reeds bij zijn uitstulping uit de hersenen van zijn normalen weg is afgeweken, dan moeten we, om ons het proces goed te kunnen voorstellen, nagaan, hoe de toestand in den kop was bij het eerste ontstaan van het oog. Prof. Boeke geeft ons voor Muraena daarover waardevolle gegevens (Die Entwicklung der Muraenoiden, Petrus Camper, Dl. II 1903). Ten tijde van het uitstulpen van de oogblaasjes, stulpt zich ook het infundibulum ventraalwaarts uit. Daarvóór ligt de zoogen. voorste mesodermmassa, een samensmelting van mesoderm en entoderm volgens Boeke. Deze bestaat uit een verdikte celmassa, die aan weerskanten van de hersenen in twee vleugels uitloopt en uit een éénlagige tong, die aan de periblast grenst. In een later stadium versmelt de verdikte mesodermale massa met het ectoderm, terwijl de onderste tong zich ombuigt en samensmelt met het darmepitheel.

Het ectoderm stulpt zich naar binnen en groeit naar het ento-

derm van den darm; later ontstaat hierin de holte van den mond.

De twee laterale kopmesodermstrepen vormen oorspronkelijk een soliede massa ventraal van de uitstulpende oogblaasjes. Later ontstaan in deze strepen holten en gaan ze volgens Boeke in echte somieten over. Hebben de stelen der oogblaasjes zich gevormd, dan groeien cellen uit den wand van deze somieten tegen het kapsel van de oogblaasjes aan, ter vorming van de oogspieren. Door Boeke is waargenomen, dat de musculus obliquus superior en de musculus rectus externus uit den wand van deze somieten ontstaan. Door miss Platt is hetzelfde bij selachiers waargenomen voor alle oogspieren.

Hoe moeten we ons nu voorstellen, dat dit alles bij onze aan Muraena verwante abnormale aal is geschied? Bij het uitstulpen van het oogblaasje is dit waarschijnlijk niet zijwaarts gegroeid, maar naar voren en naar beneden. Het kwam terecht in de voorste mesoderm-massa, die het naar voren en naar beneden doorgroeide. Het passeerde de plaats, waar entoderm en ectoderm naar elkaar toe groeien en kwam ten slotte tegen het ectoderm te liggen en wel dat ectoderm, waaruit later de huid der onderkaak zich vormt. Dit reageerde er op met het vormen van een lens en cornea, wat op zichzelf zeer merkwaardig, maar niet onmogelijk is, sinds de experimenten van Spemann, Lewis e.a. hebben aangetoond, dat althans bij amphibia lenzen op nog wel andere plaatsen uit het ectoderm kunnen ontstaan dan wèl uit de gewone.

Nu blijft nog ter verklaring over, hoe de oogspieren hun weg naar het oog in de onderkaak hebben gevonden. Dit zal ook al weer op een zeer jong stadium in de ontwikkeling van het oog zijn geschied, dadelijk nà de vorming der steel van het oogblaasje. Dit laatste was toen nog weinig ter zijde geweken. De cellen, afkomstig uit den wand van de kopsomieten legden zich, evenals in een gewoon geval tegen het oogblaaskapsel aan en werden op den ongewonen tocht door het voorste en onderste gedeelte van den kop meegenomen, terwijl ze zich als in een normaal geval tot spieren ontwikkelden.

Leiden, Febr. 1917. *Anat. Kab., Histol. Afd.*

Scheikunde. — De Heer COHEN biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. J. D. JANSEN over: *„Onderscheiding van gemethyleerde nitro-anilinen en hunne nitrosaminen door middel van refractometrische bepalingen."* (II.)

(Mede aangeboden door den Heer VAN ROMBURGH.)

In een vroegere verhandeling[1]) is gewezen op het verschil in optische eigenschappen tusschen gekleurde nitro-verbindingen zooals nitro-anilinen en bijna kleurlooze zooals dinitro-benzolen. Bij eerstgenoemde stoffen vertoonden de moleculair-refracties van de isomeren groote verschillen, terwijl de moleculair-refracties van de isomeren der kleurlooze verbindingen onderling ongeveer gelijk waren.

Dit verschijnsel bleek in nauw verband te staan met de lichtabsorptie. Bij de eerste groep van verbindingen (de gekleurde) bevonden zich absorptie-banden in de nabijheid van de voor de refractie gekozen lichtsoort. De brekingsindices en in verband daarmede de moleculair-refracties dier stoffen werden dientengevolge vergroot. Deze vergrooting is voor de verschillende nitro-verbindingen niet dezelfde, daar zij samenhangt met plaats en sterkte der absorptiebanden (anomale dispersie). Bij de kleurlooze stoffen, waarvan de absorptie-banden ver buiten het zichtbare gedeelte van het spectrum gelegen zijn, viel geen of slechts een geringe verhooging der moleculair-refractie waar te nemen.

In verband hiermede wezen wij op de moleculair-refracties van het 2.5- en 2.3-dinitro-dimethyl-p. toluidine en de respectieve nitrosaminen.

	Spec. Refr.	M.-R.	V.
2.5-dinitro-dimethyl-p-toluidine	0,2730	61,4	1,8
2.3- „ „ „ „	0,2649	59,6	
2.5-dinitro-tolyl-methyl-nitrosamine	0,2391	57,4	0,5
2.3- „ „ „ „	0,2370	56,9	

Het verschil in moleculair-refractie der beide gekleurde dinitrodimethyl-p-toluidinen is, na het vervangen van een CH_3- door een NO-groep, waardoor bijna kleurlooze nitrosaminen ontstaan, zoo goed als verdwenen. Bovendien blijken de moleculair-refracties der nitro-toluidinen buitengewoon hoog te zijn. Dat dit inderdaad het geval is wordt duidelijker, als wij letten op de specifieke refracties. De moleculair-refractie wordt immers verkregen door vermenigvuldiging der specifieke refractie met het moleculairgewicht en dit is bij de nitrosaminen grooter dan bij de dimethyl-verbindingen.

Nu was het verschil in moleculair-refracties der nitro-toluidinen.

[1]) Versl. Kon. Akad. Amst. 26 Sept. 1916.

hoewel verre boven de proeffouten liggend, niet bijzonder groot en het scheen ons daarom niet zonder belang de moleculair-refracties te bepalen van nitrosaminen, welke afgeleid waren van onderling isomere nitro-verbindingen, die een groot verschil in moleculair-refractie vertoonden.

Deze laatsten werden gevonden in eenige reeds in de vroegere mededeeling vermelde dinitro-dimethyl-anilinen:

	Spec. Refr.	M.-R.	V.
3.4-dinitro-dimethyl-aniline	0,2975	62,8	6
3.6- „ „ „	0,2693	56,8	
3.4-dinitro-diaethyl-aniline	0,3060	73,1	7,8
3.6- „ „ „	0,2730	65,3	

De refractometrische waarden der respectieve nitrosaminen blijken als volgt te zijn:

	Spec. Refr.	M.-R.	V.
3.4-dinitro-phenyl-methyl-nitrosamine[1])	0,2444	55,2	2,4
3.6- „ „ „ „ [1])	0,2337	52,8	
3.4-dinitro-phenyl-aethyl-nitrosamine	0,2483	59,6	2,4
3.6- „ „ „ „	0,2380	57,2	

Even als in het bovenvermelde geval is ook hier het verschil in moleculair-refracties der isomere nitrosaminen veel kleiner dan dat der dimethyl-verbindingen. In nog veel sterker mate dan bij de dinitro-dimethyl-toluidinen zijn de moleculair-refracties der dinitro-dimethyl-anilinen verhoogd. Deze verhooging is ook hier het duidelijkst te zien bij de specifieke refracties. Deze zijn bij de nitrosaminen gelegen tusschen 0,2483 en 0,2337 en bij de dinitro-dimethyl-anilinen tusschen 0,3060 en 0,2693. In verband met deze hooge waarden der specifieke refracties van genitreerde dimethyl-anilinen en de lage, weinig uiteenloopende waarden der nitrosaminen kan mijns inziens de refractometer gebruikt worden als een nog niet toegepast, doch eenvoudig hulpmiddel om vast te stellen of wij met gemethyleerde-nitro-anilinen (toluidinen), of wel met hunne nitrosaminen te doen hebben. Juist in het geval van het 3.4-dinitro-phenyl-methyl-nitrosamine, een verbinding omtrent wier eigenaardig gedrag spoedig mededeelingen zullen volgen, geeft de refractometrische bepaling een welkome aanwijzing, daar deze stof geel van kleur (nitrosaminen zijn vrijwel kleurloos) en bovendien chemisch niet zoo gemakkelijk als nitrosamine te identificeeren is.

Utrecht, Febr. 1917. *Org. Chem. Univ. Lab.*

[1]) Deze, in dit laboratorium bereide, verbindingen zullen binnenkort tezamen met eenige andere stoffen beschreven worden.

Natuurkunde. — De Heer ZEEMAN biedt eene mededeeling aan van Mej. A. SNETHLAGE, getiteld: *„Experimenteel onderzoek naar de wetten der Brownsche beweging in een gas."*

(Mede aangeboden door den Heer LORENTZ).

1. In een vroegere mededeeling [1]) zijn door Prof. VAN DER WAALS JR. en mij bezwaren uiteengezet tegen de formule van EINSTEIN voor de Brownsche beweging. Volgens deze formule is

$$\overline{\Delta^2} = \frac{2RT}{N} B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin $\overline{\Delta^2}$ het gemiddelde kwadraat voorstelt van de uitwijking welke een „Brownsch deeltje" per secunde in een bepaalde richting verkrijgt. Verg. (1) is afgeleid in de onderstelling, dat het deeltje bij zijn beweging een wrijvingsweerstand ondervindt. B is dan ook de omgekeerde waarde van den weerstandsfactor, die optreedt, wanneer het deeltje zich onder invloed van een uitwendige kracht met constante snelheid voortbeweegt. Nu leert echter de statistische mechanica, dat een deeltje, in evenwicht met de omringende moleculen, geen kracht ondervindt, afhankelijk van zijn snelheid, dus geen gewone wrijving. Wij hebben de bewegingsvergelijking geschreven in den vorm:

$$\ddot{u} = - pu + q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en een waarde voor $\overline{\Delta^2}$ afgeleid, die wel is waar niet op groote nauwkeurigheid aanspraak maakt, maar, althans voor de Brownsche beweging in een gas, voert tot een evenredigheid van $\overline{\Delta^2}$ met $\frac{1}{a^2}$, wanneer a den straal van het deeltje voorstelt.

Volgens de formule van STOKES met de correctie van CUNNINGHAM is

$$\frac{1}{B} = 6\pi\zeta ak \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin ζ den wrijvingscoëfficient van het medium voorstelt, terwijl:

$$k = \left(1 + A\frac{\lambda}{a}\right)^{-1}$$

λ is de gemiddelde weglengte der moleculen, A is een constante, in het laboratorium van GUYE te Genève bepaald op 0.873 [2]). Verschillende onderzoekers hebben metingen van $\overline{\Delta^2}$ verricht, echter bijna altijd uit de onderlinge afwijkingen van de tijden, waarin een deeltje

[1]) Deze Verslagen **24**, 1916, p. 1272.

[2]) A. SCHIDLOF et Mlle J. MURZYNOWSKA, Arch. de Genève **4**, 40, 1915, p. 386 en 486.

een vasten afstand aflegt onder invloed van een uitwendige kracht. Het is echter de vraag of de aldus bepaalde waarden van $\overline{\Delta^2}$ dezelfde zijn als die van verg. (1). Bij de beweging onder een uitwendige kracht toch wordt de ruimteverdeeling der moleculen van het medium gestoord en beweegt dit voor een deel met het deeltje mee. De kans op een Brownsche afwijking naar boven of naar beneden zal niet meer symmetrisch zijn. Slechts één onderzoek is mij bekend, van FLETCHER [1]), waarbij geen uitwendige kracht op het deeltje werkte. De gegevens, op deze wijze verkregen, zijn echter niet zeer talrijk.

Het leek mij daarom niet overbodig nog eens een onderzoek in te stellen naar de juistheid van verg. (1). Bij mijn proeven, verricht in het Natuurkundig Laboratorium te Amsterdam (Directeur Prof. ZEEMAN), werden de uitwijkingen van een deeltje gemeten, terwijl de zwaartekracht en de electrische kracht evenwicht met elkaar maakten. Dit kan met vrij groote nauwkeurigheid worden vastgesteld; om echter van een kleine overblijvende kracht geen last te ondervinden nam ik de beweging in horizontale i. p. v. verticale richting waar.

2. Ik maakte gebruik van de bekende methode van MILLIKAN [2]) en EHRENHAFT [3]).

Wanneer v_v de valsnelheid van het deeltje met massa M voorstelt, v_v' de snelheid onder invloed van de zwaartekracht en een daarmee gelijk gerichte electrische kracht, v_s de stijgsnelheid, wanneer die electrische kracht omgekeerd wordt, dan gelden de vergelijkingen:

$$Mg = \frac{1}{B} v_v \quad \text{. . . . .} \quad (4a)$$

$$e\mathfrak{E} - Mg = \frac{1}{B} v_s \quad \text{. . . . .} \quad (4b)$$

$$e\mathfrak{E} + Mg = \frac{1}{B} v_v' \quad \text{. . . . .} \quad (4c)$$

$e\mathfrak{E}$ is de absolute waarde van de electrische kracht, e de lading van het deeltje.

Uit (4*a*) en (4*b*) volgt:

$$e\mathfrak{E} = \frac{1}{B}(v_v + v_s) \quad \text{. . . . .} \quad (5)$$

Is B bekend, dan kan e berekend worden.

---

1) H. FLETCHER, Phys. Rev. 33, 1911, p. 81.

2) R. A. MILLIKAN, Phys. Rev. 29, 1909, p. 560.

3) Zie voor een uitvoerige beschrijving: F. EHRENHAFT. Wien. Sitz. ber. **IIa** 123, 1914, p. 53.

Volgens (3) kan (4a) geschreven worden als:

$$\tfrac{4}{3}\pi a^3(\varrho - d)g = 6\pi\varsigma a k v_v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ϱ is de dichtheid van het deeltje, d die van het medium, g de versnelling der zwaartekracht.

Uit (6) kan a berekend worden.

SCHRÖDINGER [1]) toonde aan, dat:

$$v_v = \frac{L}{\overline{t_v}}$$

waarbij $\overline{t_v}$ het gemiddelde is van de tijden, welke het deeltje noodig heeft om over een afstand L te vallen. De Brownsche beweging bewerkt n. l., dat de gemeten valtijden van eenzelfde deeltje onderling eenigszins verschillen.

De meting van $\overline{\Delta^2}$ geschiedde op de volgende wijze: ik nam een groot aantal malen den tijd waar, waarin het deeltje in horizontale richting een zekeren afstand aflegt, wanneer de zwaartekracht door een electrische kracht is opgeheven. Om uit deze „uitwijkingstijden" $\overline{\Delta^2}$ te vinden vragen we ons af: wat is de kans, dat het deeltje na een tijd t voor het eerst een deelstreep op een afstand l, onverschillig aan welken kant, overschrijdt? Wij bepalen ons tot de X-beweging. Ik heb de methode gevolgd, welke SCHRÖDINGER [1]) voor een soortgelijk probleem gebruikt.

Wanneer op een tijd $t = 0$ een groot aantal N deeltjes van het punt $O_{(x=0)}$ uitgaan, zal het aantal met coördinaten tusschen x en $x + dx$ op het oogenblik t zijn:

$$N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}}\, e^{-\frac{\alpha x^2}{t}}\, dx\,.$$

De beteekenis van α zien we in, door de gemiddelde waarde van x^2 te berekenen. Dan blijkt:

$$\alpha = \frac{1}{2\,\overline{\Delta^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Noemen we de punten, die op een afstand l rechts en links van O liggen, A en B (fig 1), dan zullen we berekenen hoeveel deeltjes in den tijd t geen van beide punten overschreden hebben.



Fig. 1.

Het is gemakkelijk te zeggen, hoeveel wel over A of B zijn heengegaan. Bepalen we ons eerst alleen tot A. Wanneer een deeltje A bereikt, zijn de kansen, dat het eenigen tijd later links of rechts van A zal liggen, even groot. Het aantal deeltjes N_1, dat A bereikt, is dus gelijk aan het dubbele van het aantal rechts van A.

[1]) E. SCHRÖDINGER. Phys. Zeitschr. 16, 1915, p. 289.

$$N_1 = 2N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}}\int\limits_{l} e^{-\frac{\alpha x^2}{t}}\,dx$$

Het aantal deeltjes, dat B is voorbijgegaan, is natuurlijk even groot. Het gezochte aantal M, dat noch A noch B bereikt heeft, is echter niet gelijk aan $N - 2N_1$, want we hebben de deeltjes, die den weg OAB hebben afgelegd, meegeteld bij beide groepen N_1, evenals de deeltjes OBA. (De beteekenis van deze schrijfwijze is duidelijk.) Nu is het aantal N_2, dat een weg OAB heeft afgelegd, even groot als het aantal, dat een punt C op afstand $3l$ van O heeft bereikt. Dit is natuurlijk weer:

$$N_2 = 2N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}}\int\limits_{3l}^{\infty} e^{-\frac{\alpha x^2}{t}}\,dx\,.$$

zoo vinden we:

$$M = N - 2\,N_1 + 2\,N_2\,.$$

Nu zijn echter weer de deeltjes $OABA$ en $OBAB$ bij ieder der groepen N_2 meegeteld, enz. Op deze wijze voortgaande vinden we:

$$M = N - 2N_1 + 2N_2 - 2N_3 + \ldots\ ad\ inf. \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waarbij:

$$N_m = 2N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}}\int\limits_{(2m-1)l}^{\infty} e^{-\frac{\alpha x^2}{t}}\,dx\,.$$

Om nu de kans $P(t)\,dt$ te vinden, dat een deeltje tusschen t en $t + dt$ voor het eerst een der punten A of B overschrijdt, moeten we (8) naar t differentieeren:

$$P(t)\,dt = -\frac{1}{N}\frac{dM}{dt}\,dt\,.$$

$$M = N - 4N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}}\left\{\int\limits_{l}^{\infty} e^{-\frac{\alpha x^2}{t}}\,dx - \int\limits_{3l}^{\infty} e^{-\frac{\alpha x^2}{t}}\,dx + \int\limits_{5l}^{\infty} \ldots\ ad\ inf.\right\} \quad (9)$$

Deze reeks is convergent voor alle eindige waarden van t.

Voeren we nu een nieuwe veranderlijke y in, zoodat:

$$y^2 = \frac{\alpha x^2}{t}$$

dan wordt (9) herleid tot:

$$M = N - \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\left\{\int\limits_{l\sqrt{\frac{\alpha}{t}}}^{\infty} e^{-y^2}\,dy - \int\limits_{3l\sqrt{\frac{\alpha}{t}}}^{\infty} e^{-y^2}\,dy + \ldots\ ad\ inf.\right\}$$

dus:

$$P(t)\,dt = 2l\sqrt{\frac{a}{\pi}}\; t^{-\frac{3}{2}} \left\{ e^{-\frac{al^2}{t}} - 3e^{-\frac{9al^2}{t}} + \ldots \textit{ ad inf.} \right\} dt \quad . \quad (10)$$

Deze reeks is convergent voor alle waarden van t.

Stellen we nu:

$$\frac{al^2}{t} = z_1^{\,2} \quad , \quad \frac{9al^2}{t} = z_3^{\,2} \quad , \quad \frac{25al^2}{t} = z_5^{\,2} \textit{ enz.}$$

dan wordt:

$$P(t)\,dt = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-z_1^2}\,dz_1 - e^{-z_3^2}\,dz_3 + \ldots \textit{ ad inf.} \right\} . \quad . \quad (11)$$

Het is ons om a te doen.

Uit (10) kunnen we de gemiddelde waarde van $\frac{1}{t}$ berekenen.

We vinden daarvoor:

$$\overline{\frac{1}{t}} = \frac{1}{al^2}\left(1 - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} - \ldots \textit{ ad inf.}\right)$$

Stellen we de som van de reeks tusschen de haakjes door f voor en stellen:

$$\overline{\frac{1}{t_\Delta}} = \frac{1}{t_\Delta^*}$$

dan is

$$a = \frac{f}{l^2}\, t_\Delta^*$$

en

$$\overline{\Delta^2} = \frac{l^2}{2f}\,\frac{1}{t_\Delta^*} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

De index Δ bij t duidt aan, dat we de uitwijkingstijden bedoelen. f is met een willekeurigen graad van nauwkeurigheid te benaderen. Voor ons doel is voldoende $f = 0.916$.

De waarnemingen geven t_Δ^*, dus $\overline{\Delta^2}$ kan berekend worden.

3. Ik zal in het kort de opstelling beschrijven, welke ik voor mijn waarnemingen gebruikte.[1]) De methode van MILLIKAN en EHRENHAFT onderstel ik bekend.

De *condensator* bestond uit 2 vierkante, horizontaal gestelde, koperen plaatjes. Ik heb met 2 verschillende condensators C_1 en C_2 gewerkt van de volgende afmetingen:

---

[1]) Zie voor een uitvoerige beschrijving de binnenkort verschijnende dissertatie.

	C_1	C_2
zijde der platen	20 m.M.	14 m.M.
dikte	2 „	8 „
afstand ongeveer	3 „	2 „

C_2 is het meest gebruikt.

Ik nam waar door een horizontaal gesteld *microscoop*. Tusschen beide lenzen van het oculair was een micrometer aangebracht, bestaande uit 2 stel loodrecht op elkaar getrokken lijnen, 0.1 mM. van elkaar. De vergrooting t.o.v. dezen micrometer bedroeg 4 à 5, de totale vergrooting 80 à 100.

Voor de *verlichting* diende eerst een booglamp van 8 amp., later een zoogenaamde reductorlamp, zooals die veel door Prof. WERTHEIM wordt gebruikt. Deze lamp brandt op 24 volt en heeft een zeer klein gloeilichaam, dus een groote vlaktehelderheid. Ik werkte met een lamp van 100 kaars.

De *electrische keten* was zoo ingericht, dat ik van *eenzelfde deeltje* achter elkaar de beweging onder invloed van een constante en van een wisselende kracht kon meten. Fig. 2 geeft den electrischen stroomloop schematisch weer. Door omleggen van den dubbelpoligen omschakelaar O_1 kon ik den condensator C achtereenvolgens in de gelijkstroom- en in de wisselstroomketen inschakelen. In de fig. staan de beide condensatorplaten in verband met twee punten M en N van de regelbare weerstanden W_{1-3}, die de batterij G kortsluiten. B_2 is een wisselstroomvoltmeter. Door openen van S_1 en omleggen van O_1 werd C in verbinding gebracht met de polen der secundaire winding van den transformator T, die de 110 volt der stadsleiding op ± 2000 volt omzette. B_1 is een voltmeter van BRAUN, L een lampenweerstand; V_1 en V_2 zijn vloeistofweerstanden, S_1 en S_2 stroomverbrekers.

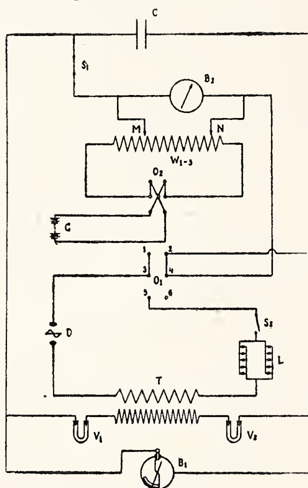


Fig. 2.

Voor de *registratie der beweging* had ik de beschikking over een MORSE-schrijftoestel, waarvan de papierrol door een 3-fazen motor

van $\frac{1}{4}$ P. K. werd voortbewogen. Als seingever diende een MORSE-sleutel. Deze apparatuur bleek door ijking met een chronometer zeer nauwkeurig[1]).

Het *verstuiven* geschiedde voor kwik volgens de methode van EHRENHAFT. Voor de andere stoffen gebruikte ik een olieverstuiver, die voor medische doeleinden in den handel is.

4. Nadat de condensator nauwkeurig horizontaal was gesteld ging ik over tot de meting van t_v, t_s, $t_{v'}$ en t_Δ van een bepaald deeltje. Dit werd boven in het gezichtsveld gebracht en op het oogenblik, dat het al vallend een der 2 horizontale deelstrepen, welke als merkstrepen dienst deden, overschreed, werd de MORSE-sleutel neergedrukt. Daarna werd het veld aangezet en op dezelfde wijze de stijgtijd t_s gemeten. Dit gebeurde een aantal malen achtereen, terwijl tevens de valtijd $t_{v'}$ werd opgeteekend, wanneer het electrische veld omgekeerd was. Vervolgens werd de zwaartekracht door een electrische kracht opgeheven en de seingever neergedrukt, telkens wanneer het deeltje in horizontale richting een volgende verticale deelstreep, links of rechts van de vorige, overschreed. De zin der uitwijking werd door verschillende teekens aangegeven.

Was voor een deeltje de waarneming afgeloopen, dan werden de afstanden der stippen op het papier uitgemeten. Deze in c.M. uitgedrukte afstanden, welke evenredig zijn met de val- en stijgtijden, geef ik door τ aan. Den herleidingsfactor van τ op t bepaalde ik telkens opnieuw met een nauwkeurigen chronometer.

Verg. (6) geldt alleen voor bolvormige deeltjes. Het volgende kenmerk gebruikte ik, om den bolvorm te onderzoeken: wanneer het deeltje in verschillende richtingen ook verschillende afmetingen heeft, zal het zich onder invloed van een electrische kracht richten en een anderen weerstand ondervinden dan bij het vallen. Nu volgt uit verg. (4*a*, *b*, *c*):

$$\frac{2v_v}{v_v'-v_s} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Is nu echter de weerstandsfactor bij het vallen $\frac{1}{B}$, bij de beweging onder een electrische kracht $\frac{p}{B}$, dan geldt niet meer verg. (13), maar in de plaats daarvan:

[1]) Dit was reeds vroeger gebleken bij proeven van Prof. ZEEMAN over een optische bepaling van de stroomsnelheid in een cilindrische buis. Deze Verslagen **24**, 1916, p. 1366.

$$\frac{2v_v}{v_v' - v_s} = p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13a)$$

Nu vond ik inderdaad bij metingen met salmiak waarden van p, die tot 50 % van de eenheid afweken. p was hierbij steeds kleiner dan 1, wat er op wijst, dat het deeltje zich met zijn lengterichting in de richting der electrische kracht plaatst.

Bij de deeltjes, waarmee ik mijn proeven verrichtte, was steeds voldoende aan verg. (13) voldaan.

Het waren: *a*. electrisch verstoven kwik (waarover later),

b. ijsolie, dichtheid 0.87,

c. kaliumkwikjodide, dichtheid 2.56.

Deze laatste stof gebruikte ik, om een straalgrootte te bereiken, welke tusschen die van de kwik- en de oliedeeltjes in ligt. De valtijd is n.l. behalve van den straal ook van de dichtheid afhankelijk (verg. 6). t_v nu mag bij de waarnemingen niet te klein zijn, daar de metingen dan te onnauwkeurig worden, en niet te groot, omdat anders de afwijkingen t.g.v. de Brownsche beweging te sterken invloed hebben en het aantal valtijden, noodig om v_v te bepalen, zeer groot wordt. Daarom kon ik van een zwaardere stof deeltjes met kleiner straal waarnemen dan van een lichtere.

Voor de meting van $\overline{\Delta^2}$ gebruikte ik alleen reeksen, waarbij minstens 100 uitwijkingstijden waren opgenomen. SCHRÖDINGER[1]) berekent de relatieve nauwkeurigheid van de uitkomsten, op een dergelijke wijze verkregen, voor een analoog probleem op $\sqrt{\frac{2}{n}}$, wanneer n het aantal elementen van de reeks voorstelt. In ons geval zal de nauwkeurigheid hier niet veel van verschillen.

Uit verg. (11) volgt de te verwachten verdeeling der uitwijkingstijden. De kans, dat t ligt tusschen t_1 en t_2 is:

$$\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{(z_1)_1}^{(z_1)_2} e^{-z_1^2}\,dz_1 - \int_{(z_3)_1}^{(z_3)_2} e^{-z_3^2}\,dz_3 + \ldots \right\} \quad (14)$$

waarbij:

$$(z_1)_1^2 = f\frac{t_\Delta^*}{t_1} \quad enz$$

De verdeeling der τ's is dezelfde.

In fig. 3*a* en fig. 3*b* laat ik voor 2 deeltjes zien, in hoeverre de waargenomen en de berekende verdeeling met elkaar in overeenstemming zijn.

---

[1]) E SCHRÖDINGER, l.c.

Fig. 3*a* heeft betrekking op het kwikdeeltje N°. 123, fig. 3*b* op het oliedeeltje N°. 158.



Fig. 3*a*.

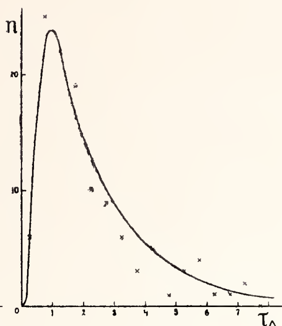


Fig. 3*b*.

De kromme lijnen heb ik verkregen, door met verg. (14), uitgaande van de gemeten waarden van τ_Δ^*, het te verwachten aantal uitwijkingstijden tusschen $\tau = 0$ en $\tau = 0.5$ te berekenen en dit af te zetten als ordinaat van het punt $\tau = 0.25$. Evenzoo geeft de ordinaat van $\tau = 0.75$ het aantal uitwijkingstijden tusschen $\tau = 0.5$ en 1.0 enz.

De kruisjes geven de overeenkomstige uit de waarnemingen gevonden aantallen.

5. Ik ga nu over tot de bespreking van de uitkomsten. Ten slotte gebruikte ik hiervoor 13 reeksen met olie, 13 met kaliumkwikjodide en 14 met kwik verkregen. Bij enkele reeksen bleek de valtijd, dus ook de straal, dezelfde, bijv. bij N°. 152 en 153. Zulke reeksen heb ik samengenomen. Alles werd omgerekend op 17° C.

Bij de meeste proeven was $l = 1.87\ 10^{-3}$, $L = 2.24\ 10^{-2}$.

Tabel I (p. 1182) geeft de uitkomsten, met olie en kaliumkwikjodide verkregen, gerangschikt volgens afdalende waarden van a.

Ik wil nu eerst trachten uit te maken, of $\frac{1}{\Delta^2}$, dus ook t_Δ^*, evenredig is met a^2, met ak of met a.

In fig. 4 (p. 1183) stellen de cirkeltjes waarnemingen met olie voor, de kruisjes waarnemingen met kaliumkwikjodide. De reeksen met kwik laten we voorloopig buiten beschouwing.

We vragen ons af, welke van de 3 lijnen, bepaald door de verg.:

TABEL I.

Olie.					Kaliumkwikjodide.				
Nummer	teeken der lading	aantal τ_Δ	$a \times 10^5$	t^*_Δ	Nummer	teeken der lading	aantal τ_Δ	$a \times 10^5$	t^*_Δ
154	+	114	5.85	4.50	204	+	104	5.99	4.06
172	−	133	5.79	4.25	200	−	167	4.13	3.42
170	−	199	4.88	3.61	189—190	+	207	3.91	2.73
163		113	4.12	2.80	198	−	127	3.41	2.79
156	−	106	4.03	2.32	194—205	− −	272	3.31	2.12
157—173	− +	222	3.86	2.87	187	−	118	2.99	1.94
161	−	111	3.35	2.17	192	+	242	2.89	2.07
152—153	+ +	202	3.28	2.51	184	−	146	2.78	1.91
169	+	139	3.19	2.37	191	−	185	2.56	1.77
171	−	202	2.97	2.35	203	−	109	2.42	1.77
158	+	121	2.87	1.88	206	+	111	2.29	1.70

$$t^*_\Delta = Ca^2 \quad \text{(15}a\text{)}$$
$$t^*_\Delta = C'ak \quad \text{(15}b\text{)}$$
$$t_\Delta = C''a \quad \text{(15}c\text{)}$$

komt het best met de waarnemingen overeen?

Het is voor de beantwoording van deze vraag noodig, dat we een punt kiezen, waar we die krommen doorheen leggen.

Een op het oog dwars door de punten getrokken kromme zal zeer dicht langs het punt P met coördinaten 4.88 en 3.61 loopen. We zullen dit als punt van uitgang kiezen en er de krommen 1, 2 en 3, overeenkomende met verg. (15 a, b en c), door leggen.

Het blijkt, dat 1 de waarnemingen zeer slecht weergeeft en het wordt niet beter, wanneer we i. p. v. P een ander punt kiezen. De

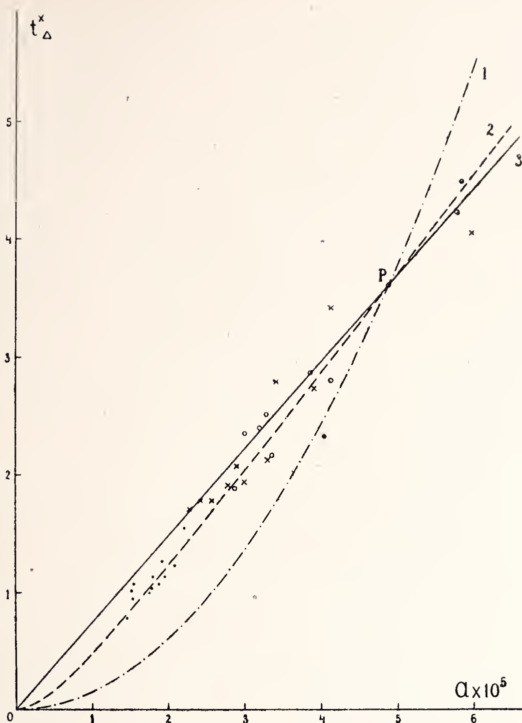


Fig. 4.

krommen 2 en 3 echter zijn in goede overeenstemming met de ligging der punten, in aanmerking genomen, dat de afwijkingen uit den aard der zaak aanzienlijk zijn, nog geheel afgezien van fouten. Het is niet met zekerheid uit te maken, of de voorkeur aan 2 of 3 gegeven moet worden; het komt mij voor, dat 2 iets beter voldoet. In elk geval wordt de onderstelling, dat $\overline{\Delta^2}$ evenredig zou zijn met $\frac{1}{a^2}$ door de proef gelogenstraft, terwijl de formule van Einstein, tenminste wat het verband tusschen $\overline{\Delta^2}$ en a betreft, wordt bevestigd.

6. We hebben hierbij nog geen gebruik gemaakt van de elec-

trisch verstoven kwikdeeltjes. Deze hebben door hun gedrag aanleiding gegeven tot de kwestie der sub-electronen. EHRENHAFT [1]) meende uit zijn proeven met deze stof te moeten opmaken: de electriciteit is niet in quanten verdeeld, of, indien wel, dan is het quant veel kleiner dan het tot nu toe aangenomen electron. Onder de bestrijders van deze stelling heeft vooral TARGONSKI [2]) getracht een verklaring van het verschijnsel te geven door aan te nemen, dat de deeltjes een veel geringere dichtheid bezitten dan die van kwik. Dit zou een te klein berekende lading ten gevolge hebben. TARGONSKI bepaalt het S. G. van de grijze laag, die na herhaalde verstuivingen den wand van het vat en de oppervlakte van het kwik bedekt, en vindt daarvoor 7.3. Hieruit leidt hij af, dat de gemiddelde dichtheid der verstoven deeltjes nog veel kleiner is. Hij bepaalt echter niet de dichtheid van de druppels zelf. In mijn proeven meen ik een middel gevonden te hebben om deze direct te bepalen, zij het ook met niet heel groote nauwkeurigheid. De deeltjes werden bij mijn waarnemingen in gewone lucht verstoven, bij die van EHRENHAFT en TARGONSKI in droge stikstof.

Met behulp van de bekende waarde van t^*_Δ kan uit fig. 4 de bijbehoorende waarde van a afgelezen worden, wanneer we aan-

TABEL II.

Nummer	teeken v. d. lading	t_V	t^*_Δ	a uit fig.	ρ ber.
146	—	3.22	1.55	2.35	9.7
94	+	3.49	1.22	1.95	12
116—120	—	3.99	1.13	1.85	12
102—137	+—	4.08	1.17	1.90	11
141	—	4.28	1.07	1.80	12
150	—	4.52	1.12	1.85	10
110	—	4.67	1.04	1.75	11
138	+	4.77	0.97	1.65	12
117	+	5.80	1.07	1.80	8.6
123	+	6.01	0.93	1.60	10
124	—	6.02	1.01	1.70	9.1
149	—	6.46	0.77	1.40	12

1) F. EHRENHAFT l. c.

2) A TARGONSKI, Arch. de Genève, **4**, 41, 1916, p. 207.

nemen, dat de kromme 2 de juiste is. Uit verg. (6) volgt dan de dichtheid. Ik heb de berekeningen uitgevoerd en in tabel II (p. 1184) de uitkomsten vereenigd. Gemiddeld blijkt de dichtheid ongeveer 11 te zijn, veel hooger dus dan volgens TARGONSKI. Waarschijnlijk vormt zich aan de oppervlakte een laagje van een lichtere stof, maar blijft het hoofdbestanddeel kwik.

In fig. 4 geven de punten de plaats aan, welke de waarnemingen in het geheel der proeven innemen, wanneer ik uitga van de onderstelling, dat de dichtheid 11 is. In fig. 5 heb ik het eerste stuk van

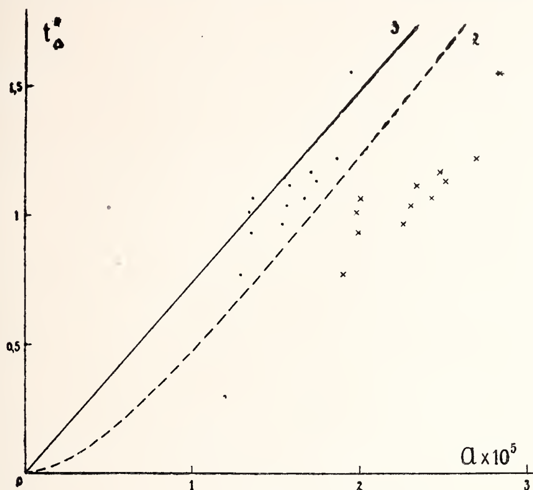


Fig. 5.

de vorige figuur vergroot, om te laten zien, waar de punten zouden komen te liggen, wanneer we met zuiver kwik te doen hadden. Dit is door punten aangegeven. De kruisjes geven de plaats voor $\varrho = 7$, wat volgens TARGONSKI nog te hoog is.

7. Om na te gaan, of de formule van EINSTEIN—CUNNINGHAM ook numeriek uitkomt, kunnen we uit kromme 2 van fig. 4 met de formule

$$\Delta^2 = \frac{1}{3\pi\varrho a k} \frac{RT}{N}$$

de waarde van N berekenen.

Ik vind daarvoor $N = 6.38\ 10^{23}$.

Onder de verschillende berekeningen van N kan die van SOMMERFELD, uit de quantentheorie der spectraallijnen, als de nauwkeurigste beschouwd worden. SOMMERFELD vindt N = 6.08 10^{23}, een waarde, die 5% van de door mij berekende verschilt.

8. Uit verg. (5) kan nu ook e berekend worden. De meting hiervan is echter niet zoo heel nauwkeurig, daar de aflezing van den voltmeter soms op eenige proc. onzeker was. In tabel III geef ik van een aantal deeltjes de uitkomsten weer. Kennen we aan ieder deeltje

TABEL III.

Olie

Nummer	lading $\times 10^{10}$	aantal electronen	$e \times 10^{10}$	$m_{ber.}$	$m_{gem.}$
156	5.4	1	5.4	0.51	1.0
157	9.7	2	4.85		
158	{4.1 {11.7	{1 {2	{4.1 {5.85	{0.58 {1.6	{1.0 {2.0
161	4.7	1	4.7	0.53	0.8
170	14.7	3	4.9		
171	4.1	1	4.1	0.61	1.1
172	19.6	4	4.9	1.3	1.9
173	9.6	2	4.8	1.1	1.3

kaliumkwikjodide

Nummer	lading $\times 10^{10}$	aantal electronen	$e \times 10^{10}$	$m_{ber.}$	$m_{gem.}$
177	9.1	2	4.55	1.3	1.7
178	17.4	4	4.35	1.8	2 2
183	27.8	6	4.6	3.0	4
184	47.2	10	4.7		
187	11.0	2	5.5		
190	39.6	9	4.4		
191	11.6	2	5.8	1.7	2
192	21.7	5	4.3		
194	10.1	2	5.05		

electrisch verstoven kwik , = 11

Nummer	lading $\times 10^{10}$	aantal electronen	$e \times 10^{10}$
116	19.6	4	4.9
117	15.7	3	5.2
124	15.7	3	5.2
137	22.5	5	4.5
138	21.0	4	5.25
146	14.4	3	4.8
149	16.2	4	4.05

het in de derde kolom genoemde aantal electronen toe, dan geeft dit met de totale lading van de tweede kolom voor het electron de getallen van de vierde kolom. Deze liggen om de waarde 4.77 10 [10] van MILLIKAN heen. De beteekenis van m bespreek ik in de volgende §

9. In § 3 heb ik meegedeeld, dat ik het deeltje ook waarnam in een wisselend veld. Het voerde dan een trillende beweging uit en gaf den indruk van een lichtend lijntje, aan de uiteinden, waar de snelheid het kleinst is, het duidelijkst, zoodat het op een halter leek. Ik zal dan ook van de halterbeweging spreken. De lengte m van dezen halter heb ik getracht te meten, door het vallende lichtlijntje te vergelijken met den afstand der deelstrepen. Dit is zeer lastig, vooral omdat ik slechts enkele seconden den tijd had. Dan moest door snel omzetten van een aantal schakelaars het constante veld weer worden aangezet, zoodat het deeltje weer steeg voor het uit het gezichtsveld verdween. De metingen zijn dan ook slechts schattingen met aanzienlijke mogelijke fout. Ik wilde trachten een antwoord te krijgen op de volgende vraag: geeft ook bij deze snelle trillende beweging de formule van STOKES-CUNNINGHAM den weerstand voldoende weer?

Dan moet de beweging voldoen aan de verg.

$$M\ddot{x} = e\mathfrak{E}_0 \sin 2\pi \frac{t}{\mathsf{T}} - 6\pi\varsigma a k\dot{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$\mathfrak{E}_0$ is de maximale veldsterkte, T de periode van den wisselstroom [1]). Het is gemakkelijk te berekenen, dat we voor de lengte van den halter uit deze verg. vinden:

$$2A = 2\frac{e\mathfrak{E}_0}{M}\left(\frac{\mathsf{T}}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{K^2\mathsf{T}^2}{4\pi^2}}}$$

waarbij $K = \frac{6\pi\varsigma a k}{M}$.

Nu is $K\frac{\mathsf{T}}{2\pi}$ groot t. o. v. 1, zoodat we kunnen schrijven:

$$2A = e\mathfrak{E}_0 \frac{\mathsf{T}}{6\pi^2\varsigma a k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

In tabel III geeft $m_{ber.}$ de uit verg. (17) berekende waarde van $2A$, uitgedrukt in veelvouden van den afstand van 2 deelstrepen; m_{gem} geeft de gemeten lengten. Het blijkt, dat $m_{ber.}$ steeds kleiner is dan m_{gem}. Dit wijst er op, dat de weerstand bij de trillende

1) Slechts bij benadering wordt de sterkte van het wisselveld door een sinusfunctie weergegeven.

beweging kleiner zou zijn dan bij de beweging onder constante kracht. De waarnemingen zijn te grof voor quantitatieve berekeningen, maar de verschillen van $m_{ber.}$ en $m_{gem.}$ zijn te groot en te zeer in één richting om aan waarnemingsfouten te worden toegeschreven.

Amsterdam. *Natuurkundig Laboratorium.*

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. 151*d* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: J. E. VERSCHAFFELT: „*De inwendige wrijving van vloeibaar gemaakte gassen. VI. Waarnemingen omtrent de schommelende draaiingsbeweging van een bol in een wrijvende vloeistof bij eindige uitwijkingshoeken en toepassing der verkregen uitkomsten op de bepaling van wrijvingscoefficiënten*".

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

1. In een vorige mededeeling[1]) werd de theorie ontwikkeld van de schommelende wenteling van een bol in een wrijvende vloeistof in de onderstelling, dat de draaiing met zulke geringe hoeksnelheden geschiedt, dat van de werking der centrifugaalkracht kan worden afgezien. Deze vereenvoudiging komt hierop neer, dat men bij de integratie der algemeene differentiaal-vergelijkingen de termen verwaarloost, die t. o. v. de oneindig klein onderstelde snelheid van hoogere orde zijn dan de eerste[2]). Uit een theoretisch oogpunt is dit volmaakt geoorloofd, maar, waar het geldt de uitkomsten der theorie te gebruiken bij de experimenteele bepaling van wrijvingscoefficiënten van vloeistoffen (of gassen), is het noodig te weten, welke voor een bepaalde vloeistof de grens van snelheid is (beter van amplitude, welke grens nog van den schommeltijd kan afhangen) waarboven de theorie praktisch niet meer van toepassing is; hoe groot dus bij een bepaalde amplitude de fout is, die door de vereenvoudiging wordt veroorzaakt.

De uitkomsten der benaderde theorie werden gebruikt bij de bepaling van de wrijvingscoefficiënten van mengsels van zuurstof en stikstof[3]). De snelheden die bij deze proeven voorkwamen $\left(\text{hoogstens } 0{,}04 \frac{\text{c.M.}}{\text{sec.}}\right)$, zijn voor het gevoel werkelijk klein, en dat de afwijking van de vereenvoudigde theorie bij die proeven wel niet groot zou wezen,

[1]) Meded. n⁰. 148*b* Zittingsverslag van 24 Nov. 1915.

[2]) Zie b.v. KIRCHHOFF, Vorlesungen über mathematische Physik, n⁰. 26.

[3]) Meded. n⁰. 149*b*. V. Zittingsversl. 25 Maart 1916.

scheen hieruit te blijken, dat over een betrekkelijk ruim gebied van uitwijkingshoeken ($4^\circ - 1\frac{1}{2}^\circ$) het logarithmisch decrement δ der amplitudes op zeer weinig na van de amplitude zelf onafhankelijk bleek te zijn, terwijl toch bij een afwijking van de theorie het tegenovergestelde verwacht kon worden. Bovendien bleek de methode, op water toegepast, bevredigende uitkomsten op te leveren [1]).

Een volmaakt betrouwbare aanwijzing daarvoor, dat de snelheden werkelijk als klein beschouwd mochten worden, bestond echter niet. Eerder zou men uit de orde van grootte der in de differentiaalvergelijkingen verwaarloosde termen besluiten, dat dit niet het geval was. Immers, bij ontwikkeling blijkt, dat het verwaarloozen van de termen van de tweede orde $\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \text{ enz.}\right)$ tegenover de termen van de eerste, zooals $\frac{\partial u}{\partial t}$, neerkomt op het verwaarloozen van ω^2 tegenover $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ (ω zijnde de hoeksnelheid van het wentelende lichaam), en dit leidt tot de eenvoudige conclusie, dat de benaderde theorie alleen dan toepasselijk is, wanneer de uitwijkingshoek α een klein breukdeel van een radians blijft. Waar nu bij de proeven die hoek de waarde 0,07 bereikte, werd blijkbaar aan die voorwaarde niet voldaan, althans niet in die mate, dat men op een behoorlijke nauwkeurigheid der uitkomsten kon rekenen; daartoe was het noodig geweest, nog tot wel honderd maal kleinere amplitudes af te dalen. Intusschen is dit slechts een zeer ruwe schatting, welke niet uitsluit, dat de nauwkeurigheid der uitkomsten toch nog hooger was, dan men op grond hiervan zou verwachten, omdat geen rekening gehouden wordt met numerieke factoren, die alleen een verdere benadering bij de theoretische behandeling van het vraagstuk geven kan [2]). Daarom kwam het

---

1) Zie b.v. meded. n⁰. 148b. § 16.

2) Verg. G. ZEMPLÉN, Ann. d. Physik, 38, 84, 1912.

Het hier gevonden criterium geldt bovendien alleen in het grensgeval, waar de schommeltijd zeer klein is. In dat geval is nl. (zie meded. n⁰. 148b, § 17) $\omega = \omega_R \frac{R^2}{r^2} e^{-b(r-R)}$, waarin $b = \sqrt{\frac{\mu}{\eta} k}$ een groot getal is, zoodat $\frac{\partial \omega}{\partial r} = -b\omega$ en $\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = -b \frac{\partial \omega}{\partial r} = b^2 \omega$, waaruit volgt dat $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ klein is t.o.v. $\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}$ en $\frac{\mu}{\eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = k\omega = \frac{\partial \omega}{\partial t}$, zoodat werkelijk de term $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ de orde van grootte aangeeft van de termen der eerste orde. Geschiedt daarentegen de schommelende beweging zeer langzaam (b zeer klein; zie meded. n⁰. 148b, § 18), dan is $\omega = \omega_R \frac{R^3}{r^3} \frac{R'^3 \quad r^3}{R'^3 - R^3}$, zoodat $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}\right)_R = -\left(\frac{4}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r}\right) = 12 \frac{\omega_R}{R^2} \frac{R'^3}{R'^3 - R^3}$, terwijl de term met $\frac{\partial \omega}{\partial t}$

gewenscht voor een nader onderzoek te doen naar de afhankelijkheid van δ van de amplitude. Dit onderzoek geschiedde én experimenteel, én theoretisch; hier worden de uitkomsten van het experimenteel onderzoek medegedeeld.

2. Ten einde langs experimenteelen weg uit te maken, of bij de vroeger beschreven proeven de snelheden als oneindig klein te beschouwen waren, d. w. z. of binnen de grenzen der waarnemingsfouten de schommeling van den bol reeds bij die amplitudes een gedempt enkelvoudige was, met een van de amplitude onafhankelijk logarithmisch decrement, werden in de eerste plaats de grenzen der amplitudes zoover uitgebreid, als mogelijk was bij de gebruikte inrichting voor spiegelaflezing. De schaal had 60 c.M. lengte, en stond op 153.7 c.M. afstand van de as van het schommelende stelsel, zoodat naar rechts en naar links uitwijkingen tot een maximale amplitude van $5^1/_2{}^\circ$ (0.1 rad.) ongeveer waargenomen konden worden. De volstrekte nauwkeurigheid der aflezingen was 0.00003 rad. (0.1 m.M. op de schaal); amplitudes van 0.°2 konden dus nog met een betrekkelijke nauwkeurigheid van $1^0/_0$ worden waargenomen; die nauwkeurigheid werd overigens nog aanzienlijk verhoogd door het waarnemen van alle uitslagen naar rechts en naar links.

De gebruikte toestel was dezelfde als in meded. n°. 149b werd beschreven en benut bij de bepaling van wrijvingscoefficiënten van mengsels van zuurstof en stikstof. Het schommelende stelsel met bol werd gewoonlijk belast met den aluminiumcylinder, een enkele maal met den koperen cylinder. In het glazen vat werden verschillende vloeistoffen gebracht, in de eerste plaats water, daarna vloeistoffen

---

praktisch nul is; in dat geval moet ω^2 klein zijn t.o.v. $\frac{\eta}{\mu}\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}$, zoodat we, op een numerieke factor na, het criterium van LAMB en RAYLEIGH (zie LAMB, Hydrodynamics, 1906, p. 547), geldende voor een gelijkmatige wenteling, terugvinden, nl. $\omega_R R \ll \frac{uR}{\eta}$ (het teeken $\ll$ uitdrukkende zeer veel kleiner dan). Terwijl dus voor zeer vlugge schommelingen gold $a < 1$. geldt voor zeer langzame schommelingen $a \ll \frac{12}{2\pi}\frac{\eta T}{\mu R^2}\frac{R'^3}{R'^3 - R^3}$, en deze grens kan onbepaald stijgen met toenemende T. In 't algemeen (b noch bijzonder groot, noch bijzonder klein), hebben de drie termen $\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}$, $\frac{\partial\omega}{\partial r}$ en $\frac{\mu}{\eta}\frac{\partial\omega}{\partial t}$ dezelfde orde van grootte en dan geldt zeker een veel ingewikkelder criterium, waarschijnlijk uitdrukkende dat a zeer klein moet zijn t.o.v. een getal, dat van de waarde van bR afhangt, en dat, voor zoover ik heb kunnen nagaan, des te grooter is, naarmate bR kleiner is, d.w.z. naarmate η, δ en T grooter zijn en μ en R kleiner (zie meded. n°. 148b, form. 20).

met geringere wrijving: benzol, zwavelkoolstof, ether[1]) en vloeibare lucht, en ook een mengsel van water en glycerine, om een voorbeeld te hebben van een vloeistof met grootere inwendige wrijving.

In tegenstelling met wat tusschen de vroeger gekozen grenzen het geval was (verg. meded. n°. 149*b*, IV § 2 en V § 1), vertoonde bij de nu gekozen wijdere grenzen de lijn, die $log\ a$ als functie van t voorstelt, vooral tusschen 20 en 30 c.M. een merkbare kromming. Daaruit schijnt dus reeds te volgen, dat de vroeger gebruikte uitwijkingshoeken toevalligerwijze op de grens lagen van het gebied, waar ze praktisch als oneindig konden worden beschouwd.

3. De schommeling van den bol was dus niet een zuiver harmonisch gedempte, en nu werd vermoed [2]), dat de beweging een samengesteld gedempt harmonische zou zijn, voor te stellen door het reëele deel van een reeks:

$$a = a_1\, e^{kt} + a_3\, e^{3kt} + a_5\, e^{5kt} + \ldots {}^{3}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin $k = k' + k''i$ met $k'' = \frac{2\pi}{T}$ en $k' = -\frac{\delta}{T}$ (zie meded. n° 148 *b*, § 4), zoodat de achtereenvolgende termen voorstellen zuiver harmonische gedempte schommelingen met 3, 5 enz. maal grootere frequentie dan de hoofdschommeling en 3, 5 enz. maal snellere demping [4]).

Dit bleek nu werkelijk het geval te zijn, voor zoover dat ten minste uit de waarnemingen der maximale amplituden besloten kan worden [5]). Binnen de grenzen van nauwkeurigheid der waar-

---

[1]) De gebruikte benzol, zwavelkoolstof en ether waren handelsvloeistoffen; voor het hier beoogde doel was het niet noodig met volmaakt zuivere vloeistoffen te werken.

[2]) Dit vermoeden werd door de mathematische behandeling van het vraagstuk bevestigd (zie volgende med).

[3]) Door een geschikte keuze van den oorsprong der tijden kan de coëfficient a_1 reëel worden gemaakt, maar wegens mogelijke phaseverschillen zijn dan de andere coëfficienten niet noodzakelijk reëel.

[4]) Om redenen van symmetrie moeten termen met even machten van k in deze reeks ontbreken: immers, er kan geen verschil gemaakt worden tusschen uitwijkingen naar rechts of naar links, zoodat een phaseverandering met π (vermeerdering van kt met $(2n+1)\pi$) alle termen van teeken moet laten veranderen.

[5]) Men bewijst nl. dat, wanneer de schommelende beweging aan de verg. (1) voldoet, ook de maximale amplituden door een dergelijke formule zijn voor te stellen, nu met reëele k (het reëele deel der complexe k) en met reëele a's (deze echter niet de reëele deelen der complexe a's). Zijn omgekeerd de maximale amplitudes door een formule (1) voor te stellen, dan zal dat waarschijnlijk ook wel het geval zijn voor de geheele beweging.

nemingen werd gevonden, dat de maximale uitwijkingen konden worden voorgesteld als volgt [1]):

a. Water, bij 9,°6 C. ($\mu = 1{,}000$, $\eta = 0{,}01319$ [2])

[1]) Hierin mag wel het bewijs worden gezien, dat werkelijk binnen de nu gekozen amplitudegrenzen de grens werd bereikt, waarbeneden de snelheden praktisch als oneindig klein kunnen worden beschouwd. Men kon misschien daartegen inbrengen dat het van zelf spreekt, dat men met zoo'n reeksontwikkeling een *beperkt* gedeelte van de lijn α, t kan voorstellen, en dat de nauwkeurigheid, waarmede dat geschiedt, alleen afhangt van het aantal der ingevoerde termen; ook met een algebraïsche formule zou dit immers het geval zijn. Daarop mag geantwoord worden, dat de formule (1) niet a priori met een bepaald aantal termen werd aangenomen, om dan op de gebruikelijke wijze de coëfficienten dier termen te bepalen: uit de berekeningswijze bleek werkelijk de *noodzakelijkheid* van het gebruik dezer formule. De berekeningswijze was nl. de volgende: In een graphische voorstelling was de lijn $log\ \alpha, t$ vrijwel een rechte lijn, die alleen aan den kant der groote amplitudes een duidelijke kromming vertoonde; uit het stuk, dat bij lage α's behoorde, kon dus met vrij groote nauwkeurigheid een eerste term α_1 worden bepaald. Werd nu het verschil $\alpha - \alpha_1$ opgemaakt, dan bleek dat, wanneer de lijn $log\ (\alpha - \alpha_1), t$ in teekening werd gebracht, deze bij de laagste grens, waar ze nog betrouwbaar was, duidelijk een driemaal grooteren richtingscoëfficient vertoonde dan de lijn $log\ \alpha, t$. Hieruit werd nu een eerste benaderde waarde voor α_3 berekend, welke van α werd afgetrokken; daardoor werd de lijn $log\ (\alpha - \alpha_3), t$ over een grootere uitgestrektheid recht, dan de lijn $log\ \alpha, t$, en zoo kon een nauwkeurigere waarde worden gevonden voor α_1 en dus ook voor α_3. Werd vervolgens $log\ (\alpha - \alpha_1 - \alpha_3), t$ in teekening gebracht, dan bleek deze lijn een vijfmaal grooteren richtingscoëfficient te hebben dan $log\ \alpha, t$, enz.

Hierbij dient nog opgemerkt te worden, dat de tijdsintervallen tusschen de oogenblikken waarop twee opeenvolgende maximale amplituden werden bereikt $\left(\frac{d\alpha}{dt} = 0\right)$, alle gelijk $\frac{T}{2}$ werden genomen; dit nu is niet heelemaal juist: een mathematisch onderzoek leert dat het oogenblik, waarop $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ is, niet juist ligt midden tusschen de oogenblikken waarop $\alpha = 0$, en dat de verschuiving der maxima van de amplitude afhangt. Intusschen viel bij deze proeven (waar de demping betrekkelijk gering was) de verschuiving der maxima binnen de grenzen der waarnemingsfouten. Men kan het ook zoo voorstellen, dat de uitwijkingen werden waargenomen op de tijdstippen $(2n+1)\frac{T}{2}$ (die uitwijkingen zijn ook door een formule zooals (1) voor te stellen) en deze uitwijkingen weken niet merkbaar van de maximale uitwijkingen af.

[2]) De wrijvingscoëfficienten zijn berekend uit de gegevens $T, \delta, T_0 = 20{,}65$ bij gewone temperatuur en 20,61 in vloeibare lucht, $K = 573{,}5$ bij gewone temperatuur en 571,0 in vloeibare lucht (zie Meded. N°. 149*b*), in aanmerking genomen dat de dampkringslucht zelf, door wrijving op het niet in de vloeistof gedompelde deel van het stelsel (hoofdzakelijk op den cylinder), en de inwendige wrijving van den draad samen een decrement gaven $\delta_2 + \delta_3 = 0{,}00606$ (zie verder).

$$a = 0{,}01\,x + 6{,}73 \,.\, 10^{-6}\, x^3 - 3{,}06 \,.\, 10^{-8}\, x^5,$$ [1])

waarin $x = e^{-\frac{\delta t}{T}}$, met $T = 20{,}95$ en $\delta = 0{,}1272$.

b. Benzol, bij 9,°8 ($\mu = 0{,}890$, $\eta = 0{,}00773$)

$$a = 0{,}01\,x + 7{,}83 \,.\, 10^{-6}\, x^3 - 3{,}00 \,.\, 10^{-8}\, x^5 ,$$

met $T = 20{,}86$ en $\delta = 0{,}0898$.

c. Zwavelkoolstof, bij 10°,8 ($\mu = 1{,}277$, $\eta = 0{,}003839$)

$$a = 0{,}1\,x + 18{,}57 \,.\, 10^{-6}\, x^3 - 13{,}65 \,.\, 10^{-8}\, x^5 + 4{,}0 \,.\, 10^{-10}\, x^7,$$

met $T = 20{,}83$ en $\delta = 0{,}0705$.

d. Ether, bij 11°,2 ($\mu = 0{,}725$, $\eta = 0{,}002785$)

$$a = 0{,}01\,x + 19{,}95 \,.\, 10^{-6}\, x^3 - 18{,}66 \,.\, 10^{-8}\, x^5 + 8{,}5 \,.\, 10^{-10}\, x^7,$$

met $T = 20{,}76$ en $\delta = 0{,}04840$.

e. Vloeibare lucht, bij 80°,8 $K = -192°{,}3$ C. ($\mu = 0{,}956$, $\eta = 0{,}001718$)

$$a = 0{,}01\,x + 15{,}82 \,.\, 10^{-6}\, x^3 - 12{,}88 \,.\, 10^{-8}\, x^5 + 5{,}3 \,.\, 10^{-10}\, x^7,$$

met $T = 20{,}72$ en $\delta = 0{,}04194$.

De uitwijkingshoeken zijn uitgedrukt in radianten. De formules zijn zoodanig opgesteld, dat de tijd wordt berekend van af het oogenblik, waarop $a = 0{,}01$ ($x = 1$; schaaluitwijking 3,074; bij zulke kleine amplitudes is de invloed der hoogere termen praktisch nul); zij volgen uit waarnemingen tusschen de grenzen $a = 0{,}1$ en $a = 0{,}003$.

Uit de absolute nauwkeurigheid der schaalaflezingen (zie boven) volgt, dat de invloed der hoogere termen slechts merkbaar begint te worden voor water bij $x = 1{,}6$ of $a = 0{,}016$, voor benzol reeds een weinig lager, voor zwavelkoolstof en ether bij $a = 0{,}011$ en voor vloeibare lucht bij $a = 0{,}012$. Uit deze enkele gegevens volgt dus, zooals trouwens werd verwacht (zie § 1, noot), dat voor een zelfde schommelende lichaam de praktische grens van oneindige

---

[1]) De coëfficienten in deze formules zijn natuurlijk niet zuiver diegene die voor het geval van een enkel bolvormig lichaam zouden gelden; alleen in zeer ruwe benadering zal dit het geval zijn: zij hebben immers betrekking op het geheele schommelende systeem, waarvan alleen de bol in de vloeistof is gedompeld. Bovendien ondergaan de coëfficienten ook nog (onrechtstreeks) den invloed van de inwendige wrijving van den draad, doordat k ook van die inwendige wrijving afhangt (rechtstreeks geeft die inwendige wrijving van den draad volgens GUYE c.s. geen hoogere termen dan den eersten; zie b.v. Arch. de Genève, (4), 26, 136 en 263, 1908). Het is overigens niet mogelijk uit die formules diegene af te leiden, die voor een enkelen bol zouden gelden omdat er geen additiviteit bestaat der drie wrijvingen in hoogere benadering dan de eerste (zie Meded. N°. 149*b*, IV, 5); het is duidelijk dat, wanneer men het stelsel aan den invloed der drie wrijvingen afzonderlijk kon onderwerpen, men dan formules krijgen zou met verschillende exponenten k, en dat deze formules niet tot één enkele, met één bepaalde k waarde te vereenigen zouden zijn.

kleinheid der snelheden in 't algemeen des te lager ligt, naarmate de inwendige wrijving der vloeistof kleiner is.

Om deze uitkomst nog door een nieuwe proef te bevestigen, bij een vloeistof met grootere wrijving, werd een waarneming gedaan bij een mengsel van water en glycerine:

f. Mengsel van water en glycerine, 11° C. ($\mu = 1,087$, $\eta = 0,02825$)

$$\alpha = 0,01\, x + 3,27 \,.\, 10^{-6}\, x^3 - 1,01 \,.\, 10^{-8} \,.\, x^5,$$

met $T = 21,10$ en $\delta = 0,2623$. De afwijking begint hier dus werkelijk hooger dan bij zuiver water, nl. bij $\alpha = 0,021$.

Bij het berekenen der wrijvingscoëfficienten moest, zooals vroeger, (meded. n°. 149*b*, V) rekening gehouden worden met de wrijving van lucht op de niet ondergedompelde deelen van den toestel en met de inwendige wrijving van den draad. Daartoe werd een proef genomen in gewone lucht, maar zonder den bol [1]) en met een koperen cylinder in plaats van den cylinder van aluminium (zie meded. n°. 149*b*); ook bij deze proef werden de waarnemingen uitgestrekt tusschen dezelfde wijde grenzen als bij de vorige.

g. Lucht, $t = 13°,4$, $p = 765$ m.M., $T = T_0 = 20,65$, $\delta = 0,00606$,

$$\alpha = 0,01\, x + 98,8 \,.\, 10^{-6}\, x^3 - 16,8 \,.\, 10^{-8}\, x^5.$$

Hier blijkt dus de 2e term een zeer grooten invloed te hebben, die zich reeds laat gelden van af $\alpha = 0,006$.

Ten slotte werd nog een proef genomen, om den invloed waar te nemen van een verlenging van den schommeltijd door verhooging van het traagheidsmoment. Daartoe werd de koperen cylinder behouden in plaats van den aluminiumcylinder, waardoor het schommelende stelsel, na aanschroeven van den bol, het traagheidsmoment 945 C.G.S. verkreeg ($T_0 = 26,70$). Daarmede werd gevonden:

h. Water, bij 9°,8 ($\mu = 1,000$, $\eta = 0,01310$)

$$\alpha = 0,01\, x + 8,50 \,.\, 10^{-6}\, x^3 - 3,24 \,.\, 10^{-8}\, x^5,$$

met $T = 26,96$ en $\delta = 0,0924$. De afwijking is dus wat grooter dan bij de eerste proef met water, niettegenstaande de verhooging van T; δ is echter kleiner geworden, wat voor gelijke T met een vermindering van η overeenkomt.

5. Wegens de praktische bezwaren daaraan verbonden werd niet beproefd de waarnemingen uit te strekken tot uitwijkingshoeken veel kleiner dan 0,01 rad. [2]) Wel werden nog eenige waarnemingen

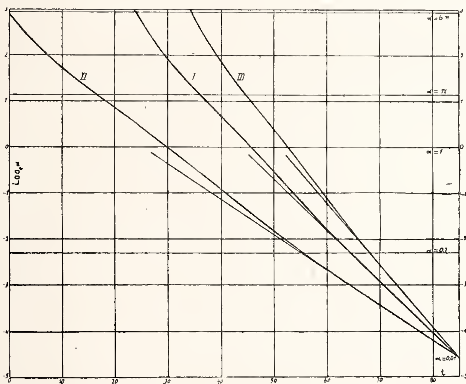
---

[1]) Deze proef is dus niet vergelijkbaar met de vorige, waarbij de wrijving hoofdzakelijk op den bol plaats had.

[2]) Om tot tienmaal kleiner hoeken af te dalen had men de afleesinrichting op tienmaal grooteren afstand (d. i. 15 M.) van het schommelende stelsel moeten brengen.

gedaan, waarbij de uitwijkingen zeer groot waren (tot 6π toe[1]). Daartoe werd op het koperen buisje, dat onderaan het glazen buisje B_1 van het schommelende stelsel is gesoldeerd (zie Meded. N°. 149*b* IV, 2), een metalen schijfje (van aluminium; straal $=3$ c.M.; massa $=$ 23,7 gr.; traagheidsmoment $=144$) geschoven, met een cylindervormigen koperen rand, waarvan het buitenste cylindervlak een schaalverdeeling droeg in graden. Op deze schaalverdeeling werd een kijkertje gericht, waarmede 0°.1 kon worden afgelezen (geschat).

Aan de houten plank, die de steenen zuil bekleedt, werd op de hoogte van den stalen stift *St*, die den bol draagt, een tangetje bevestigd, waarmede de stift kon worden gegrepen, en zoo het schommelende stelsel na draaiing over een bepaalden hoek (ongeveer drie volle omwentelingen) vastgehouden. Door verwijdering van de veer, die het tangetje gesloten hield, werd het schommelende stelsel vrijgemaakt, en de amplituden der schommelingen, door dit stelsel uitgevoerd, werden waargenomen, eerst tot op 5° ongeveer op de verdeelde schijf, daarna zooals vroeger op de glazen schaal der spiegelafleesinrichting. De vloeistof bevond zich in een vat, geplaatst op een tafeltje, dat op den steenen pijler van den toestel rustte.



De uitkomsten van deze waarnemingen zijn graphisch voorgesteld in de bijgaande figuur. Daarin ziet men drie lijnen, die voorstellen,

[1] Dit was nu wel op zichzelf niet zoo'n groot bezwaar geweest, maar aan de onwrikbaarheid der opstelling zouden daardoor veel hoogere eischen zijn gesteld, want nu reeds niettegenstaande toestel en afleesinrichting op in den grond gemetselde pijlers rustten (zie meded. n°. 149*b*, IV, 2), waren de trillingen, door het voorbijgaan van voertuigen veroorzaakt, dikwijls hinderlijk.

hoe bij drie proeven de logarithme der amplitude met den tijd afnam. Als ordinaten werden uitgezet $log_e\, a$, als abscissen de tijd, uitgedrukt in schommeltijden; de richtingscoëfficient der asymptoot, eveneens in de figuur geteekend, geeft met tegengesteld teeken het logarithmisch decrement δ te kennen. Die drie lijnen zijn zóó ten opzichte van elkaar verschoven, dat ze elkander snijden in één punt, overeenkomende met de amplitude 0,01 rad.

De drie lijnen hebben betrekking:

I. op water bij 10°,0 (aluminiumcylinder + schijf, $K = 717$, $T_0 = 23{,}12$, $T = 23{,}42$, $\delta = 0{,}1118$),

II. op benzol bij 11°,0 ($K = 717$, $T = 23{,}32$, $\delta = 0{,}0771$),

III. op water bij 10°,2 (zonder aluminiumcylinder, $K = 544$ $T_0 = 20{,}14$, $T = 20{,}35$, $\delta = 0{,}1355$).

Alle drie vertoonen hetzelfde karakter: met toenemende amplitude neemt het logarithmische decrement eerst toe, dan weer af en daarna weer toe, in overeenstemming met de teekens der coëfficienten a_3, a_5 en a_7 (§ 4). [1])

6. Uit het voorgaande blijkt, dat men, om waar te nemen in omstandigheden, waarin het logarithmisch decrement der schommelingen binnen de grenzen der waarnemingsfouten onafhankelijk wordt van de amplitude, zou moeten afdalen tot amplituden, die ongeveer tien maal kleiner zijn dan de tot nog toe waargenomene [2]), waaraan de zooeven genoemde bezwaren verbonden zijn.

Het is echter niet noodig in die richting de oplossing te zoeken, daar het mogelijk gebleken is, door een betrouwbare extrapolatie van uit een ruim gekozen gebied, dat even boven de grens van praktisch oneindige kleinheid der schommelingen is gelegen, met voldoende nauwkeurigheid het logarithmisch decrement te vinden van werkelijk oneindig kleine schommelingen. Aldus wordt dan de methode van waarneming der demping van de schommelingen een bruikbare methode ter bepaling van wrijvingscoëfficienten van vloeistoffen.

En met behulp van de verkregen gegevens is het nu ook mogelijk de waarden die vroeger, in meded. n°. 149*b*, V, voor de wrijvingscoëfficienten van vloeibare mengsels van zuurstof en stikstof werden

---

[1]) Wegens de geringe nauwkeurigheid der waarnemingen in het gebied van $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ tot $\alpha = 0.1$ was de analyse der lijnen, zooals dat in § 4 geschiedde, niet goed mogelijk.

[2]) Tenzij zeer groote schommeltijden werden gekozen (zie § 1), wat dan evenwel, om matige decrementen te verkrijgen, een zeer groot traagheidsmoment zou vereischen (zie meded. n°. 148*c*). Deze omstandigheid en ook de bijzonder lange tijd, die iedere bepaling dan zou vergen, maken een grooten schommeltijd weinig geschikt.

gevonden, te corrigeeren. Niettegenstaande de tusschen de grenzen $\alpha = 0{,}07$ en $\alpha = 0{,}02$ waargenomen amplitudes een nagenoeg constant logarithmisch decrement vertoonden, leert de voor vloeibare lucht gevonden formule (e), dat de gemiddelde waarde van het logarithmisch decrement tusschen die grenzen (d.w.z. de waarde van $T\frac{d \log \alpha}{dt}$ bij $\alpha = 0{,}05$ ongeveer, of $x = 5$) gelijk is aan $1{,}046\,\delta_0$. δ_0 zijnde de waarde voor oneindig kleine schommelingen. Zoo volgt eveneens uit de voor gasvormige lucht gevonden formule (g), dat voor $\alpha = 0{,}06$ (de gemiddelde amplitude waarbij het logarithmisch decrement der gasphase in de proeven van meded. 149b werd bepaald), $T\frac{d \log \alpha}{dt} = 1{,}47\,\delta_0$. We vinden aldus, voor de mengsels met kookpunt $\tau°$:

$\tau = 79.57$	$\delta = 0.03802$	$\delta_2 + \delta_3 = 0.00310$	$\mu = 0.909$	$\eta = 0.001658$
82.34	0.04137	,,	1.003	0.001806
77.91	0.03632	,,	1.841	0.001615
89,62	0.04431	,,	1.143	0.001858

met een relatieve nauwkeurigheid die op $\frac{1}{1000}$ geschat kan worden.

8. Bij graphische voorstelling der uitwijkingen naar rechts en naar links, in de proeven van §§ 4 en 5 waargenomen, bleken de twee lijnen, waarop de twee reeksen van punten lagen, niet volkomen symmetrisch te zijn t.o.v. van een rechte lijn $\alpha =$ const.: de diameter van dit stelsel van twee lijnen was zwak gekromd en bereikte asymptotisch het nulpunt der uitwijkingen. Dit kan aldus worden geinterpreteerd, dat dit nulpunt (α_0) zich gedurende de proef verplaatst; die verplaatsing was echter zwak: 1 mM ongeveer op de schaal bij de proeven van § 4, hoogstens 1° bij die van § 5.

Aanvankelijk werd die verplaatsing beschouwd als een gevolg van een elastische nawerking van den draad, die immers bij het begin der proef over een zekeren hoek werd gewrongen; maar toen het verschijnsel zeer regelmatig bleek te zijn, onafhankelijk van de oorspronkelijke wringing van den draad, en ook het terugkruipen tot den evenwichtstoestand langzamer bleek te geschieden bij vloeistoffen met geringere wrijving, werd gedacht aan een verschijnsel in de vloeistof. De mogelijkheid werd nl. overwogen, of niet, door het *in beweging brengen* van het schommelende stelsel, de vloeistof een éénzijdige wentelende beweging kreeg, welke den bol meesleepte, en die natuurlijk gedempt moest zijn, zoodat de bol langzamerhand tot den evenwichtsstand terug moest komen. Bij berekening bleek echter, dat die invloed zich na zulk een langen tijd niet meer kon

laten gelden.[1]) Bovendien bleek die verandering van α_0 steeds in denzelfden zin te geschieden, onafhankelijk van den zin der allereerste draaiing van het stelsel; ook was α_0 bij alle vloeistoffen dezelfde functie der amplitude, nl. evenredig met het vierkant der amplitude: $\alpha_0 = 0{,}04\,\alpha^2$, d.w.z. het logarithmisch decrement van α_0 was het dubbele van dat van α.

Daaruit werd besloten, dat die nulpuntsverplaatsing slechts schijnbaar was, en men hier in werkelijkheid waarnam den invloed van een kleinen term $\alpha_2 = a_2 e^{2kt}$ in form. (1), welke term echter niet van de vloeistofbeweging komen kon (aan een asymmetrie van het schommelende stelsel kon niet worden gedacht, en bovendien was de α_2 onafhankelijk van de vloeistof) maar vermoedelijk aan een asymmetrie in den draad moest worden toegeschreven.[2])

---

[1]) De demping van deze vloeistofbeweging laat zich gemakkelijk berekenen. De beweging moet een aperiodische zijn: ze is dus voorgesteld door form. (56) van meded. 148d; is nu de bol praktisch in rust, zoo moet, opdat u niet nul zou wezen, $D = 0$ zijn, waaruit volgt:

$$tg\, b''(R'-R) = \frac{b''(R'-R)}{1+b''^2 R'R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

een vergelijking die een oneindig aantal oplossingen heeft voor b'', dus voor k, maar waarvan we alleen de kleinste oplossing, die niet nul is, behoeven te beschouwen. Nu is in ons geval $R'=3$, $R=2$; de oplossing is dus $b''=3,2$, dus $-k=10\frac{\eta}{\mu}$.

In 't geval van een hollen bol ($R'=0$, zie meded. n⁰. 148b, § 21) wordt verg. (2) $tg\, b''R = b''R$, waaruit $b''R = 4{,}5$ en $-k = 20\frac{\eta}{\mu R^2}$ (verg. LAMB, Hydrodynamics, p. 577).

[2]) Deze asymmetrie is niet ondenkbaar, omdat de draad ten gevolge van zijn bereiding een blijvende wringing vertoonde: bij ontspanning rolde hij schroefvormig op en het nulpunt was van de belasting afhankelijk. Bij schommeling van het stelsel werd de draad dus naar den eenen kant sterker gewrongen. naar den anderen ontwrongen, wat een kleine afwijking van de wet van HOOKE ten gevolge kon hebben, in den vorm van de invoering van een term Na^2 in de bewegingsvergelijking van het schommelend lichaam (meded. n⁰. 148b, verg. 23).

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. 151*e* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: J. E. VERSCHAFFELT: „*De inwendige wrijving van vloeibaar gemaakte gassen.* VII. *De schommelende draaiingsbeweging van een omwentelingslichaam in een wrijvende vloeistof.*"

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

1. In Meded. N°. 148*b* werd de theorie van de schommelende draaiingsbeweging van een bol in een wrijvende vloeistof in eerste benadering ontwikkeld; de uitkomsten van het experimenteel onderzoek, in het vorige hoofdstuk (VI, Meded. N°. 151*d*) vermeld, maakten het nu wenschelijk, die theorie ook in verdere benadering te ontwikkelen Het volgende is een poging tot oplossing van dat vraagstuk, niet alleen voor een bol, maar voor een willekeurig omwentelingslichaam. Deze poging slaagde inzooverre, dat een methode van oplossing wordt aangegeven, waarbij de beweging der vloeistof en van het lichaam wordt gebracht in den vorm van een reeks; de termen dezer reeksen bevatten echter functien der coördinaten, die voorloopig, wegens de moeilijkheid der integraties, alleen door differentiaalvergelijkingen bepaald blijven, en coëfficienten, waarvan de getalwaarde nog niet is aan te geven. In vorm stemmen die reeksen overeen met diegene, welke langs experimenteelen weg werden gevonden. (Meded. N°. 151*d*).

De vloeistofbeweging.

2. We gaan uit van de bekende hydrodynamische vergelijkingen:[1])

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{\partial p}{\partial x}+\eta\,\Delta u+\mu X_0=\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right),\ \text{enz} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0\,, \end{array}\right\} \quad . \quad (1)$$

waarvan we de laatste zullen vervangen door een andere, die het gevolg is van alle vier, nl.:

---

[1]) u, v, w zijn de componenten van de snelheid in een punt x, y, z; p is de druk in de vloeistof, waarvan μ de dichtheid is en η de wrijvingscoëfficient; X_0, Y_0, Z_0 zijn de componenten van het uitwendige krachtveld, waarin de vloeistof zich bevindt, i.c. het veld der zwaartekracht ($X_0=0$, $Y_0=0$, $Z_0=g$). Δ is het symbool voor den operator van LAPLACE.

Ondersteld wordt dat noch μ noch η functien zijn van de coördinaten of van den tijd. Dit is, bij een toestel van gewone afmetingen, praktisch het geval, zelfs voor een gas, wanneer daarin geen grootere drukverschillen voorkomen dan die, welke de zwaartekracht teweeg brengt. (Verg. daaromtrent G. ZEMPLÉN, Ann. d. Phys., 38, 81, 1912).

$$\Delta p = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right). \quad (1')$$

Is de vloeistofbeweging het gevolg van de wrijving van een daarin gedompeld omwentelingslichaam, dat om zijn as (de z-as) draait, en is verder de eventueele begrenzing der vloeistof ook nog in alle meridiaanvlakken dezelfde, dan kunnen we stellen:

$$u = \varepsilon x - \omega y \quad , \quad v = \varepsilon y + \omega x \; , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin ε en ω functien zijn van de cylindercoördinaten $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ en z en van den tijd.

Voor kleine snelheden schrijven we nu:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots \quad , \quad \ldots \qquad , \quad p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots \quad (3)$$

waarbij iedere volgende term der reeksontwikkeling als oneindig klein wordt beschouwd t.o.v. den voorgaanden. We beschouwen dus de vloeistofbeweging als het resultaat der samenstelling van een reeks van bewegingstoestanden, waarvan de snelheden zeer snel afnemen, naarmate men verder komt in de reeks.[1]) Daardoor zijn de vergelijkingen (1) te splitsen in een reeks van stelsels, waarvan ieder een bewegingstoestand bepaalt. Stelt men in het n^e stelsel:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -X_n \; , \text{ enz.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

dan zijn X_n, Y_n, Z_n te beschouwen als de componenten van de kracht, door de traagheid van de vloeistof opgewekt; zij zijn geheel bepaald door de voorafgaande benaderingen. Ook is volgens (1') bij elke nieuwe benadering de drukverdeeling in de vloeistof door de voorafgaande benaderingen bepaald.

3. In *eerste benadering* (snelheden oneindig klein van de *eerste* orde) is

$$\Delta p_1 = 0 \; ^{2)} \quad , \quad \eta \, \Delta u_1 = \mu \frac{\partial u_1}{\partial t} \; , \text{ enz.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Is de beweging van het lichaam een schommelende met gedempt harmonische slingeringen, waarvan de afwijkingshoek voorgesteld kan worden door het reëele deel van

$$\alpha = a e^{kt} \; , ^{3)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

[1]) Deze wijze van behandeling van het vraagstuk werd, voor het vinden van een tweede benadering, reeds aangegeven door A. N. Whitehead (Quarterly Journ. of pure and applied Mathem., 23, 78, 1889), die ze heeft toegepast op het geval van een gelijkmatige wenteling van een bol. Zie ook Zemplén, Ann. d. Phys., 38, 74, 1912.

[2]) De drukverdeeling in de vloeistof is in eerste benadering dezelfde als in den rusttoestand.

[3]) k is complex imaginair; a mag reëel ondersteld worden (zie meded. n⁰. 148b).

dan is te stellen:

$$v_1 = 0 \quad , \quad w_1 = 0 \quad , \quad \varepsilon_1 = 0 \quad , \quad \omega_1 = k\alpha\varphi_1 \, , \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarbij φ_1 enkel nog een functie is van ϱ, z en $b = \sqrt{\frac{\mu}{\eta}} k$, bepaald door de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varrho^2} + \frac{3}{\varrho} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - b^2 \varphi_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

en door de grensvoorwaarden, dat langs het lichaam $\varphi_1 = 1$ en aan de buitenste grens der vloeistof (in het oneindige, wanneer de vloeistof onbegrensd is) $\varphi_1 = 0$ [1]).

4. In *tweede benadering* vindt men:

$$\left.\begin{array}{c} -\dfrac{\partial p_2}{\partial x} + \eta \, \Delta \, u_2 + \mu \, X_2 = \mu \dfrac{\partial u_2}{\partial t} \, , \text{ enz.} \\ \text{waarin} \\ X_2 = \omega_1{}^2 x \, , \; Y = \omega_1{}^2 \, y \, , \; Z_2 = 0 \, . \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Dit stelt voor de eerste benadering van een beweging in het krachtveld der centrifugaalkracht [2]). Overigens is:

$$\Delta \, p_2 = \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial (\varrho \omega_1)^2}{\partial \varrho} \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

Aan die vergelijkingen wordt voldaan door te stellen:

$$\varepsilon_2 = 2 \, k \, \alpha^2 \, \psi_2 \quad , \quad \omega_2 = 0 \quad , \quad w_2 = 2 \, k \, \alpha^2 \, \gamma_2 \quad , \quad p_2 = 2 \, k \, \alpha^2 \, \pi_2 \, . \; . \quad (10)$$

waarin ψ_2, γ_2, π_2 nieuwe functiën zijn van ϱ, z en b. Men krijgt dus een circulatiebeweging in meridiaanvlakken; deze beweging is gedempt pulseerend, met tweemaal grootere frequentie en demping dan de schommeling der eerste benadering.

5. In *derde benadering* vindt men weer $\Delta p_3 = 0$, of $p_3 = 0$, en

---

[1]) Is het omwentelingslichaam een bol, dan wordt φ_1 enkel een functie van $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, en de vergelijking (8) gaat over in de verg. (11) van meded. n⁰. 148*b*.

[2]) In 't algemeen heeft dit krachtveld geen potentiaal; daarom veroorzaakt het een circulatiebeweging in de vloeistof (zie meded. n⁰. 148*d*, verslag 27 Nov. 1915). Daarom ook kan niet in 't algemeen $\frac{\partial p_2}{\partial x} = \mu \, X_2$, enz. gesteld worden, zooals bij de verdeeling der drukken onder den invloed van het uitwendige krachtveld. Alleen in het geval van een oneindig uitgestrekten cylinder, waarbij φ_1 enkel functie is van ϱ, heeft het krachtveld der centrifugaalkracht een potentiaal; daar bestaat de circulatiebeweging niet en verdwijnen eveneens de bewegingen van hoogere orde.

$$\eta \Delta u_3 + \mu X_3 = \mu \frac{\partial u_3}{\partial t}, \text{ enz.}$$

waarbij nu

$$X_3 = \Phi_3 y \quad , \quad Y_3 = -\Phi_3 x \quad , \quad Z_3 = 0 \,, \qquad \ldots \quad (11)$$

met

$$\Phi_3 = 2k^2 a^3 \left[2\varphi_1 \psi_2 + \varrho \psi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} + \gamma_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right].$$

In derde benadering hebben we dus een beweging veroorzaakt door een periodisch gedempt krachtveld, dat loodrecht staat op de meridiaanvlakken, en den tijd in den factor e^{3kt} bevat. Daaruit volgt, dat die beweging evenals die in eerste benadering bestaat uit een schommelende draaiing van vloeistofschillen, die ieder een eigen amplitude en phase, maar dezelfde periode en demping hebben; d.w.z., aan de vergelijkingen wordt voldaan door te stellen:

$$w_3 = 0 \quad , \quad \varepsilon_3 = 0 \quad , \quad \omega_3 = 3\,k\,a^3 \varphi_3 \,.$$

φ_3 zijnde een nieuwe functie van ϱ, z en b, bepaald door de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varrho^2} + \frac{3}{\varrho} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} - 3b^2 \varphi_3 = 2b^2 \left(2\varphi_1 \psi_2 + \varrho \psi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} + \gamma_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \quad (12)$$

en door de voorwaarde, dat $\varphi_3 = 0$ aan de grenzen der vloeistof.

6. Verdere benaderingen leveren, zooals men dadelijk vermoedt, en zooals trouwens gemakkelijk te bewijzen is, afwisselend circulatiebewegingen in meridiaanvlakken en schommelende draaiingsbewegingen om de as, met frequenties en dempingen die volgens een rekenkundige reeks toenemen. Stelt men nl.

$$-X_n = \Psi_n x - \Phi_n y \quad , \quad -Y_n = \Psi_n y + \Phi_n x \,, \quad \ldots \quad (13)$$

dan vindt men, volgens een bekende methode, [1])

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_{2n+1}=0, \Phi_{2n}=0, Z_{2n+1}=0\,, \varepsilon_{2n+1}=0\,, \omega_{2n}=0\,, w_{2n+1}=0\,, p_{2n+1}=0 \\ \varepsilon_{2n}=2nka^{2n}\psi_n\,, \omega_{2n+1}=(2n+1)ka^{2n+1}\varphi_{2n+1}\,, w_{2n}=2nka^{2n}\gamma_{2n}\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p_{2n}=2nka^{2n}\pi_{2n} \end{array}\right\} \quad (14)$$

Uit het voorgaande blijkt dus, dat, wanneer een omwentelingslichaam in een vloeistof om zijn as schommelt met een enkelvoudige harmonische gedempte beweging (hoe die beweging onderhouden wordt doet niets ter zake), de vloeistof in een beweging geraakt, die gedeeltelijk bestaat uit een samengesteld harmonisch gedempte schommeling van vloeistofringen, waarbij de amplitude ω kan worden voorgesteld door:

[1]) Gelden nl. de betrekkingen voor $n = 1$ tot m, dan kan men bewijzen dat ze ook gelden voor $n = m + 1$.

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots = a\varphi_1 e^{kt} + a^3\varphi_3 e^{3kt} + a^5\varphi_5 e^{5kt} + \ldots \text{ [1]} \quad . \quad (15)$$

voor het overige is die beweging een circulatiebeweging in meridiaanvlakken.

Deze beschouwingen gelden ook nog, wanneer de beweging van het schommelende lichaam zelf een samengesteld harmonische is van den vorm:

$$\alpha = a\, e^{kt} + \sigma_3\, a^3\, e^{3kt} + \sigma_5\, a^5\, e^{5kt} + \ldots ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

alléén dan zijn de functien φ_{2n+1} niet meer nul langs het lichaam, maar gelijk aan σ_{2n+1}.

De beweging van het lichaam.

7. Nu rijst de vraag: van welken aard zal de beweging zijn, die het lichaam in de vloeistof aanneemt, wanneer het zonder wrijving een enkelvoudig harmonische schommeling zou uitvoeren? Zeker geen enkelvoudig gedempte, want, al liet men een tijd lang, kunstmatig, het lichaam volmaakt schommelen volgens de enkelvoudige gedempte beweging, die het overeenkomstig de eerste benadering krijgen moet, dan zouden toch de hoogere termen der vloeistofbeweging door wrijving krachten doen ontstaan, die de enkelvoudige beweging zouden trachten te verstoren, en die deze storing zeker zouden teweegbrengen, zoodra het lichaam aan zichzelf overgelaten werd. Het is duidelijk, dat ze dan aan het lichaam een samengestelde beweging zouden geven, beantwoordende aan form. (16), waarbij geen even termen zouden voorkomen, omdat de vloeistofbewegingen van even orde slechts wrijving geven langs meridianen, en dus op de schommeling geen invloed kunnen hebben [2]. Zoo is dan begrijpelijk, dat het schommelende lichaam, ook wanneer het vrij in de vloeistof aan het schommelen wordt gebracht, een beweging zal aannemen, die aan de formule (16) beantwoordt [3], zooals

[1]) De φ's zijn functiën van ρ, z en b, die alleen door de begrenzing van de vloeistof worden bepaald. In 't geval, waarin het lichaam een oneindig uitgestrekte cylinder is, zijn alle φ's nul, behalve φ_1. Aan de vaste grenzen van de vloeistof worden de φ's nul (behalve $\varphi_1 = 1$). Wordt de vloeistof gedeeltelijk begrensd door een vrij oppervlak, dan geldt daar nog een bijzondere grensvoorwaarde.

[2]) Die wrijving langs meridianen brengt slechts een onmerkbare deformatie van het lichaam te weeg. Men krijgt den indruk, alsof de circulatiebeweging in de vloeistof, die toch door het lichaam in gang wordt gehouden en door wrijving in de vloeistof wordt gedempt, geen energieverlies van het lichaam veroorzaakt. De verklaring van deze schijnbare tegenstrijdigheid is hierin te vinden, dat de bewegingen van verschillende orde niet van elkander onafhankelijk zijn, en een energieverlies van even orde geleverd wordt door produkten van snelheden van oneven orde.

[3]) Nadat de storingen, die het gevolg zijn van het in beweging brengen, zijn uitgedoofd, welke storingen hier niet nader worden beschouwd (zie meded. n°. 148b, § 4, noot).

het experiment ook aan het licht heeft gebracht (zie hoofdstuk VI).

In die formule (16) worden nu de exponent k, die den schommeltijd T en het logarithmisch decrement bevat $\left(k = -\frac{\delta}{T} + \frac{2\pi i}{T}\right)$, en de coefficienten σ_3, σ_5, enz. (a is willekeurig) bepaald door de wisselwerkingen tusschen vloeistof en lichaam. Immers door de wrijving, die het lichaam ondervindt, werken op dat lichaam koppels, die uit te rekenen zijn, zooals dat voor de eerste benadering gedaan is in meded. N°. 148b voor 't geval van een bol, zoodra de functiën ω_n en γ_n bekend zijn; als we de momenten der koppels, door de achtereenvolgende bewegingstoestanden veroorzaakt, voorstellen door C_1, C_3, C_5 enz. (de momenten met even rangnummer zijn alle nul), dan is de bewegingsvergelijking van het lichaam:

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2} - C + M\alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

(verg. 23, Meded. N°. 148b), waarin $C = C_1 + C_2 + C_5 + \ldots$ Daarbij is

$$\left.\begin{array}{l} C_n = -\int\limits_{z_1}^{z_2} \varrho F ds = \eta \int\limits_{z_1}^{z_2} \varrho^2 \frac{\partial \omega_n}{\partial N} ds \,^{1)} = \eta n k \alpha_n \int\limits_{z_1}^{z_2} \varrho^2 \frac{\partial \varphi_n}{\partial N} ds = - L_n \frac{d\alpha_n}{dt}, \\ \text{waarin} \\ \qquad L_n = - \eta \int\limits_{z_1}^{z_2} \varrho^2 \frac{\partial \varphi_n}{\partial N} ds = - \eta A_n ; \end{array}\right\} \quad (18)$$

A_n is een numerieke grootheid (met de dimensies van een volume), die afhangt van den vorm van het lichaam, verder van de grootheid b, dus van k (schommeltijd en decrement) en van de constanten η en μ der vloeistof, en eindelijk van de coëfficienten σ, tot en met σ_n [2]). Verg. (17) is dus te splitsen in een reeks van vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} K\frac{d^2\alpha_n}{dt^2} + L_n \frac{d\alpha_n}{dt} + M\alpha_n = 0 , \\ \text{of} \\ n^2 k^2 K + n k L_n + M = 0 , \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

[1]) F stelt voor, zooals in meded. 148b, de tangentieele kracht, per eenheid van oppervlakte, in de richting van de beweging; ds is de oppervlakte van een ringvormige strook langs het omwentelingslichaam; $\frac{\partial \omega_n}{\partial N}$ is de gradient der hoeksnelheid van n^e orde in de vloeistof dicht bij het lichaam; z_1 en z_2 zijn de z-grenzen van het lichaam.

[2]) Bevinden verschillende deelen van het schommelende lichaam zich in verschillende vloeistoffen (b.v. een deel in een vloeistof, een deel in lucht, zooals bij de proeven het geval was), dan is L_n zelf nog te splitsen in stukken, die ieder op een der vloeistoffen betrekking hebben.

waarvan de eerste ($n = 1$) de verg. (26) is van Meded. N°. 148*b*, waardoor k wordt bepaald. De volgende bepalen de σ's. [1])

Hiermede is het vraagstuk formeel geheel opgelost. Numerische toepassing zou echter alleen dan mogelijk zijn, wanneer men er in slaagde de functien ω_n en γ_n te vinden. [2])

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N°. 151*f* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: J. E. VERSCHAFFELT: „*De inwendige wrijving van vloeibaar gemaakte gassen.* VIII. *De gelijkvormigheid bij de schommelende draaiingsbeweging van een omwentelingslichaam in een wrijvende vloeistof.*"

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

1. In Meded. N°. 148*c* werden de voorwaarden gevonden, waaronder gelijkvormigheid zou bestaan tusschen twee bewegingstoestanden van een wentelenden bol in een wrijvende vloeistof. Deze beschouwingen berustten geheel op de eerste benadering van het vraagstuk; toen werd evenwel reeds vermoed dat ze ook in 't algemeen geldig zouden zijn (Meded. N°. 148*c* § 5), niet alleen in verdere benadering, maar ook voor andere lichaamsvormen dan bollen; dit zal hier nu aangetoond worden.

We keeren nog eens terug tot de algemeene hydrodynamische vergelijkingen (verg. (1) der vorige meded., N°. 151*e*) en vragen ons af, of het mogelijk is, zoodanige eenheden van lengte, massa en tijd in te voeren, dat de vergelijkingen niets specifieks meer bevatten. De *uitwendige* gelijkvormigheid der vloeistofbeweging vereischt natuurlijk in de eerste plaats gelijkvormigheid in de begrenzing der vloeistof, dus ook gelijkvormigheid van het in de vloeistof schommelende lichaam (in 't geval van een bol is van zelf aan die voorwaarde voldaan); zij R een kenmerkende lengte-afmeting van dat lichaam (de straal in het geval van een bol.) Zij verder T een voor de beweging karakteristieke tijd; als zoodanig kiezen we natuurlijk, in het geval van een schommelende beweging, den schommeltijd van het lichaam, die, zooals we hebben gezien, ook de schom-

[1]) Bij dit alles blijft ondersteld dat het moment van het wringingskoppel evenredig is met den wringingshoek, en dat de gewone wrijvingswetten blijven bestaan.

[2]) Eerst daarna zou het ook mogelijk zijn het zuivere criterium vast te stellen voor oneindige kleinheid der snelheden (zie vorige mededeeling, § 1 noot), d.w.z. de voorwaarde opdat γ_3 (voor het lichaam) beneden een bepaald breukdeel van α_1 blijft, of, wat voor ons doel nog nuttiger zou zijn, de voorwaarde, opdat het decrement δ niet meer dan met een bepaald bedrag van de grenswaarde δ_0 afwijkt.

meltijd van de vloeistof is, althans voor een omwentelingslichaam.[1]) Deze grootheden nemen we, in ieder bijzonder geval, als eenheden van lengte en tijd, en stellen $t = T\mathfrak{t}$, $l = R\mathfrak{l}$, zoodat nu $\mathfrak{t}$ en $\mathfrak{l}$ den gereduceerden tijd en de gereduceerde lengte voorstellen. Verder nemen we aan als eenheid van massa de massa van de (nieuwe) volume-eenheid der vloeistof. De vergelijkingen behouden dan hun vorm: [2])

$$-\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{x}} + \eta' \Delta \mathfrak{u} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{t}} + \mathfrak{u}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{x}} + \mathfrak{v}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{w}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{z}}, \text{ enz.}; \quad \ldots \quad (1)$$

alleen heeft η' in het nieuwe eenhedenstelsel een andere getalwaarde dan in het oude, en wel is, wegens zijn dimensies $(L^{-1}MT^{-1})$

$$\eta' = \frac{\eta T R}{\mu R^3} = \frac{\eta T}{\mu R^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1')$$

Evenmin als in het oude eenhedenstelsel heeft de wrijvingscoëfficient in het nieuwe één bepaalde waarde; de coëfficient η' in verg. (1) kan dus allerlei waarden aannemen, en zoo is dus een eerste voorwaarde voor *inwendige* gelijkvormigheid der vloeistofbeweging deze, dat die coëfficient in alle beschouwde gevallen dezelfde waarde heeft (in het C.G.S. stelsel b.v.); met andere woorden, door aan η' alle mogelijke waarden toe te kennen van 0 tot ∞, karakteriseeren we een oneindige reeks van verschillende vloeistofbewegingen.

2. Voor twee gelijkvormige bewegingstoestanden moet η' dus dezelfde waarde hebben. Was de beweging van het lichaam een ongedempt harmonische (of een gelijkmatig wentelende), dan zou hiermede de eenige voorwaarde voor inwendige gelijkvormigheid van twee bewegingen gegeven zijn; is de beweging een gedempt harmonische, dan komt daar nog bij, dat het logarithmisch decrement δ der amplitude (een dimensieloos getal, dus onafhankelijk van de gekozen eenheden) in gelijkvormige gevallen dezelfde waarde hebben moet; en aangezien aan dat decrement alle mogelijke waarden toegekend kunnen worden van 0 tot ∞ [3]), zoo kenmerkt de grootheid δ een tweede oneindige reeks van verschillende vloeistofbewegingen.

Stel nu de beweging van het lichaam (en van de vloeistof) is samengesteld harmonisch, en gedempt, overeenkomstig form. (15)

[1]) Dat zal ook wel in 't algemeen het geval zijn. Bij een gelijkmatige wenteling zou voor T de omwentelingstijd genomen worden.

[2]) Van de werking der zwaartekracht, die op de beweging geen invloed heeft, wordt hier afgezien.

[3]) Zelfs van $-\infty$ tot $+\infty$, indien men ook bewegingen met kunstmatig toenemende amplituden ging beschouwen.

en (16) der vorige meded., dan zijn nog allerlei bewegingstoestanden denkbaar, die alleen verschillen door de coëfficienten σ; in dit geval eischt de gelijkvormigheid, dat die coëfficienten in alle gevallen dezelfde waarde hebben.

3. Verkrijgen nu de lichamen zoodanige beweging niet kunstmatig, maar door de wrijving in de vloeistoffen, zoo moeten, opdat aan de twee gelijkvormigheidsvoorwaarden: gelijke η' en gelijke σ zou zijn voldaan, de elementen M en K, die de wrijvingslooze beweging der lichamen bepalen, ook aan een bepaalde voorwaarde voldoen; die voorwaarden zijn, volgens form. (17) en (18) der vorige mededeeling, dat de uitdrukkingen $\frac{M}{K}T^2$ en $\frac{L_n}{K}T$ in alle gevallen dezelfde waarde hebben $\left(\frac{k}{T} = -\delta + 2\pi i \text{ is immers in alle gevallen hetzelfde getal}\right)$ De eerste voorwaarde drukt uit, dat de schommeltijd van het wrijvingslooze lichaam $\left(T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{M}}\right)$, gemeten met den schommeltijd in de vloeistof als eenheid, in alle gevallen dezelfde moet zijn (omgekeerd kan dan ook, en dat is eenvoudiger, in ieder geval de schommeltijd T_0 als tijdseenheid worden gekozen). Wat de andere voorwaarden betreft, volgens welke iedere uitdrukking $\frac{L_n T_0}{K}$ in alle gelijkvormige gevallen dezelfde getalwaarde hebben moet, wanneer men let op de dimensiën van L_n, dan ziet men, dat die vereischt, dat de uitdrukking $\eta \frac{R^3 T_0}{K}$ in alle gevallen dezelfde numerieke waarde heeft; dan hebben ook alle L_n's in de verschillende gevallen dezelfde waarden, wanneer in ieder geval de soortelijke eenheden worden ingevoerd, omdat alleen nog integratiën overblijven over functiën, die in overeenkomstige punten identieke waarden hebben. En dan zijn, volgens de hoogere vergelijkingen (18), de waarden van σ_n ook in alle gevallen dezelfde.

De voorwaarden voor de gelijkvormigheid zijn dus ten slotte, dat de getallen

$$c_1 = \frac{\mu R^2}{\eta T_0} \quad \text{en} \quad c_2 = \frac{\eta R^3 T_0}{K}$$

of . . . . . . (2)

$$c_3 = \frac{\mu R^5}{K} \quad \text{en} \quad c_4 = \frac{\eta^2 R}{\mu M}$$

in alle gevallen dezelfde waarden (in C. G. S. eenheden) hebben; het

zijn de voorwaarden die ook in meded. N°. 148c werden gevonden.

4. Met behulp van deze beschouwingen is het mogelijk de uitkomsten der in meded. n°. 151d beschreven proeven iets overzichtelijker voor te stellen. Aangezien slechts twee oneindigheden van bewegingstoestanden bestaan, kunnen we alles herleiden tot de verandering van slechts twee van de vijf elementen μ, η, T_0, K en R [1]). Nu ligt het in de eerste plaats voor de hand, aangezien bij de meeste proeven de toestel onveranderd bleef (dus T_0, K en R niet veranderden), maar alleen de vloeistof gewijzigd werd, η en μ als veranderlijken te beschouwen, en dus de formule h van § 4 (Meded. N°. 151d), gevonden met een gewijzigd schommelend stelsel, tot dezelfde waarden van K en T_0 te herleiden als die, welke golden voor de formules a tot f. De formule h zelf verandert daarbij niet, aangezien α en x dimensielooze getallen zijn; δ verandert evenmin, en de voorwaarden (2) leeren, dat diezelfde formule h gevonden had moeten worden, wanneer de bol, verbonden met den cylinder van aluminium, geschommeld had in een vloeistof met $\mu = 0{,}607$ en $\eta = 0{,}01028$. Ook de waarde $\psi = \frac{T - T_0}{T_0} = 0{,}010$ zou daarbij dezelfde gebleven zijn.

Het verdient echter de voorkeur alles tot eenzelfde vloeistof te herleiden, b.v. met $\mu = 1$ en $\eta = 0{,}01$ (water van 20°), en K en T_0 te laten veranderen [2]). Zoodoende krijgen we de bijgaande tabel.

Van deze tabel kan partij getrokken worden, voor het beoordeelen van de gunstigste omstandigheden, waarin met een bepaalde vloeistof kan worden geëxperimenteerd; zij is namelijk tot iedere andere vloeïstof te herleiden, door alle T_0's en alle K's met bepaalde factoren te vermenigvuldigen. Nemen we b.v. voor vloeibare waterstof de waarden aan: $\mu = 0{,}07$ en $\eta = 0{,}00013$, waarvan de laatste in meded. n°. 148b, § 13, door toepassing van de wet der overeenstemmende toestanden werd berekend, dan zien wij, dat volgens form. (2) voor die vloeistof alle T_0's ongeveer 5 maal grooter en alle K's ongeveer 15 maal kleiner moeten worden genomen; om dus met vloeibare waterstof te werken in omstandigheden ongeveer overeenkomende met die, waarin met ether werd gewerkt, zou $K = 60$ en $T_0 = 40$ genomen moeten worden.

[1]) Wanneer we, ten minste in ruwe benadering, het schommelende en wrijvende lichaam tot den bol bepalen. Wel zijn de gelijkvormigheidsbeschouwingen uit te breiden tot het geval, waarin het schommelende stelsel zich gedeeltelijk in één vloeistof, gedeeltelijk in een andere bevindt; dan moeten, zooals men gemakkelijk inziet, de verhoudingen der dichtheden dier vloeistoffen in alle gevallen dezelfde zijn.

[2]) Dit werd in meded. n°. 148c ook gedaan. Men kan immers K en T_0 binnen veel wijdere grenzen laten veranderen dan η en μ.

	$T_0 = 3.55$	6,21	7.94	17.93	27.24	34.98	53.65
$K = 945$						$\psi = 0{,}010$ $\delta = 0{,}0924$ $a_3 = +8{,}50 \cdot 10^{-6}$ $a_5 = -3{,}24 \cdot 10^{-8}$	
$K = 792$			$\psi = 0{,}005$ $\delta = 0{,}04840$ $a_3 = +19.95 \cdot 10^{-6}$ $a_5 = -18{,}66 \cdot 10^{-8}$ $a_7 = +8{,}5 \cdot 10^{-10}$				
$K = 645$				$\psi = 0{,}010$ $\delta = 0{,}0898$ $a_3 = +7{,}83 \cdot 10^{-6}$ $a_5 = -3{,}00 \cdot 10^{-8}$			
$K = 600$	$\psi = 0{,}005$ $\delta = 0{,}04194$ $a_3 = +15{,}82 \cdot 10^{-6}$ $a_5 = -12{,}88 \cdot 10^{-8}$ $a_7 = +5{,}3 \cdot 10^{-10}$						
$K = 574$					$\psi = 0{,}014$ $\delta = 0{,}1272$ $a_3 = +6{,}73 \cdot 10^{-6}$ $a_5 = -3{,}06 \cdot 10^{-8}$		
$K = 528$							$\psi = 0{,}021$ $\delta = 0{,}2623$ $a_3 = +3{,}27 \cdot 10^{-6}$ $a_5 = -1{,}01 \cdot 10^{-8}$
$K = 449$		$\psi = 0{,}007$ $\delta = 0{,}0705$ $a_3 = +18{,}57 \cdot 10^{-6}$ $a_5 = -13{,}65 \cdot 10^{-8}$ $a_7 = +4{,}0 \cdot 10^{-10}$					

5. Uit deze beschouwingen over gelijkvormigheid volgt nog, dat, wanneer men met verschillende vloeistoffen proeven nam, zooals beschreven in § 5 der meded. n°. 151*d*, door K en T_0 op alle mogelijke wijzen te laten veranderen, men een dubbel stel lijnen krijgen zou, een net vormende, dat voor alle vloeistoffen volmaakt hetzelfde zou zijn [1]). Volgens de formules (2) zouden nu weer, uit de elementen behoorende bij de lijnen in één net, de elementen berekend kunnen worden, behoorende bij overeenkomstige lijnen in een ander; omgekeerd zou men, beschikkende over de netten van twee vloeistoffen, de μ's en η's der twee vloeistoffen kunnen vergelijken en aldus de μ en η voor eene der vloeistoffen (meer bepaaldelijk de η) kunnen bepalen.

Wellicht vindt deze methode nog praktische toepassing.

Natuurkunde. — De Heer Kamerlingh Onnes biedt aan Med. 151*g* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: J. E. Verschaffelt en Ch. Nicaise: „*De inwendige wrijving van vloeibaar gemaakte gassen*". IX. *Voorloopige bepaling van den wrijvingscoëfficient van vloeibare waterstof.*

(Mede aangeboden door den Heer Kuenen).

1. De metingen werden verricht met denzelfden toestel, waarmede de wrijvingscoefficient van vloeibare lucht werd bepaald (zie meded. N°. 149*b*, IV), alleen waren een paar verbeteringen aangebracht. In de eerste plaats bevonden zich onder de kap eenige vernikkelde papieren schermen, waardoor de straling van de kap werd tegengehouden; in de tweede plaats was in de vloeistof een klein blikken handpompje gebracht [2]), waarvan de zuigerstang door een klein metalen buisje in de kap naar buiten kwam, en door tusschenkomst van een caoutchoucbuisje, dat het metalen buisje luchtdicht afsloot, op en neer kon worden bewogen, waardoor de vloeistof vóór iedere proef kon worden omgeroerd, om mogelijke kleine temperatuur- en dichtheidsverschillen te vereffenen. Het thermometerbuisje en de hevelbuis, die bij deze proeven overbodig waren, waren weggenomen; de temperatuur werd afgeleid uit den dampkringsdruk (de vloeistof, die in dit geval een voldoend hooge mate van zuiver-

[1]) Zoo zou, behoudens dezelfde restrictie als voor de proeven van § 4, de lijn II ook gevonden worden voor water, met $K = 807$ en $T = 15{,}21$.

[2]) Van het model dat gewoonlijk in de cryostaten van het laboratorium gebruikt wordt (zie b.v. Meded. N°. 123.)

heid bezat, kookte[1]) onder een druk, die door de laboratorium-pompen op enkele m.M. kwik standvastig werd gehouden, en slechts weinig hooger was dan de dampkringsdruk[2]); het ledigen van den toestel kon zeer snel geschieden door verdamping der vloeistof, na verwijdering van het buitenste vacuumglas, dat evenals bij de proeven met vloeibare lucht. vloeibare lucht bevatte. Als binnenste vacuumglas, dat de vloeibare waterstof bevatte, werd een geheel verzilverd glas genomen, waarin alleen een paar overstaande vensters waren opengelaten, ten einde bij het vullen de hoogte van de vloeistof binnen het glas te kunnen waarnemen; aangezien het buitenste glas verzilverd was, met vrijlating van niet meer dan een doorschijnende reep, was het voldoende dit buitenste glas een weinig te draaien om de vloeibare waterstof zoo goed als geheel tegen uitwendige straling te beschutten.

2. Technische moeilijkheden, voortspruitende uit het gebruik van vloeibare waterstof en de veel lagere temperatuur (± 20° K.), deden zich niet voor; alleen was, zooals te verwachten was, de demping der schommelingen zeer klein (ongeveer 6 maal kleiner dan in vloeibare lucht) en daardoor liet zich de inwendige wrijving van den ophangdraad in hooge mate, en wel op zeer onaangename wijze gelden. Het bleek n.l., dat die wrijving niet alleen vergelijkenderwijze zeer groot was, maar in sterke mate van toevallige, moeilijk te beoordeelen en te regelen omstandigheden afhing, waardoor wel uit iedere proef op zichzelf een nauwkeurig te bepalen logarithmisch decrement was af te leiden, maar tusschen de verschillende proeven slechts zeer matige overeenstemming werd gevonden[3]). In de eerste plaats werd bevonden, dat ontspannen en opnieuw spannen van den draad (dus verwisselen der cylinders C) de viscositeit van den draad sterk wijzigde (meestal verhoogde); in de tweede plaats was die viscositeit een functie van den tijd, die slechts langzaam, op eenigszins exponentieele wijze afnam, om eerst na dagen constant te worden; in de derde plaats bleek het gas, waarin de draad zich bevond, ook een grooten invloed op diens wrijving te hebben: luchtledig

[1]) Dat koken, dat geheel oppervlakkig was, zonder belvorming, geschiedde, dank zij de schermen, heel langzaam.

[2]) Het kleine drukverschil tusschen den dampdruk binnen den toestel en den luchtdruk daarbuiten werd aan het open manometertje *Ma* (zie de figuur der meded. No. 149*b*) afgelezen.

[3]) Dit is blijkbaar ook de oorzaak van de verschillen die bij de proeven met vloeibare lucht werden waargenomen (zie meded. No. 149 *b* V). Dat ongestadige in de inwendige wrijving van den draad heeft ook vorige onderzoekers last gegeven: zie b.v. ZEMPLÉN, Ann. d. Phys., 19, 802, 1906.

pompen, vullen met lucht, vervangen van lucht door waterstof (dit vooral) of omgekeerd, veroorzaakten een sterke toename der wrijving [1]), die, zooals gezegd, op den duur weer minder werd [2]).

Om in deze ongunstige omstandigheden met den eenmaal gebouwden toestel toch voorloopige metingen te kunnen verrichten, hebben wij onze manier van werken eenigszins moeten wijzigen, en daarbij aan de nauwkeurigheid der uitkomsten veel minder hooge eischen gesteld. In 't bijzonder was het bepalen der slingertijden door registratie (zie meded. N°. 149*b*, IV, § 4) een met die nauwkeurigheid ongeevenredigde complicatie, en kon ruimschoots worden volstaan met een zuiver chronometrische bepaling, met behulp van een „stopwatch", die de $^1/_5$ sec. aangaf [3]). Verder maakte de gevoeligheid van den draad voor toestandsveranderingen, dat gedurende een geheele proevenreeks de toestel niet mocht worden gewijzigd, d. w. z. de cylinders niet mochten worden verwisseld; aangezien daardoor echter het nut van deze cylinders (zie meded. N°. 149*b*, IV, § 5) verloren ging, konden deze gevoeglijk worden weggelaten [4]). We hebben dan ook in 't vervolg met onveranderlijk schommelend stelsel gewerkt; dit had tengevolge dat nu op een andere wijze dan te voren de wrijving van het gas op het niet in de vloeistof gedompelde deel van het stelsel moest worden geelimineerd. Dit hebben we zoo gedaan, dat we, behalve proeven waarbij de bol in de vloeistof schommelde, ook proeven hebben genomen, waarbij de bol, even boven de vloeistof, in damp van lage temperatuur schommelde; uit de kennis nu van de dichtheid en wrijvingscoëfficient van dien damp kon dan met behulp van de formules (24′) en (28) van meded. N°. 148*b* het koppel worden bepaald, dat de bol door wrijving in den damp ondervond, en dit werd van het geheele wrijvingskoppel bij de proef in den damp afgetrokken; het verschil meenden we te kunnen beschouwen als het koppel, dat het schommelend stelsel ook bij de proeven in de vloeistof door wrijving buiten de vloeistof ondervond.

---

1) Vermoedelijk een gevolg van occlusie van gassen door den metaaldraad. Met kwartsdraden, die deze onaangename eigenschap waarschijnlijk niet zouden bezitten, hebben we niet gewerkt.

2) Om van deze veranderingen geen last meer te hebben, lieten we den toestel voortdurend met waterstof gevuld.

3) Door het waarnemen van den duur van tien schommelingen was T toch nog op 0,01 sec. ongeveer nauwkeurig te bepalen.

4) Het traagheidsmoment van het schommelende stelsel was dus, bij gewone temperatuur, $K = 372{,}5 + 27{,}8 = 400{,}3$. Daardoor werd de schommeltijd wel kleiner dan vroeger (17,22 sec.), maar dat was geen overwegend bezwaar.

3. Na enkele minder gelukkige pogingen zijn we er in geslaagd op één dag (den 12[en] Juli 1916) een reeks betrouwbare en, naar we meenen, vergelijkbare waarnemingen te verrichten. De waargenomen logarithmische decrementen δ zijn medegedeeld in de volgende tabel, waarin ook zijn aangegeven de gemiddelde tijdstippen, waarop de waarnemingen (die ongeveer 4 min. duurden; telkens werden 20 volle schommelingen waargenomen[1])) geschiedden, alsook de toestand van de stof, die den bol omgaf.

1.	$11^{u}25^{m}$	v.m.	damp	$\delta = 0{,}00393$
2.	11 40	,,	,,	379
3.	11 50	,,	,,	370
4.	12 15	,,	vloeistof	682
5.	12 25	,,	,,	672
6.	12 40	,,	,,	663
7.	2 15	n.m.	damp	340
8.	2 35	,,	,,	317
9.	2 50	,,	,,	317

Ziehier een korte beschrijving van den gang der waarnemingen. Nadat de toestel reeds gedurende eenige dagen met waterstofgas gevuld was gebleven, werd in den ochtend van 12 Juli omtrent 10 u. v.m. met afkoelen begonnen, en omtrent 11 uur vloeistof ingegoten, echter slechts zóóver, dat de bol nog niet met vloeistof in aanraking kwam, en toen werden drie waarnemingen verricht in den damp; het blijkt dat het decrement snel kleiner werd, wat op een storing van den draad door het vullen van den toestel schijnt te wijzen. Omtrent 12 u. werd vloeistof bijgegoten, totdat de bol geheel ondergedompeld was; weer werden drie waarnemingen gedaan, die een veel grooter decrement gaven, dat nu eveneens met den tijd afnam, en wel nagenoeg in dezelfde mate als in den damp. Omtrent 1 u. n.m. werd het buitenste vacuumglas verwijderd, zoodat de vloeibare waterstof vrij vlug kon verkoken; omtrent 2 u. was de vloeistof zoover verkookt, dat de bol buiten de vloeistof reikte; nu werd het vacuumglas met vloeibare lucht weer om het binnenste geschoven, en weer werden drie waarnemingen verricht in den damp.

Uit de waarnemingen volgt, dat de overgang van den bol van damp in vloeistof het logarithmisch decrement verhoogt met een gemiddeld bedrag 0,00319, terwijl voor de wrijving van den bol in den

[1]) Aangezien we geen grootere nauwkeurigheid verwachtten dan 1 % ongeveer, kwam het ons nutteloos voor, door verlenging der reeksen, den graad van nauwkeurigheid der afzonderlijke uitkomsten hooger te maken.

damp bij 20° K. met $\mu = 0{,}0012$ [1]) en $\eta = 0{,}000011$ [2]) een decrement $\delta = 0{,}00015$ werd berekend. We besluiten daaruit, dat het door wrijving van de vloeistof alleen veroorzaakte decrement was $\delta_1 = 0{,}00334$. De vloeistof bevond zich onder een gemiddelden druk van 766 m.M. kwik; de temperatuur was dus 20°,36 K. [3]) en de dichtheid 0,0708 [4]). Daaruit volgt $\eta = 0{,}000117$.

Deze bepaling was verricht vóór dat het onderzoek naar de bruikbaarheid der methode (zie Meded. N°. 151*d*) afgeloopen was. Uit dat onderzoek blijkt, dat de gevonden waarde voor η waarschijnlijk wel enkele procenten te hoog uitgevallen is, maar de gegevens ontbreken, waarmede de aan te brengen correctie zou kunnen worden geschat. Daarom geven we als voorloopige waarde van den wrijvingscoëfficient voor vloeibare waterstof:

$$\eta = 0{,}00011.$$ [5])

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N°. 151*a* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: „*Hulpmiddelen en methoden in gebruik bij het cryogeen laboratorium.* XVII. *Cryostaat voor temperaturen tusschen* 27° *K. en* 55° *K.*"

(Aangeboden in de Zitting van 24 Juni 1916).

§ 1. *Inleiding.* In § 1 van Med. N°. XVI van deze serie (Med. N°. 147*c* Zitt.versl. 26 Juni 1915) wees ik op het belang van inrichtingen die veroorloven over standvastige en gelijkmatige temperaturen in het gebied tusschen om en bij 27° K. en om en bij 55° K. te beschikken, en vermeldde ik, dat een cryostaat voor dit gebied tot stand was gebracht, bij welken men ter verwezenlijking van dit doel een stroom van op de gewenschte temperatuur verwarmden waterstofdamp door de proefruimte laat strijken [6]). De mate van standvastigheid en gelijkmatigheid van temperatuur, die verkregen worden,

[1]) Die damp gedraagt zich nog vrijwel als een ideaal gas.

[2]) Volgens H. KAMERLINGH ONNES, C. DORSMAN en SOPHUS WEBER, Meded. N°. 134*a*.

[3]) Normaal kookpunt: 20°,33 K., $\frac{dp}{dt} = 200 \frac{\text{m.M.}}{\text{graad}}$ (zie Med. N°. 137*d*).

[4]) Zie Meded. N°. 137*a*.

[5]) Deze waarde komt op bevredigende wijze overeen met die, welke in Meded. N°. 148*b* werd berekend op grond van de wet der overeenstemmende toestanden.

[6]) Het beginsel van deze inrichting is reeds door A. PERRIER en H. KAMERLINGH ONNES toegepast bij hun onderzoek over de magnetische eigenschappen van vaste zuurstof boven 20° K. (Meded. n°. 139*c* Zitt.versl. 28 Febr. 1914).

wanneer men zich met de inrichting der metingen naar de eischen van den toestel kon richten, gelijk bij de tot nog toe er mede uitgevoerde onderzoekingen het geval was, hebben de verwachtingen overtroffen. Wel is het nog niet gelukt met den waterstofdampcryostaat tot een zoo gemakkelijke en zekere temperatuurregeling te komen als het geval kon zijn, wanneer er stoffen bestonden geschikt om tusschen 55° K. en 27° K. vloeistofbaden te leveren [1]). Maar de afwijkingen bleven dikwijls geruimen tijd beneden 0,01 graad [2]) (zie uitvoeriger § 3). Men mag dus zeggen, dat de gaping in de reeks der te verkrijgen standvastige en gelijkmatige temperaturen, die nog bleef bestaan tusschen het gebied dat met vloeibare zuurstof en dat hetwelk met vloeibare waterstof gemakkelijk wordt beheerscht [3]), nu ook bevredigend [4]) is aangevuld. Voor proeven, bij welke men de verschijnselen in de proefruimte met het oog wil volgen, is de waterstofdampcryostaat bij de thans beschreven inrichting nog niet geschikt, daar de proefruimte geheel door koperen wanden is omgeven. Doch ik hoop door eene wijziging in den toestel ook dit bezwaar op te heffen.

Naar dezelfde beginselen als de waterstofdampcryostaat zal, nu de doeltreffendheid van dezen gebleken is, een heliumdampcryostaat gebouwd worden teneinde ook de gaping aan te vullen, die nu nog overblijft in de reeks der lage temperaturen, voor welke men over hulpmiddelen beschikt om de voor metingen noodige stand-

---

1) Er wordt hier afgezien van de mogelijkheid om voor sommige proeven neon onder overdruk te gebruiken, wat waarschijnlijk voor 27° K. tot 34° K. praktisch uitvoerbaar is. (Zie Meded. 147*c* § 1).

2) Men vergelijke de bepalingen van de dampspanning langs de heterogene isothermen voor verschillende waarden van T bij het onderzoek naar de kritische gegevens van waterstof. (Meded. n°. 151*c*).

3) Behalve voor het gebied van 27° K.—55° K. is de waterstofdampcryostaat ook voor lagere temperaturen dan 27° K. geschikt, zoo kan hij bij vele proeven den neoncryostaat voor het gebied van 25° K.—27° K. vervangen, wat van belang kan zijn omdat de afmetingen van de proefruimte bij den neoncryostaat, wegens de moeilijkheid om over groote hoeveelheden van dit gas te beschikken allicht kleiner dan die bij den waterstofdampcryostaat moeten genomen worden.

[Zit. Versl. 28 Juli 1915 p. 385 r. 17 v. o. leze men achter „de meeste proeven": bij temperaturen tusschen 25° K. en 27° K.] Misschien kan men met den waterstofdampcryostaat wel bijna tot het kookpunt van waterstof afdalen, en dus het gebied bestrijken, waar, als l.c. opgemerkt, anders wellicht van een bad van onder overdruk verdampende vloeibare waterstof gebruik zou zijn te maken.

4) In sterke mate wordt aan de deugdelijke werking van den dampcryostaat afbreuk gedaan wanneer men er proeven in verricht bij welke warmtewerkingen binnen de proefruimte ontstaan. (Zie verder § 3).

vastigheid en gelijkmatigheid van temperatuur te waarborgen, de gaping nl., die door het belangrijke [1]) interval van 14° K.—4°,25 K. (vriespunt waterstof tot kookpunt helium) gevormd wordt.

§ 2. *Beschrijving van den toestel.* De cryostaat (zie fig. 1) [2]) bestaat uit den verdamper V en het cryostaatglas B, welk laatste de proefruimte E bevat. De nieuwzilveren kappen V_N en B_N, door welke de beide deelen luchtdicht worden afgesloten zijn door stevige vertind ijzeren strooken g_1, g_2, g_3 (zie fig. 2) en klembeugels g_0, g_4 onwrikbaar met elkaar verbonden. [3])

Er is een aanhoudende stroom van oververhitten waterstofdamp noodig om de wanden der proefruimte zoowel als het gas en de meettoestellen daarbinnen op standvastige en gelijkmatige temperatuur te houden. Deze dampstroom wordt geleverd door den verdamper.

In het niet verzilverde benedendeel van het vacuumglas van dezen verdamper V_0 bevindt zich vloeibare waterstof. Zij wordt op de in het laboratorium gebruikelijke wijze (Med. N°. 94*f* Zitt.versl. Juni 1906, verg. ook Pl. I Med. N°. 103 Zitt.versl. Febr. 1908) er in overgebracht uit een voorraadbol door het met een caoutchoucbuisje en glazen stopje gesloten buisje a_1. Aanvankelijk vult men den verdamper tot X_5; wanneer de vloeistofspiegel tot X_2 gedaald is, wordt bijgevuld. Door de koperen buis b_1 voert men uit een hoogdruk voorraadcylinder gasvormige waterstof aan, die in b_2 voorgekoeld wordt en leidt deze door de, om warmtegeleiding naar de vloeibare waterstof te verminderen, uit nieuwzilver vervaardigde buis b_3 en verder door de koperen buis b_4 in de vloeibare waterstof, waar zij aanleiding geeft tot een voortdurende ontwikkeling van waterstofdamp, welke door de glazen buis c_1 naar het cryostaatglas B_0, een verzilverd vacuumglas, wordt gevoerd. Op weg daarheen doorloopt de damp de glazen slang C_2, en de daaraan vastgesmolten hevelvormig dubbel omgebogen verzilverde vacuumbuis C_3, C_4, C_5. Het eindstuk, C_5, van deze buis is gekit in de toevoerbuis Ea_1 van de stookruimte Ea_2, de benedenste van twee boven elkaar liggende platte horizontale koperen doozen, waarvan de bovenste Ea_3 als instel- en regelruimte dient, terwijl beide samen onder aan den hollen bodem van de proefruimte bevestigd zijn. De beide doozen zijn van

[1]) Gewezen zij op de wenschelijkheid daarvan voor nauwkeurige bepalingen van de kritische gegevens van helium en voor het onderzoek of lood continu dan wel evenals tin en kwik sprongsgewijze suprageleidend wordt.

[2]) Deze doorsnede is genomen volgens de doorsneelijn in fig. 2 aangegeven.

[3]) Dit is noodig omdat twee glazen hevelbuizen de beide deelen verbinden. Met het oog op de uitzetting bij temperatuursverandering van de buizen en de strooken zijn de laatste van ijzer genomen.

Fig. 1

Fig. 5.

Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 2.

elkander door papier geïsoleerd en de bovenste evenzoo van den bodem van de proefruimte; in elk van de doozen is een verticaal spiraalvormig rondloopend schotje aangebracht Ea_{20}, Ea_{30}, waardoor deze tot een spiraalvormig gewonden buis van rechthoekige doorsnede wordt gemaakt. In de spiraalbuis van de stookdoos bevindt zich een met zijde geïsoleerde (om een platten spiraalvormigen band gewonden) stookdraad (een constantaandraad van 100 Ω in fig. 6 schematisch met Ea_{21} aangegeven). Nadat de waterstofdamp de stookbuis doorloopen heeft, stroomt de nu op de gewenschte temperatuur gebrachte oververhitte damp in de instel- en regelruimte Ea_3 waar het gas wederom den spiraalweg volgt die door het schotje Ea_{30} gewezen wordt Het strijkt daarbij langs een door zijde geïsoleerden (evenals Ea_{21} ingerichten) tindraad, waarvan de weerstand met een technische WHEATSTONE-brug (tot op 0,001) gemeten wordt. Volgens de aanwijzing van den weerstand van dezen draad wordt de temperatuur bij benadering ingesteld. In de instelruimte bevindt zich ook het reservoir van den regelthermometer Θ_r, (zie fig. 3) waarover wij later zullen handelen.

Het gas volgt na de instel- en regelruimte in den bodem der proefruimte doorloopen te hebben (zie fig. 3, 4, 5) de koperen uitwisselingsbuis Eb, bestaande uit acht afwisselende op- (Eb_1) en neergaande (Eb_3), door horizontale kamertjes (Eb_2) gekoppelde stukken, die met den door den zijwand Eb_0 en den bodem van de proefruimte gevormden beker van groot geleidingsvermogen en betrekkelijk groote waterwaarde (de beker weegt met deksel 1.2 Kg.), innig vereenigd zijn [1]), om eindelijk beneden in de proefruimte even boven den bodem bij Eb_{31} uit te stroomen en door kleine openingen [2]) in het koperen deksel Ec (fig. 1), dat de proefruimte van boven afsluit, zich een weg te banen naar de beschermende ruimte, die zich in het cryostaatglas boven de proefruimte bevindt.

De koperen buis Eb met deksel Ec, die de proefruimte omsluit

---

1) De op en neergaande buizen zijn op den zijwand van de proefruimte vastgesoldeerd. De zijwand sluit zich in vorm zooveel mogelijk bij de stukken buis aan; verder is door een dikke tin-aanvulling de geleiding tusschen de buizen en den zijwand nog bevorderd.

2) De deksel van de proefruimte sluit deze van boven zooveel mogelijk, doch niet luchtdicht af. De zijwand Eb_0 (zie fig. 1) is van boven voorzien met een daaraan gesoldeerden horizontalen ringvormigen rand Ec_1 Op dezen koperen rand worden 2mm dikke in den rand passende koperen dekplaatjes Ec_2 geschroefd van zoodanige omtrekken, dat zij de proefruimte wanneer de meettoestellen zich op hunne plaats bevinden, zooveel mogelijk toedekken en het dekselvlak aanvullen totdat nog slechts enkele kieren en kleine openingen overblijven, door welke gas ontwijken kan terwijl toch de meettoestellen in de proefruimte tegen straling beveiligd zijn.

neemt met de onder aan den bodem bevestigde doos de benedenruimte van het cryostaatglas in (zie fig. 1) en hangt, vrij van den binnenwand daarvan met de vacuumbuis C_5 en de glazen stang Ed aan de kap B_N, die het cryostaatglas B_0 op de in het laboratorium gebruikelijke wijze (zie vorige Mededeelingen van deze serie) luchtdicht sluit. Toevoer van warmte door geleiding naar de wanden der proefruimte is dus zoo goed als uitgesloten [1]).

De kap van het cryostaatglas B_N (zie fig. 1) laat, luchtdicht sluitend, behalve de meettoestellen de noodige geleiddraden en den toevoerbuis van den oververhitten waterstofdamp C_4 een tweede dubbel omgebogen hevelvormige verzilverde vacuumbuis $d_1d_2d_3$ door, langs welke de waterstof naar den verdamper terugstroomt. Hier doorloopt zij den regenerator V_R die dient om de waterstof van gewone temperatuur, met welke de verdamper gevoed wordt, voor te koelen [2]); zij vindt eindelijk (zie fig. 6) langs e en een kraan K_1 haren weg naar den gashouder, waaruit men haar weder in hoogdrukvoorraadcylinders overpompt [3]).

De gelijkmatigheid van de temperatuur in de proefruimte wordt gecontroleerd door twee weerstandsthermometertjes θ_1 en θ_2 (fig. 1), platinadraden, los aansluitend gewonden op porceleinen cylindertjes met ingesneden schroefdraad en voorzien van 2 paren toeleidingsdraden [4]). De assen er van liggen horizontaal (zie fig. 4) [5]).

De regeling van de temperatuur op een standvastig bedrag geschiedt door een waterstofthermometer, waarvan het nieuwzilveren reservoir Θ_r (5,2 cm³. inhoud) (zie fig. 3) in de regel- en instelruimte is aangebracht. De gewenschte hoeveeelheid gas bevindt zich bij

[1]) Om de straling van de kap naar het deksel der proefruimte tegen te gaan, kunnen in de beschermingsruimte nog schermen Ef worden aangebracht, die door het uit de proefruimte tredende gas afgekoeld worden. (In fig. 1 gestippeld).

[2]) De afmetingen laten slechts regeneratie in geringe mate toe daar de buis b_2 met het oog op het regelen van den toevoer niet eng mag zijn.

[3]) In deze buis monden, bij het in werking zijn van den cryostaat door klemkranen l_1, l_2 afgesloten, ook uit: een afvoerbuis f van den verdamper met veiligheidsbuis, en een verbindingsbuis van den verdamper met den gashouder buiten den snelheidsmeter (zie § 3) om. Beide dienen bij het vullen van den verdamper.

[4]) Er was nog geen gelegenheid de thermometertjes te verwisselen en daardoor een afdoend oordeel over de gelijkmatigheid van de temperatuur te verkrijgen. Doordat bij een van beide een kleine nulpuntsverandering plaats had, kan ook de mededeeling, dat de gelijkmatigheid tot op 0,01 graad verkregen is nog slechts als eene voorloopige, op schatting berustende, beschouwd worden.

[5]) Op de teekeningen ziet men in de proefruimte verder een dampspanningstoestel, een heliumthermometer en een te onderzoeken weerstandsthermometer afgebeeld (zij hebben betrekking op metingen over welke volgende mededeelingen zullen handelen).

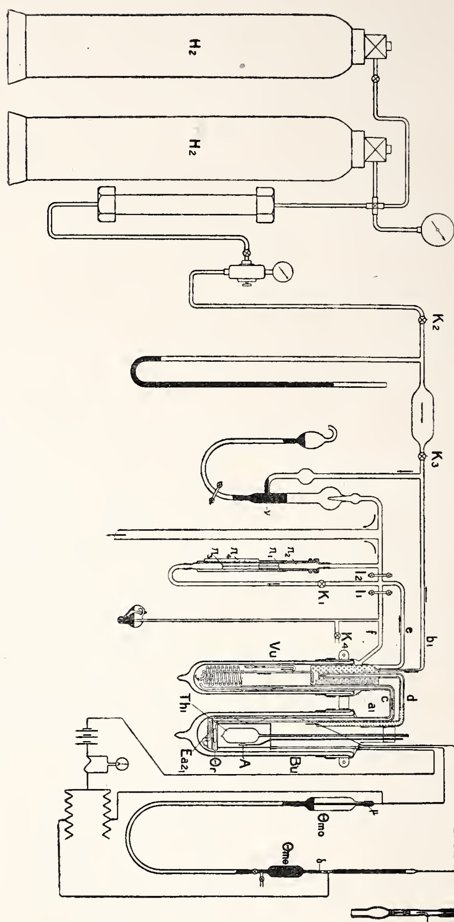

H_2
H_2
K_2
K_3
l_2
l_1
K_1
b_1
e
f
K_4
Vu
d
c
a_1
Th_1
A
Bu
Θ_r
Θ_{mo}
Θ_{me}

Fig. 6.

Fig. 7.

gewone temperatuur voor het grootste deel in de wijde buis aan het manometerdeel $\Theta_{m\theta}$ (fig. 6) van den thermometer en wordt als het thermometerreservoir op lage temperatuur is gekomen, in het laatste door opdrijven van het kwik in het manometerdeel overgebracht. De open buis Θ_{mo} van den manometer is te dien einde met het door den thermometer gesloten deel door een caoutchoucbuis van voldoende lengte verbonden. Men gaat met het opdrijven van het kwik zoover dat dit in de glazen thermometercapillair een glazen drijvertje δ (zie fig. 6 en fig. 7) voorzien van een klein platinatafeltje en een door het drijvertje heengaanden platinacontactdraad, opheft en dit in de onmiddellijke nabijheid van een in de capillair ingesmolten platinastift brengt.[1]) Met behulp van een micrometerschroef μ kan de fijne instelling verwezenlijkt worden. Daalt nu de temperatuur in de instelruimte van den cryostaat, welke temperatuur wij gelijk aan die van de proefruimte mogen rekenen, dan maakt het drijvertje contact met de platinastift[2]) en schakelt daardoor parallel aan de hoofdketen een nevensluiting in (zie fig. 6), waardoor eene temperatuurstijging wordt ingeleid en de automatische regeling van de temperatuur een aanvang neemt.

§ 3. *Opmerkingen over hulptoestellen, bediening en werking van den cryostaat.*

De verdamper en het cryostaatglas worden elk gedompeld in een vacuumglas met vloeibare lucht; het vacuumglas, dat het cryostaatglas omhult B_u (fig. 6) is, om de straling naar de proefruimte zoo gering mogelijk te maken geheel verzilverd; bij het verzilveren van het vacuumglas, waarin de verdamper wordt gedompeld, V_u, is een strook volgens de beschrijvende lijn van den cylinder doorzichtig gelaten, waardoor men de verdamping van de vloeibare waterstof volgt.

Om den cryostaat in gebruik te stellen wordt hij ter besparing van vloeibare waterstof eerst koud geblazen door waterstof van gewone temperatuur uit een voorraadcylinder[3]) door een in vloeibare lucht gedompelde koelslang in den verdamper te doen stroomen.

Wijst de tindraadthermometer in de instel- en regelruimte aan,

[1]) Deze instelling komt overeen met een nulpuntsdruk van ongeveer 8 atmosferen, de thermometer als een van constant volume opgevat.

[2]) De contactmaker werkt het best, wanneer het tafeltje geamalgameerd en met een weinig kwik bedekt is.

(Bij falen van het contact is ook wel de nevenketen met de hand gesloten naar aanwijzing van de plaats van dit drijvertje).

[3]) Het behoeft wel geen vermelding, dat steeds gebruik gemaakt wordt van zuivere waterstof (gedistilleerd of gezuiverd, zie Med. n⁰. 94 l.c. en n⁰. 109*b* Zitt. Versl. Maart 1909).

dat de temperatuur daarin tot ongeveer — 100° C. gedaald is, dan wordt vloeibare waterstof in den verdamper gebracht en vervolgens de toevoer van waterstof van gewone temperatuur in werking gesteld.

De stroomsnelheid van de door de proefruimte stroomende waterstof wordt geregeld naar de aanwijzing van een op den weg naar de gashouders aangebrachten snelheidsmeter, een horizontaal plaatje π_1 zwevende op den verticalen gasstroom in een zeer flauw kegelvormige buis π_2 (lang 15 cM., boven diameter 1,62 cM. beneden diameter 1,50 cM.) en waarvan de opheffing op een langs het glazen verlengde van de meetbuis aangebrachte schaal π_4 met behulp van het eveneens horizontale, als index dienende geleidringetje π_3 afgelezen wordt.

De stroom van waterstof van gewone temperatuur, die uit hoogdrukvoorraadcylinders H_2 H_2 door een reduceerklep geleverd wordt, smoort men op de in fig. 6 aangegeven wijze door de kranen K_2 en K_3 zoodanig, dat een geregelde stroom van (naar den gashouder ontwijkende) gasbelletjes door een kwikzuil v van te regelen hoogte heen borrelt. Men laat door de proefruimte (zoo bijv. bij de metingen over welke de volgende mededeelingen N°. 151*b* en 151*c* handelen) ongeveer 60 cm³. normaal gemeten gas per secunde stroomen, slechts $^1/_7$ hiervan komt daarbij op rekening van den toevoer van waterstof van de gewone temperatuur door b_1; het overige wordt door de verdamping der vloeibare waterstof geleverd.

Wanneer de instel-thermometer (weerstand van den tindraad) aanwijst, dat de temperatuur tot iets beneden het gewenschte bedrag gedaald is, bekrachtigt men den stookdraad[1]). Naar de aflezing van de beide contrôle thermometers in de proefruimte wijzigt men dan den insteldruk van den automatischen regel-thermometer totdat de gewenschte temperatuur in de proefruimte bereikt is. 0.1 millimeter stijging van het drijvertje komt overeen met ongeveer 0.003 graad. Met behulp van de micrometerschroef μ beschikt men dus over eene groote gevoeligheid van instelling van de temperatuur.

Dat eene hooge mate van gelijkmatigheid en standvastigheid van de temperatuur van de meettoestellen in de proefruimte bij de beschreven inrichting en wijze van werken verkregen werd, mag het gevolg daarvan geacht worden dat: *a*) de toevoer van warmte door straling en geleiding naar de koperen omhulling van de proefruimte tot een

---

[1]) Bij instelling op 29°.5 K. was de verwarmingsstroom wanneer het drijvertje geen contact maakte 0.06 amp. en als het wel contact maakte 0.14 amp. Bij instelling op 55° K waren deze stroomsterkten 0.114 amp. en 0.264 amp.

uiterst gering bedrag is teruggebracht [1]), *b)* de uitwisseling van warmte tusschen het uit de stookruimte toegevoerde gas en de wanden van de proefruimte zeer bevorderd wordt door den langen gewonden weg, die het gas in de zijwanden doorloopt, terwijl de uitwisseling over een groot oppervlak van een sterk geleidende massa, daarbij nog zooveel mogelijk gelijkmatig verdeeld, plaats grijpt, *c)* het verschil in temperatuur tusschen het gas in de proefruimte en de wanden tot een zeer klein bedrag teruggebracht is, *d)* het uit de stookruimte toegevoerde gas snel genoeg stroomt om te voorkomen, dat toegevoerde warmtehoeveelheden invloed op de temperatuur van de proefruimte krijgen, *e)* de snelheid van den bedoelden gasstroom standvastig genoeg is om niet tot grillige temperatuurwijzigingen van de proefruimte aanleiding te geven, *f)* de wanden der proefruimte eene voldoende waterwaarde hebben om de ten gevolge van het veranderen van de warmteontwikkeling in den stookdraad optredende en elkander snel genoeg opvolgende, afwisselende afwijkingen in de temperatuur van den bedoelden gasstroom van een middenwaarde uit te wisschen, zoodat die wanden alleen de veranderingen van deze middelwaarde volgen, *g)* het gas in de proefruimte wegens zijn lage temperatuur een veel hoogere waterwaarde heeft dan bij de gewone temperatuur, en eindelijk *h)* de uit de warmte-uitwisselingsbuis in de proefruimte uittredende gasstraal het gas langs de wanden en toestellen in voortdurende beweging [2]) houdt.

Bij de tot nog toe verrichte metingen is opgemerkt, dat grillige storingen nu en dan de tijdperken van standvastige temperatuur onderbraken. [3]) Zette men echter de metingen langen tijd voort, dan vond men daarin in het algemeen herhaaldelijk tijdsruimten van meer dan een half uur of langer in welke de temperatuur van proeftoestellen en thermometers tot op 0,01 graad standvastig bleef, terwijl zulke perioden voorafgegaan worden door nog langere in welke de temperatuur niet meer dan 0,02 graad veranderde, en gedurende welke de meettoestellen dus reeds op zeer weinig na de gewenschte temperatuur hadden aangenomen.

---

[1]) Verg. p. 1215 noot 4. Galvanische warmteontwikkeling en toevoer van warmte door geleiding langs proefdraden moeten tot zeer kleine bedragen worden teruggebracht. (bij de proeven waarop de figuren betrekking hebben waren de toeleidingsdraden zeer lang genomen en in den cryostaat opgewonden op eene wijze, die warmtegeleiding naar de proefruimte uitsloot). Bij condensatie- en expansieproeven moet langen tijd gewacht worden voor men mag aannemen, dat het temperatuurevenwicht weder is ingetreden

[2]) Bij cryostaten met baden van vloeibaar gemaakt gas moet reeds uit anderen hoofde zeer sterk geroerd worden.

[3]) Telkens wanneer nieuw ingesteld wordt dient men een tijdlang te wachten om de proefruimte en de meettoestellen op de nieuwe temperatuur te laten komen.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N°. 151*b* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES, C. A. CROMMELIN en P. G. CATH: „*Isothermen van éénatomige stoffen en hunne binaire mengsels.* XVIII. *Eene voorloopige bepaling van het kritisch punt van neon.*"

(Aangeboden in de Zitting van 24 Juni 1916).

§ 1. *Inleiding.* De voornaamste reden, waarom ons de kritische gegevens betreffende neon, hoe belangrijk zij ook zijn voor de vergelijking van de thermische eigenschappen van deze stof met die van andere en in 't bijzonder met die van éénatomige stoffen, nog steeds niet met eenige nauwkeurigheid bekend zijn is wel, dat men tot nog toe niet in staat was temperaturen in de nabijheid van 45° K. gelegen, zoo standvastig te houden als noodig is om deugdelijke bepalingen van de kritische temperatuur te verrichten. Nu het gelukt is met den waterstofdampcryostaat [1]) temperaturen tusschen het smeltpunt van zuurstof en het kookpunt van waterstof te beheerschen, is dit bezwaar vervallen en konden wij met kans op goeden uitslag de lang beoogde bepaling van den kritischen toestand van neon ter hand nemen. Dat de door ons verkregen uitkomsten nog slechts als voorloopige te beschouwen zijn, ligt dan ook niet aan de veranderlijkheid van de waarnemingstemperatuur of aan gebreken in de gevolgde methode, maar daaraan dat het neon, met hetwelk wij gewerkt hebben, niet volkomen zuiver was. Hoe gering de bijmengselen ook waren, hun invloed trad duidelijk aan het licht [2]) in het oploopen van den druk bij de condensatie. Het verschil van begin- en einddruk bedroeg bij de dampspanningsbepalingen onmiddellijk onder het kritische punt 0,2 atmosferen [3]). Bij de bepaling van de dampspanning van waterstof in de onmiddellijke nabijheid van het kritische punt, die met denzelfden toestel verricht werd, (zie volgende Meded. N°. 151*c* Zitingsversl. Maart 1917)) bij welke bepaling men (wegens de zuivering van de waterstof door distillatie) van de zuiverheid van het gebruikte gas volkomen zeker was, werden verschillen van dien aard niet opgemerkt.

Loopt de druk bij de condensatie op, dan wordt de bepaling van

[1]) Zie de voorgaande Meded. N°. 151*a* in dit Zittingsverslag.

[2]) Door vroegere onderzoekingen, in de eerste plaats die van KUENEN, Zittingsverslag October 1893 Comm. N°. 8 en Zittingsverslag Mei en Juni 1894, Comm. N°. 11 is voldoende aangetoond welk een grooten invloed zelfs geringe bijmengselen op de verschijnselen in den kritischen toestand doen gelden.

[3]) Als dampspanning is in de tabel de druk bij het begin van de condensatie opgegeven.

de kritische gegevens onzeker.[1]) Onze uitkomst omtrent de kritische temperatuur kan een paar tiende graden van de juiste waarde afwijken; een dergelijke onzekerheid bestaat omtrent den kritischen druk. Het feit, dat waarnemingen omtrent de kritische temperatuur van neon nog geheel ontbreken en dat er eenige tijd mee heen zal gaan voor de door ons ontworpen, meer nauwkeurige bepalingen [2]) voltooid zullen zijn, wettigt echter voldoende de publicatie van onze voorloopige uitkomsten.

§ 2. *Toestellen en methode.* De bepalingen geschiedden met een dampspanningstoestel, die in eene Mededeeling omtrent de dampspanningen van neon en waterstof beschreven zal worden. Het bolletje, waarin de condensatie plaats grijpt, is op fig. 1 van de vorige mededeeling met A aangegeven. Het bevindt zich in de proefruimte E van den waterstofdampcryostaat ter halver hoogte naast een heliumthermometer Th_1 en een weerstandsthermometer Ω. De dampspanningstoestel was verder zoo ingericht, dat de hoeveelheden gas die bij een bepaalde temperatuur tusschen begin en einde der condensatie vloeibaar gemaakt werden, gemeten konden worden.

Uit de waarden van deze hoeveelheden bij verschillende temperaturen in de buurt van de kritische temperatuur kunnen dan, in verband met temperatuur en druk, binnen de opgegeven nauwkeurigheidsgrenzen de kritische temperatuur en druk met behulp van eene extrapolatie over een klein gebied bepaald worden.

De waarde, die aan den kritischen druk moet worden toegekend, wordt gecontroleerd met behulp van den druk bij het buigpunt in eene ten behoeve van deze contrôle bepaalde isotherme onmiddellijk boven de kritische temperatuur.

De wijze waarop de bedoelde extrapolatie geschiedde, zal in de volgende mededeeling betreffende het kritisch punt van waterstof aan de hand van een figuurtje nader toegelicht worden.

Wij merken echter op, dat door de hierboven vermelde verontreinigingen in het neon, al waren zij ook gering, de heterogene isothermen in een drukdichtheids-diagram niet, zooals bij onze proeven met waterstof het geval was, een zuiver aan de dichtheidsas evenwijdig verloop hadden.

Door deze verschillen in druk langs de heterogene isotherme werd

[1]) Men neemt de plooipuntstemperatuur van een mengsel, niet de kritische temperatuur van de zuivere stof waar.

[2]) Daarbij hopen wij ook tot eene visueele bepaling te komen door eene wijziging van den waterstofdampcryostaat (verg. Meded. N°. 151*a*), die veroorlooft de verschijnselen binnen de proefruimte met het oog te volgen.

het dan ook moeilijker dan bij waterstof om tot eene juiste berekening van de kritische grootheden te geraken.

Wat de bereiding van het neon betreft, kan worden opgemerkt, dat het onzuivere gas, waarvan men uitging, van waterstof gezuiverd werd door deze na toevoeging van zuurstof tot ontploffing te brengen, dat het daarna herhaalde malen aan de luchtpomp bevroren werd en dat het ten slotte nog herhaaldelijk over in vloeibare lucht afgekoelde kool werd gedistilleerd. Niettegenstaande zij dikwijls herhaald werden, zijn deze zorgvuldig uitgevoerde bewerkingen blijkbaar nog niet voldoende geweest, om het neon geheel van bijmengselen te bevrijden.

De drukmetingen geschiedden met behulp van den in vorige Mededeelingen van deze serie dikwijls genoemden, gesloten waterstofmanometer M_{69} (zie bv. Med. 146*c*). De temperaturen werden gemeten met den boven vermelden met helium gevulden gasthermometer van constant volume Th_1; het reservoir had een inhoud van ongeveer 110 c.M^3, het schadelijk volume bedroeg 0.7 °/$_0$ van dat van het reservoir; de nulpuntsdruk bedroeg 1000 m.m. en de temperaturen werden berekend met behulp van den spanningscoefficient 0.0036614. Wat verder de berekening der temperaturen betreft kunnen wij verwijzen naar eene vorige mededeeling [1]).

§ 3. *Resultaten.*

De resultaten der waarnemingen zijn samengevat in de volgende tabel.

T	θ	$p_{coëx}$ (intern. atm.)	Hoeveelheid gas (cM^3)
43°.83 K	—229°.26 C	24.305	670
44°.43	—228°.66	26.049	416

Boven t_k werd het volgende punt bepaald:

T	θ	p (intern. atm.)
44°.94 K	—228°.15 C	27.462

Zoodat uit bovenstaande gegevens volgt:

---

1) H. Kamerlingh Onnes en G. Holst, Zittingsverslag Mei 1914. Comm. No. 141*a*.

Kritische grootheden		
T_k	θ_k	p_k
44°.74 K	−228°.35 C	26.86

Gaarne betuigen wij onzen dank aan den Heer J. M. BURGERS, phil. cand., assistent aan het Natuurkundig Laboratorium, voor zijne hulp bij het controleeren van de automatische temperatuurregeling gedurende de proeven, met behulp van den weerstandsthermometer Ω en de thermometers θ_1 en θ_2 (zie fig. 1 van de vorige mededeeling).

§ 4. *Discussie.* In eene vorige mededeeling [1]) hadden twee van ons uit eene vergelijking der isothermen-netten van neon met die van waterstof en van argon voorloopige besluiten getrokken over de kritische temperatuur van neon.

De aldaar door vergelijking met argon verkregen waarden, n.l. — 228°.2 C. en — 227°.9 C. zijn echter gevonden door gebruik te maken van de uitkomst van een eenigszins ruwe bepaling van den kritischen druk van neon, nl. 29 atm. [2]). Herhaalt men deze schattingen met de nu gevonden waarden van den kritischen druk, dan vallen de uitkomsten iets lager uit, nl. —228°.9 C en —228.°6 C, waarden, die op zeer bevredigende wijze met de experimenteel gevondene blijken overeen te stemmen. De bij eene vorige gelegenheid uitgesproken en door het verloop der dampspanningen in verband met dat der isothermen waarschijnlijk gemaakte onderstelling, dat argon en neon, uit het oogpunt der wet van de overeenstemmende toestanden beschouwd, zeer weinig van elkander afwijken, wordt hierdoor op zeer bevredigende wijze bevestigd.

De schatting van de kritische temperatuur van neon, toen verkregen uit de vergelijking met waterstof (—231°.2 C) wijkt veel meer van de werkelijke waarde af. Bij die vergelijking is echter gebruikt de door BULLE [3]) bepaalde kritische temperatuur van waterstof, nl. —241°.14 C, en bovendien de bovengenoemde ruwe bepaling van den kritischen druk van neon, welke waarden nu door de door ons bepaalde (wij vinden, gelijk in Meded. N°. 151*c* zal worden uiteengezet, voor waterstof $T_k = 33°.18$ K, $\theta_k = -239°.91$ C, $p_k = 12{,}80$ atm.) dienen vervangen te worden.

---

1) H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN, Zittingsversl. Juni 1915. Comm. No. 147*d*.

2) H. KAMERLINGH ONNES, Zittingsversl. Juni 1909. Comm. No. 112.

3) F. BULLE, Phys. Zeitschr. 14 (1913) pg. 860.

De aldus verbeterde berekening geeft voor de kritische temperatuur van neon —230°.2 C, een waarde die veel minder van de experimenteele waarde afwijkt.

Ter uitgave in de Werken der Akademie biedt de Heer L. BOLK aan het manuscript zijner verhandeling: „*Anatomische Bemerkungen über einen Fetus von Elephas africanus*".

De vergadering wordt gesloten.

(27 April, 1917).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 31 MAART 1917.

DEEL XXV.

N°. 9.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1. Bericht van de Heeren W. DE SITTER en P. VAN ROMBURGH, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2. Dankbetuiging van de Heeren Dr. H. J. WATERMAN te Dordrecht, Prof. H. RUPE te Basel en Dr. K. FAJANS te Karlsruhe voor den steun, hun toegewezen uit de renten van het VAN 'T HOFF-fonds voor het voortzetten hunner wetenschappelijke onderzoekingen, respectievelijk ten bedrage van *f* 250.—, frs. 500.— en M. 400.—.

Voor kennisgeving aangenomen.

3. Het Jaarverslag over 1916 van het Zoölogisch Insulinde fonds, uitgebracht door de Commissie van Uitvoering, luidende als volgt:

Dierkunde. Jaarverslag van de Commissie van uitvoering voor het Zoologische Insulinde Fonds over 1916.

Aan het Bestuur der Koninklijke Academie van Wetenschappen.

Overeenkomstig de bepaling van Artikel 8 der statuten van het „Zoologisch Insulinde Fonds" hebben wij de eer verslag uit te brengen over de werkzaamheden der Commissie van uitvoering van voornoemd fonds gedurende het jaar 1916.

In ons vorig jaarverslag konden wij vermelden, dat aan het verzoek van de Nederlandsche Entomologische Vereeniging om evenals in 1913 een subsidie ter bestrijding van onkosten van de uitgave van een supplement-deel van haar Tijdschrift uit het „Insulinde Fonds" te mogen ontvangen, in dier voege voldaan werd, dat Uw Bestuur *f* 350 beschikbaar stelde.

Naar aanleiding hiervan mochten wij in December jl. een schrijven ontvangen van Prof. J. C. H. de Meijere, lid der Redactie van het Tijdschrift voor Entomologie. Hij deelt daarin mede, dat dank zij dit subsidie, bij deel 58 van genoemd Tijdschrift een supplement kon verschijnen, groot 9 vel druks met 5 platen, dat op 1 Maart 1916 het licht zag en de volgende verhandelingen bevat.

J. C. H. DE MEIJERE, Fauna simalurensis, diptera. p. 1—63.

J. C. H. DE MEIJERE, Studien über südostasiatische Dipteren x. p. 64—97.

K. W. DAMMERMAN, On a new species of Colotermes. p. 98—100.

K. M. Heller, Neue Bockkäfer aus Niederländisch-Indien. p. 100—114.

Malcolm Burr, Dermaptera, collected in Simalur. p. 115—118.

H. Schmitz, Ein neuer Cubitermes. p. 119—124.

E. Wasmann, Nachtrag zu: Eine neue Pseudomyrma aus der Ochsenhorndorn-akazie in Mexico. p. 125—131.

Daar de groote meerderheid dezer verhandelingen betrekking heeft op de fauna van den indischen Archipel, voldoet het subsidie aan de bepaling van artikel 2 van het Zoologisch Insulinde Fonds, waarin als doel van het Fonds sub *e* wordt genoemd het verleenen van geldelijken steun voor de publicatie van zoologische werken omtrent de fauna in engeren of wijderen zin van den Indischen Archipel.

De tijdsomstandigheden waren naar het oordeel onzer Commissie niet van dien aard om op ander gebied, voor zoover het valt binnen den kring der bemoeiingen van het fonds, iets te ondernemen of voor te stellen.

Eerbeek
Amsterdam } 6 Maart, 1917.

De Commissie van uitvoering
voor het Zoologisch Insulinde Fonds
Max Weber, *Voorzitter.*
C. Ph. Sluiter, *Secretaris.*

De Voorzitter deelt mede dat het buitenlandsch lid der Akademie, ingeschreven bij deze Afdeeling, de Heer Gaston Darboux, „*Secrétaire perpetuel de l'Académie des Sciences*", dezer dagen te Parijs is overleden.

Aan de nagedachtenis van dezen geleerde wijdt hij een woord van hulde en waardeering.

Mikrobiologie. — De Heer M. W. Beijerinck biedt eene mededeeling aan over: „*De enzymtheorie van de erfelijkheid*".

Door de verbinding van de resultaten van het enzymologisch onderzoek der laatste jaren, met die door de proeven op erfelijkheidsgebied verkregen, begint zich een inzicht in de natuur der daarbij betrokken stoffen te ontwikkelen, waarop ik de aandacht wil vestigen.

De meest waarschijnlijke theorie van de erfelijkheid bestaat in de opvatting, dat het levende deel van het protoplasma der cel is opge-

bouwd uit een groot aantal van elkander verschillende dragers, die de erfelijke eigenschappen van het organisme bepalen; bij de celdeeling verdubbelen of vermeerderen deze dragers zich, tengevolge waarvan de eigenschappen latent of ontplooid op de dochtercellen overgaan. Zij worden „differirende Zellelemente" (MENDEL), „gemmules" (DARWIN), biophoren, pangenen, genen, karakteréénheden, éénheden, erféénheden, MENDEL'sche faktoren of faktoren genoemd. [1])

Hoe zij in het protoplasma der cel voorkomen, hoe zij zich verhouden tot celkern, chromosomen, chromidiën en andere celorganen, en zeer vele vragen meer vormen het onderwerp van het tegenwoordige erfelijkheidsonderzoek, dat echter uitgaat van de onderstelling, dat de genoemde theorie in het algemeen juist is. Ook het feit, dat de erféénheden of faktoren in latenten toestand kunnen voorkomen en dat zij geaktiveerd moeten worden door zekere soorten van voedsel, door alkaliën, zuren of andere prikkels, raakt het kernpunt van hun bestaan niet.

Naast deze beschouwingswijze staat een andere, die er slechts schijnbaar geheel van verschilt, namelijk, dat het levend protoplasma is opgebouwd uit een groot aantal verschillende enzymen. Een nader onderzoek dezer beide opvattingen leert, dat „erféénheden" en „enzymen" hetzelfde beteekent. [2])

---

[1]) G. J. MENDEL, Versuche über Pflanzen-Hybriden. Verhandl. d. naturforschenden Vereines in Brünn, Bd. 4, Abh. Pag. 42, 8 Februar u. 8 März 1865. — C. DARWIN, Provisional hypothesis of Pangenesis. Domestication, 1e Ed. T. 2, Pag. 357, 1868. 2e Ed. T. 2, 349, 1875. — HUGO DE VRIES, Intracellulare Pangenesis, Jena 1889, en de Amerikaansche bewerking, Intracellular Pangenesis, Chicago 1910. — V. HAECKER, Allgemeine Vererbungslehre Pag. 265, 1911. — M. W. BEIJERINCK, Mutation bei Mikroben. Folia microbiologica. Bd. 1, Pag 24, 1912. — W. JOHANNSEN, Elemente der exakten Erblichkeitslehre. 2e Ed. Pag 143, 1913. etc.

[2]) Ten onrechte vervangen jongere physiologen (bijv. E. ABDERHALDEN, Physiologische Chemie, 3te Aufl. Theil 2 Pag 997, 1915) het praktische en duidelijke woord „enzym" tegenwoordig weder door het oude en dubbelzinnige „ferment". — De geschiedenis der invoering van het woord enzym is deze. In de „Verhandlungen des Naturhistor. und Medicin. Vereins zu Heidelberg", Sitzung am 4 Februar 1876, Bd. 1, N. F., begint het verslag van een voordracht van KÜHNE aldus: „Herr W. KÜHNE berichtet über das Verhalten verschiedener organisirter und sogenannter ungeformter Fermente. Um Missverständnissen vorzubeugen und lästige Umschreibungen zu vermeiden, schlägt Vortragender vor die ungeformten oder nichtorganisirten Fermente, deren Wirkung ohne Anwesenheit von Organismen und ausserhalb derselben erfolgen kann als Enzyme zu bezeichnen". — Dit voorstel is ook nu nog aannemelijk. Dat KÜHNE daarbij alleen dacht aan exoenzymen bracht de tijd mede. De term „Endoenzym" werd eerst in 1900 door M. HAHN opgesteld (Zeitschr. f. Biologie Bd. 40 Pag. 172, 1900). Maar het begrip bestond toen reeds lang. — Enzym komt van het Grieksch „en", in, en „zymè", gist of zuurdeeg, en hangt samen met „zeo", ik kook.

Reeds lang geleden was ik tot de overtuiging gekomen, dat de ontogenetische ontwikkeling van de hoogere planten en dieren, het beste kan verklaard worden door aan te nemen, dat daarbij een reeks van enzymen, meerendeels endoenzymen, werkzaam zijn, die in een bepaalde volgorde aktief worden en de morfologische en physiologische eigenschappen bepalen, die bij de ontwikkeling langzamerhand tot uiting komen. Ook bij het ontstaan der galvormingen aan planten zijn deze enzymen betrokken, en bij een studie over de gallen van de zaagwesp *Nematus capreae* aan de bladen van *Salix amygdalina* gaf ik daaraan den naam van groeienzymen.[1]) Nog altijd ben ik van meening, dat ook deze opvatting in hoofdzaak juist is, maar terwijl ik vroeger dacht, dat de groeienzymen ten deele van het galdier afkomstig waren, zie ik thans in, dat zij alleen tot de plant kunnen behooren en dat het galdier geen enzymen in de plant brengt.

Onderzoekingsmateriaal.

Bij de vrij levende ééncellige organismen ontbreekt een eigenlijke morfologische differentieering, die met celdeeling gepaard gaat geheel of bijna geheel, waardoor de ontogenetische ontwikkeling zeer vereenvoudigd wordt. Maar dat ook daarbij de eigenschappen op juist dezelfde wijze door specifieke dragers, dat is door erfééneheden of MENDEL'sche faktoren moeten vertegenwoordigd zijn als in het celprotoplasma van de hoogere wezens, spreekt eigenlijk van zelf. Ofschoon het nu geheel onjuist zou zijn om aan te nemen, dat het aantal eigenschappen, dus ook dat der erfééneheden of faktoren bij de ééncelligen gering moet wezen, staat men hier toch zeker voor een eenvoudiger geval dan bij de veelcelligen, en het liet zich voorzien, dat er kans zou zijn om aangaande den aard der erfééneheden juist bij de eersten wat meer zekerheid te verkrijgen.

Maar lang niet alle eigenschappen leenen zich even goed voor een dergelijk onderzoek. Om aan te toonen, dat een eigenschap eener cel aan één of meer MENDEL'sche éénheden beantwoordt, moet deze eigenschap door mutabiliteit zoodanig kunnen veranderen, dat de mutanten standvastige rassen blijken te zijn, duidelijk onderscheiden van den hoofdvorm, waaruit zij ontstonden, want het begrip der erfééneheden moet ook bij de ééncellige mikroben van de mogelijkheid der rassenvorming uitgaan.

Bovendien moet de onderzochte eigenschap gemakkelijk en zeker

---

[1]) Das Cecidium von *Nematus capreae* an *Salix amygdalina*. Botan. Zeitung, 1888, Pag 1.

waarneembaar zijn. Het betrokken organisme moet op eenvoudige wijze gekultiveerd kunnen worden, zoodat in enkele dagen duizende individuen kunnen beoordeeld worden en het moet geen onzekerheid laten bij de onderscheiding van van buiten komende infekties. Aan deze eischen voldoen vooral sommige pigment-bakteriën en de lichtbakteriën, gelijk ik dit reeds bij herhaling heb aangetoond. [1]) Vooral de lichtfunktie der lichtbakteriën heb ik nauwkeurig onderzocht, omdat geen andere eigenschap geschikter is om het mutabiliteitsproces te leeren kennen, en om de levensaktiviteit van het onderzoekingsmateriaal scherper en sneller te beoordeelen, waardoor men steeds bewaard blijft voor fouten in de voedingsvoorwaarden (vooral door te zure of te alkalische reaktie), die bij mikrobiologische proeven zoo gemakkelijk kunnen voorkomen. Ook is de lichtfunktie in de meest verschillende afdeelingen van het natuurlijke systeem verspreid en vertoont daarbij een merkwaardige overeenstemming met die der bakteriën, trots de enorme verschillen in de lichtorganen en den invloed dien het zenuwstelsel er op kan uitoefenen. [2])

Niet alle lichtbakteriën zijn voor het onderzoek even geschikt; vooral de in den nazomer in de Noordzee algemeen voorkomende *Photobacter splendidum* [3]) en de op zeevisch steeds aanwezige *Ph. phosphoreum* Cohn, wier eigenschappen elkander op eigenaardige wijze aanvullen, zijn aan te bevelen. *Ph. splendidum* brengt trypsine, urease, diastase en invertase voort en verkrijgt verhoogde lichtkracht met manniet. *Ph. phosphoreum* [4]) mist al deze enzymen en tast manniet niet aan.

Het hoofdresultaat waartoe deze studie voert is, dat men de lichtfunktie met hetzelfde recht aan levend protoplasma als aan een endoenzym kan toeschrijven.

De drager der lichtfunktie als enzym beschouwd. Prikkelbaarheid.

Dat de lichtontwikkeling als gevolg eener enzymwerking kan worden beschouwd heeft Rafaël Dubois reeds in 1898 trachten aan

---

[1]) Deze Verslagen 21 Nov. 1900 en 9 Febr. 1910.

[2]) Dat de lichtfunktie ook 's avonds en 's nachts kan worden waargenomen is niet onverschillig.

[3]) Die Leuchtbakterien der Nordsee im August und September. Folia microbiologica, Bd. 4. Pag. 1, 1915.

[4]) Aliment photogène et aliment plastique des bactéries lumineuses. Archives Néerlandaises T. 24, P. 369, 1891 (Voeding van *Ph. phosphoreum* Cohn.)

te toonen.[1]) Hij deed vooral proeven met het lichtende siphoslijm van *Pholas dactylus* en hij noemt het enzym, dat hij meent gevonden te hebben „luciferase" en de onbekende stof waarop het inwerkt „luciferine". Het laatste lichaam beantwoordt dus aan wat men een „enzym substraat" noemt, maar dat beter als „enzymoteel"[2]) kan worden bestempeld, omdat het woord enzymsubstraat blijkbaar dubbelzinnig is. Voor de bereiding eener luciferaseoplossing, vrij van luciferine bewaart hij het lichtende slijm zóó lang, totdat het duister is geworden. Hij maakt een oplossing van luciferine, die vrij is van luciferase door zachte verwarming, waarbij laatstgenoemde stof vernietigd wordt, maar de luciferine niet. Mengt hij de twee donkere oplossingen, dan wordt opnieuw licht ontwikkeld, waaruit hij besluit, dat de luciferase op overeenkomstige wijze als andere enzymen als katalysator werkt. Het lichtende slijm bestaat uit den celinhoud van eigenaardige kliercellen der epidermis, komt door een fijn kanaal naar buiten en kan blijkbaar protoplasma bevatten.

Ook verschillende andere zeedieren, zooals sommige Anneliden, Cephalopoden en Coelenteraten scheiden een lichtend slijm af, dat zich in het zeewater verdeelt en de omgeving van het dier lichtend maakt.

E. Newton Harvey heeft de lichtstof van insekten onderzocht en komt tot een dergelijk resultaat als Dubois, maar hij noemt de daarbij betrokken stoffen „photogenine" en „photopheleïne".[3]) Overigens laat zich ook gemakkelijk aantoonen, dat de lichtcellen onzer glimwormen, na fijngewreven te zijn, voortgaan met lichten.

Maar deze feiten bewijzen de juistheid der enzymtheorie niet, want men kan aannemen, dat in al deze gevallen nog niet afgestorven protoplasma werkzaam is.

Een beter bewijs voor de opvatting, dat de drager der lichtfunktie uit één of meer endoenzymen bestaat, kan aan de lichtbakteriën worden ontleend. Hier is het lichten onafscheidelijk aan het lichaam der bakteriën verbonden en de afscheiding van een lichtend slijm komt daarbij nooit voor. Indien hier dus sprake is van een enzym als oorzaak der lichtkracht, dan kan dit niets anders dan een echt endoenzym zijn. Dat deze opvatting juist is, laat zich aantoonen door middel van ultraviolet licht. Het is namelijk mogelijk om de lichtbakteriën, door het schijnsel van een kwartslamp in den nekrobio-

---

[1]) R. Dubois, Leçons de Physiologie générale, Pag 450 en 524. Paris 1898. Teekeningen van het lichtorgaan van *Pholas* geeft Ulric Dahlgren, The production of light by animals. Franklin Institute February 1916, Pag 38.

[2]) Van telos, doel.

[3]) Science N. S. T. 44, Pag. 208, 440, 652, 1916.

tischen toestand over te voeren, waarbij zij hun reproduktievermogen verliezen, maar hun lichtkracht behouden. [1]) Wordt de bestralingstijd goed gekozen, dan kan de nekrobiose uren lang voortduren en men kan aantoonen dat *Ph. phosphoreum* in dien toestand een duidelijke verhooging van de lichtkracht kan ondergaan bij voeding met glucose. Juist dezelfde redeneering dus die aanleiding geeft om de alkoholfunktie der nekrobiotische gistcel [2]) als gedragen door een of meer enzymen, de zymase, te beschouwen, geldt dus ook ten opzichte van het verband tusschen de lichtfunktie en haar drager de luciferase. De nog onbekende „luciferine", welke, zooals gezegd bij *Ph. phosphoreum* uit glukose kan ontstaan, is het natuurlijke analogon van de „glukosefosforzure ester", dat is het substraat of enzymoteel, waarop bij de gistcel een der faktoren van de zymase past.

De nekrobiotische biergistcellen hebben hun semipermeabiliteit, hun reproduktievermogen en vermoedelijk de bewegelijkheid van hun protoplasma verloren, waarom zij door verschillende onderzoekers voor dood verklaard zijn. Dat de lichtbakteriën bij de nekrobiose in ditzelfde geval verkeeren is waarschijnlijk, maar verandering in permeabiliteit kon daarbij niet worden vastgesteld, omdat ook in den toestand van het normale leven veel affiniteit voor kleurstoffen bestaat. Het komt mij echter voor, dat het verlies der genoemde eigenschappen, juist wanneer het berust op onwerkzaam worden of op vernietiging van erféénheden of enzymen, zeer wel gepaard kan gaan met het aktief blijven van een ander deel van het protoplasma, zoodat dan niet gezegd kan worden, dat de cel in denzelfden zin „dood" is, als wanneer alle funkties ervan vernietigd zijn. Het belang van deze beschouwing is duidelijk, wanneer men bedenkt, dat de theorie van de faktoren of erféénheden juist bestaat in de onderstelling, dat van een vereeniging dezer éénheden krachten en werkingen kunnen uitgaan, die aan de éénheden op zich zelf niet eigen zijn. De aanwijzing van de eigenschappen, die aan bepaalde faktoren moeten worden toegeschreven, en van die welke op meerdere faktoren berusten, is het hoofdonderwerp van het tegenwoordige erfelijkheidsonderzoek, en de moeielijkheden waarop men daarbij stuit zijn wel bekend. Dat de enzymtheorie van de erfelijkheid hierbij nuttig zal kunnen worden is duidelijk.

---

[1]) Voor de bijzonderheden dezer proef zie Folia microbiologica, Bd. 4, Pag. 10, 1915.

[2]) De nekrobiotische gist wordt het gemakkelijkst door indrogen van ondergist verkregen (zie LEBEDEFF's Hefemacerationssaft, Folia microbiologica. Bd. 4, Heft 2, pag. 1, 1916). Door indrogen bij kamertemperatuur worden lichtbakteriën geheel donker en sterven.

Over het woord prikkelbaarheid behoef ik hier niet uitvoerig te spreken, daar dit begrip bij de lagere, onbewegelijke mikroben, alleen dan op iets waarneembaars berust, als men het wil doen samenvallen met vermogen tot stofwisseling en reproduktie.

In dit laatste verband herinner ik er aan, dat het eigenaardige karakter der werkingen, die het gevolg zijn van prikkels, daarin bestaat, dat zij voor bepaalde intensiteiten dier prikkels een optimum vertoonen, en dat dit ook juist de hoofdeigenschap der enzymwerkingen is. Men denke bijv. aan den overeenkomstigen invloed der temperatuur of van vergiften op het proces der celdeeling en op de amylolyse door diastase. Natuurlijk ligt daarin een der beste bewijzen voor de juistheid van mijn theorie.

De drager van de lichtfunktie als protoplasma beschouwd.
Verbinding der twee zienswijzen.

Voor het gebonden zijn der lichtfunktie van de lichtbakteriën aan levend protoplasma spreekt het volgende. Anaesthetica zooals chloroform, aether en zwavelkoolstof doen het lichten *bijna* geheel ophouden, terwijl dit na verdamping dezer stoffen weinig verminderd opnieuw begint. Verwarming met daarop volgende afkoeling werkt evenzoo. Door zuren en alkaliën verdwijnt de funktie zij keert na neutralisatie terug. Een hooge zoutconcentratie verduistert, na verdunning herstelt de lichtkracht zich volkomen. Blijvende vermindering der lichtkracht bij deze bewerkingen is het gevolg van het afsterven van enkele kiemen. De lichtkracht van bouillonkulturen, die lang en rustig hebben gestaan, ondergaat een plotselinge verhooging door mechanische prikkels zooals omschudden („prikkel”- of „schriklicht”). Een en ander gaf mij reeds lang geleden aanleiding om den drager van de lichtfunktie „photoplasma” te noemen.[1]) Ook voor *Noctiluca miliaris* is door Quatrefages aangetoond, dat het lichten uitgaat van het protoplasma, en wel van de protoplasmadraden, die van de celkern naar den wand loopen, zoodat de celwand van deze flagellaat onder het mikroskoop met lichtpunten blijkt bezet te zijn.[2]) Het plotselinge oplichten van *Noctiluca* bij het opschudden van daardoor lichtend zeewater is wel bekend; bij „vermoeienis” worden de cellen echter in hun geheel lichtend, wat Quatrefrages „pathologisch” licht noemt.

Een hoofdargument voor het opvatten van het photoplasma als

[1]) De Ingenieur, 15e Jaarg. Pag. 53, 27 Januari 1900.

[2]) Mémoire sur la phosphorescence de quelques invertebrés marins. Ann. d. sc. nat. Zoologie, 3me Sér. T. 14. Pag. 326, 1850. Zie ook R. Dubois. Leçons de Physiologie générale Pag. 498, Paris 1898.

levende stof ligt schijnbaar in het verband tusschen voeding en lichtfunktie. Deze funktie toch kan, indien peptonen in voldoende hoeveelheid voorhanden zijn, belangrijk verhoogd worden door allerlei stikstofvrije of andere stikstofhoudende verbindingen, zooals glukose, levulose, glycerine, malaten, asparagine, en vele andere stoffen, die niet als prikkels werken maar evenals bij het normale ademhalingsproces oxydeeren tot koolzuur, water en ammoniak. Peptonen alleen kunnen door het photoplasma ook afgebroken worden, eveneens onder vorming van ammoniumcarbonaat, koolzuur en water. De lichtfunktie blijkt dus op overeenkomstige wijze aan het „photoplasma" gebonden als het ademhalingsproces in het algemeen aan het protoplasma, zoo dat men zeggen kan, dat het photoplasma een deel uitmaakt van het gezamelijke ademhalingsprotoplasma der lichtbakteriën.

Bij oppervlakkige beschouwing schijnt hier het eigenlijke kriterium der enzymwerkingen, namelijk, dat het enzym alleen kan inwerken op een specifiek substraat, dus niet van toepassing, en men denkt daarbij veeleer aan een van het levend protoplasma uitgaand katabolisme. Maar als men nagaat wat eigenlijk onder een katabolisme te verstaan is, dan is reeds in verschillende gevallen gebleken, dat het berust op de samenwerking van meerdere faktoren.

Dit nu is juist het geval bij het ademhalingsproces, dat ingewikkelder is dan vroeger werd aangenomen. Door het enzymologisch onderzoek is namelijk gebleken dat het ademhalingsprotoplasma uit faktoren bestaat, waarvan men reeds verscheidene heeft leeren kennen en die in het algemeen oxydasen genoemd worden, terwijl men daaronder peroxydasen, oxygenasen en oxydonen onderscheiden heeft.

Daar deze stoffen het karakter van echte enzymen bezitten en slechts bepaalde stoffen of slechts enkele naverwante stoffen oxydeeren, moet men wel aannemen, dat er bij het ademhalingsproces een voorbereiding van het voedsel, een bereiding van enzymsubstraten of enzymoteelen plaats heeft, waardoor dat voedsel geschikt wordt om door de verschillende faktoren, op wier samenwerking het ademhalingsproces berust, geoxydeerd te worden. De samenstelling, ook van het photoplasma uit verschillende van zulk ademhalingsfaktoren of oxydasen wordt daardoor waarschijnlijk, en de gemakkelijkheid, waarmede bij de mutatieproeven erfelijk standvastige rassen van zeer ongelijke lichtkracht (maar, naar het schijnt, steeds van gelijke lichtkleur) worden verkregen, hangt daarmede blijkbaar samen. Dat de faktoren van het photoplasma der verschillende in de natuur voorkomende lichtbakteriën niet altijd dezelfde zijn, volgt

uit vroeger beschreven proeven betreffende het verband tusschen voeding en lichtontwikkeling.[1])

Zoo moet in het photoplasma van *Bacterium phosphoreum* een oxydase aanwezig zijn, die ingesteld is op een substraat, dat uit peptonen alleen kan ontstaan, en een andere oxydase, waarvan het substraat een onbekende stof is, die uit pepton en suikers en wellicht ook uit pepton en glycerine kan worden gevormd; in het photoplasma van *Bacterium splendidum* moet nog een andere faktor voorkomen, die ingesteld is op een nog onbekend substraat, dat uit pepton en manniet ontstaat. Eigenlijk zijn deze nog hypothetische enzymsubstraten niets anders dan verschillende „luciferinen" in den zin van Dubois, waarbij men bedenke, dat Dubois van zijn luciferine der pholaden in het geheel niets weet, terwijl men voor de lichtbakteriën ten minste de stoffen kan aanwijzen, die tot de vorming ervan moeten dienen.

Naar het mij voorkomt is er dan ook niet aan te twijfelen, dat het gelukken kan door goede voedingsproeven tot een zeer volledige „faktoranalyse" van het photoplasma te komen. Bij andere bakteriën zullen de moeielijkheden grooter zijn, maar bij *B. prodigiosum*, waar de rassenvorming ook gemakkelijk plaats vindt, zal een overeenkomstige faktoranalyse van het „chromoplasma" mogelijk zijn, daar het, zooals ik vroeger heb bewezen, op gelijksoortige wijze als het photoplasma beantwoordt aan eenige erféénheden, die blijkbaar het karakter van oxydasen, dus van enzymen bezitten.

Op de analogie tusschen de woorden „alkoholprotoplasma" en „zymase" heb ik reeds gewezen.

Het is derhalve wel duidelijk, dat de opstelling van begrippen zooals „chromoplasma" en „photoplasma" geheel juist kan zijn, zonder dat daardoor in het minst afbreuk gedaan wordt aan de algemeenere beschouwing, volgens welke het protoplasma uit enzymen is opgebouwd.

Daar niets aan de verdere generalisatie dezer opvatting in den weg staat, is het geoorloofd de erféénheden in het algemeen als enzymen en de enzymen als erféénheden te beschouwen, twee verschillende namen dus voor de molekulen of micellen van het levende gedeelte van het protoplasma.[2])

Celwandfaktoren zijn enzymen.

Bij de hoogere planten en dieren berust de faktoranalyse op

[1]) Voor *Ph. phosphoreum*, Aliment photogène, Archives Neérl. 1851. Voor *Ph. splendidum*: Folia microb. 1915.

[2]) Deze theorie heb ik het eerst opgesteld in: „Mutation bei Mikroben". Folia microbiologica, Bd. 1. Pag. 2, 1912.

kruisingsproeven tusschen de vormen, waarvan men wil vaststellen, door welke erféénheden of faktoren zij van elkander verschillen. Bij de bakteriën en de andere mikroben, waar de sexualiteit ontbreekt, kruising dus niet kan worden toegepast, is faktoranalyse dan mogelijk, wanneer bepaalde eigenschappen door mutatie in faktoren kunnen ontbonden worden, waarop ik reeds in het voorgaande heb gewezen. De terugbrenging der erféénheden tot bepaalde enzymen kan eveneens tot faktoranalyse voeren, en wel door toepassing van de eigenschap der enzymen om slechts op bepaalde stoffen te werken. Tot nadere toelichting het volgende, dat op een morfologische eigenschap der cel betrekking heeft.

De vorming van den celwand wordt gewoonlijk opgevat als een funktie van het wandstandig protoplasma en berust natuurlijk op de werking van faktoren of erféénheden. Bij sommige mikroben laat zich echter gemakkelijk aantoonen, dat dit proces door één of meer enzymen wordt veroorzaakt. Met bijzondere duidelijkheid is dit het geval, wanneer de wandstof uit levulan bestaat. Dit lichaam ontstaat uit rietsuiker (en veel moeilijker uit raffinose) maar volstrekt niet uit andere stoffen, en vormt wandstof bij vele soorten van sporenvormende bakteriën zooals de gewone hooibakterie, *B. mesentericus*, echter alleen dan, indien deze bakterie met rietsuiker gevoed wordt. Het levulan ontstaat daarbij op twee wijzen: het kan òf aan het bakteriënlichaam als slijmwand verbonden blijven, in welk geval zich op rietsuiker-agarplaten sterk opzwellende koloniën ontwikkelen, òf het levulan komt buiten de bakteriënlichamen tot afzetting. Geschiedt dit laatste in een agarvoedingsbodem, dan ontstaat het merkwaardige verschijnsel, dat ik als ,,emulsieverschijnsel'' beschreven heb. [1]) De verklaring daarvan werd gegeven door de ontdekking van een specifiek op rietsuiker inwerkend enzym, de viscosaccharase, waardoor de rietsuiker in het niet voor diffusie vatbare levulanslijm wordt veranderd. Dit synthetisch of polymeriseerend werkende enzym, dat ook saccharo-levulanase zou kunnen genoemd worden, is dus blijkbaar een faktor van het zeer eenvoudige faktoren-complex, dat de wandvorming beheerscht. Dat het daarvan niet de eenige faktor is, volgt uit het feit, dat sommige levulanbakteriën, bijv. juist de genoemde hooibakterie, wanneer zij met andere suikers dan rietsuiker gevoed worden, een andere niet slijmige wandstof, waarschijnlijk cellulose, voortbrengen die ook in geringe hoeveelheid uit de rietsuiker zelve, dus naast het levulan

1) Deze Verslagen 9 Februari en 12 Mei 1910. Folia microbiologica Bd. 1. Pag. 382, 1912.

ontstaat. Of bij de cellulosevorming één of meer dan één faktoren werkzaam zijn, is voorloopig nog onbekend maar zal door verdere voedingsproeven kunnen uitgemaakt worden. Daar het evenwel vast staat, dat de hierbij betrokken enzymen of faktoren de cel niet door diffusie kunnen verlaten, en er geen grond is om aan te nemen, dat de viscosaccharase, die wel naar buiten diffundeert, uit meer dan één enzym of faktor bestaat, bewijst dit geval tevens, dat het langs dezen weg zeer wel mogelijk is om de afzonderlijke faktoren van een schijnbaar zoo ingewikkeld proces als de celwandvorming te leeren kennen. Zonder geleid te worden door het enzymbegrip, verkeert men daarentegen bij de faktoranalyse door kruisingsproeven bij hoogere planten en dieren, steeds in het onzekere, of een als enkelvoudig beschouwde faktor niet bij voortgezet onderzoek zal blijken samengesteld te zijn uit andere, nog onbekende faktoren.

Wat het dextran betreft heb ik aangetoond, [1]) dat dit een met het levulan vergelijkbare wandstof is, die eveneens alleen uit rietsuiker ontstaat, maar gevormd wordt door sommige melkzuurfermenten behoorende tot het physiologische geslacht *Lactococcus*. Het dextran ontstaat echter in het geheel niet buiten en onafhankelijk van de cel, zooals dit bij het levulan mogelijk is, maar uitsluitend aan de oppervlakte van de buitenlaag van het protoplasma. Door de kennis van het bestaan van het levulan en het daaraan beantwoordende enzym wordt het nu mogelijk ook den oorsprong van het dextran beter te begrijpen, want de analogie van de eigenschappen van beide stoffen is zoo groot, dat tot overeenkomstige vormingswijze moet besloten worden. Het is derhalve zeer waarschijnlijk, dat ook het dextran ontstaat onder den invloed van een enkelen faktor of specifiek enzym, dat saccharo-dextranase zou kunnen genoemd worden en dat als endoenzym de cel niet kan verlaten.

De vorming van den slijmwand bij *B. prodigiosum viscosum* [2]) moet onder den invloed van minstens twee faktoren staan, die verschillend zijn van de levulanase en de dextranase, want het door deze bakterie gevormde slijm behoort tot de celluloses of cellulan slijmen. Dat daarbij, behalve de slijmfaktor, die cellulanase zou kunnen genoemd worden, nog een geheel andere faktor werkzaam is, vloeit voort uit de volgende waarnemingen. Voedt men deze bakterie met glukose, rietsuiker, maltose of laktose, dan ontstaat

[1]) Die durch Bakterien aus Rohrzucker erzeugten schleimigen Wandstoffe. Folia microbiologica Bd. 1. Pag. 392, 1912.

[2]) *B. prodigiosum viscosum* is geen natuurvorm maar een door mutatie uit *B. prodigiosum* gemakkelijk te verkrijgen mutant of ras. Folia microbiologica Bd. 1 Pag. 35, 1912.

uit deze stoffen gemakkelijk wandslijm. Vele andere soorten hebben ditzelfde vermogen, bijvoorbeeld *Aerobacter viscosus* en *Bacillus polymyxa*. Maar *B. prodigiosum viscosum* kan ook uit eiwitachtige stoffen alleen, zooals uit gelatine of pepton, slijm voortbrengen, hetgeen *B. polymyxa* en *A. viscosus* volstrekt niet kunnen doen. Daar het nu geheel onaannemelijk is, dat één en dezelfde faktor of enzym zoowel uit eiwitten als uit koolhydraten celluloseslijm zou kunnen voortbrengen moet men aannemen, dat *B. prodigiosum viscosum* nog een specifieken faktor bevat, die uit de eiwitachtige stof een enzymsubstraat kan afsplitsen, dat door den wandvormenden faktor in celluloseslijm wordt veranderd. Deze eiwitsplitsende faktor is echter in *B. polymyxa* en *A. viscosum* niet aanwezig. *B. prodigiosum viscosum* is dus een mutant, die door minstens twee faktoren van den hoofdvorm verschilt, en er zal nog een andere mutant kunnen gevonden worden, die den faktor mist om uit eiwitten een enzymoteel of enzymsubstraat voort te brengen, dat in slijm kan worden omgezet, dat is een mutant, die wel uit koolhydraten maar niet uit eiwitten slijm zal kunnen vormen.

Een groot aantal andere voorbeelden, die aantoonen, dat de beschouwingen betreffende de analyse der erféénheden of faktoren alleen betrekking hebben op enzymen, zouden hieraan kunnen toegevoegd worden.

Begrenzing van het enzymbegrip.

Het komt mij voor, dat het voorafgaande geschikt is om het enzymbegrip beter te begrenzen dan dit tot nu toe is geschied. Ik zal dit door een paar voorbeelden toelichten, namelijk voor de cecidiën of gallen en voor enkele stoffen, die in de immuniteitsleer fermenten worden genoemd. Wat de cecidiën betreft het volgende.

Vroeger heb ik aangetoond, dat de bij de galvorming plaats hebbende verandering der plant niet erfelijk is. Zoo kunnen zich uit de gallen van *Nematus viminalis*, op vochtig zand bewaard, geheel normale wortels van den drager *Salix amygdalina* ontwikkelen, en uit die van de galwesp *Neuroterus lenticularis* aan eikebladen, geheel normale eikewortels. [1])

Uit de okselknoppen van de roosgal door *Cecidomyia rosaria* aan *Salix alba* gevormd, heb ik geheel normale wilgeboompjes opgekweekt; evenzoo uit den knop in de gal van *Cecidomyia poae* normale planten van *Poa nemoralis*. Door krachtig snoeien van takjes van *Rosa canina*, waaraan zich bedeguaren ontwikkelden, voortgebracht

[1]) Slechts zeer weinige *Lenticularis*-gallen bezitten deze eigenschap; waarschijnlijk hangt zij samen met de plaats, waar de gal op het eikeblad ontstaat.

door de galwesp *Rhodites rosae*, gelukte het de wonderlijke aanhangselen dezer gal, in kleine, lang gesteelde, enkelvoudige groene blaadjes te veranderen, waarvan de anatomische struktuur volkomen identisch is met die van het blad, waaruit de gal ontstaat.

Deze voorbeelden, die ik gemakkelijk met andere zou kunnen vermeerderen, leeren, dat bij de galvorming twee stofgroepen betrokken zijn: het protoplasma der plant, dat uit de onveranderde erféénheden bestaat, en een uit het ei van zaag- of galwesp of uit de *Cecidomyia*-larve afkomstige stof, die blijkbaar het karakter van een of meer enzymsubstraten heeft, waarop de erféénheden der plant als enzymen passen. Het is echter duidelijk, dat ook de bij de galvorming betrokken erféénheden zelve, ten minste bij de morfologisch hooger staande gallen, onder den invloed van het galdier zich sterker vermeerderen, in elk geval in grooter hoeveelheid aanwezig zijn dan onder normale omstandigheden. Hierdoor komt men tot het besluit, dat of de enzymsubstraten als voedsel kunnen dienen, voor de erféénheden of enzymen, die erop zijn ingesteld en tot de vermeerdering dezer éénheden aanleiding geven, of dat het galdier, behalve de enzymsubstraten ook nog „enzymositen", [1]) dat is afzonderlijk enzymvoedsel aanvoert. De laatste onderstelling zal wel de juiste zijn, want de echte enzymen zijn bij hun ontstaan volstrekt niet afhankelijk van de aanwezigheid hunner substraten, gelijk bijna elke kultuurproef met mikroben kan leeren. [2]). Veeleer is te verwachten, dat de enzymositen overeenstemmen met de ABDERHALDEN'sche bouwsteenen van de soorteigen eiwitten, dat is van het protoplasma. Dat, wanneer deze bouwsteenen, deze enzymositen, verschillend zijn, ook verschillende erféénheden of protoplasmasoorten tot ontwikkeling zullen komen uit het bonte mengsel dezer éénheden, waaruit het protoplasma der plant is opgebouwd, is te verwachten. Bedenkt men namelijk op welk een merkwaardige wijze bij elektieve kultuurproeven met mikroben, de daarbij verkregen mikrobenflora's met het aangeboden voedsel samenhangen, dan is men overtuigd, dat dit ook wel het geval zijn zal in de zoo subtiele wereld der protoplasmamolekulen.

Dat uit het galdier geen enzymen in de plant overgaan is in overeenstemming met het feit, dat vreemde exoenzymen gewoonlijk niet in levende cellen naar binnen dringen. De diastase, die bij de gistfabrikage in groote hoeveelheid in het voedsel voorkomt en zeer

---

[1]) Sitos, voedsel.

[2]) Vele diastatische bakteriën brengen bijv. diastase voort ook zonder de aanwezigheid van amylum in hun voedsel. Dit moet natuurlijk door een afzonderlijke proef worden vastgesteld, omdat het amylum het eenige bekende reaktief op de diastase is; de literatuur bewijst, dat dit door de onderzoekers dikwijls is vergeten.

gemakkelijk door membranen diffundeert, wordt volstrekt niet door de gistcel opgenomen. Opzettelijke proeven met andere exoenzymen en allerlei andere mikroben hebben mij steeds hetzelfde geleerd. Aan de mogelijkheid van een door diffusie veroorzaakte beweging van endoenzymen, van de eene levende cel in de andere kan natuurlijk in het geheel niet worden gedacht. [1])

Daarentegen zijn op het gebied der immuniteit feiten bekend, die bewijzen, dat levende cellen somtijds uit hun omgeving enzymen kunnen opnemen.

In die gevallen, namelijk, waarin verworven immuniteit erfelijk is, moeten de daarbij betrokken stoffen wel tot de erféénheden, dus tot de enzymen behooren. Zij leveren tevens het bewijs, dat DARWIN's meening, volgens welke de „gemmules" zijner pangenesis-hypothese in het organisme rondstroomen, tenminste wat de hoogere dieren betreft, in zekere gevallen juist is. Bij niet overerfelijke immuniteit zouden rondstroomende enzymen kunnen voorkomen, die niet door de voortplantingscellen worden opgenomen.

De meening van VAN CALCAR, dat de antilichamen der serologen fermenten, dat is enzymen zijn, is dus zonder twijfel juist. Hij zegt: [2]) „Welke immuniteitsreactie men ook onderzoekt telkens en telkens blijkt weer, dat men nooit uit het oog mag verliezen, dat het geheele verloop dezer reacties afhankelijk is van de werking van twee stoffen, waarvan de eene in alle opzichten het karakter van een ferment draagt, de andere dat van een substraat, dat door het ferment moet worden ontleed, waarop dit ferment dus als het ware dient te passen. De fermentachtige stoffen bestempelt men met den naam van antilichamen, de verschillende substraten, waarop deze antilichamen moeten inwerken dragen den naam van antigenen."

Naar mijne meening is er evenwel geen voldoende reden om ook de antigenen en het complement enzymen te noemen, hetgeen echter door verschillende onderzoekers gedaan wordt.

Wil men deze stoffen, alleen op grond van hun werking bij inspuiting

[1]) Dat endoenzymen, zooals de zymase, in geringen graad voor gewone diffusie geschikt zijn (dat geheel iets anders is dan het binnendringen in levend protoplasma), houd ik intusschen niet voor onmogelijk. Gelatine kan eenigermate in agar intrekken; evenzoo stijfsel en zelfs de kooldeeltjes van Oostindische inkt. Ook goud schijnt in lood te kunnen dringen Bij het photoplasma der lichtbakteriën is echter niets van geschiktheid tot diffusie te bemerken. Wellicht echter berust het „pathologische licht" van *Noctiluca miliaris*, door QUATREFAGES ontdekt, op het uittreden van „photoplasma" of „luciferase" uit de protoplasmadraden in het celsap, waarin de „luciferine" dan opgelost zou moeten zijn.

[2]) R. P. VAN CALCAR, Voordrachten over algemeene biologie, Pag. 182 en 188, Leiden 1915.

in den bloedstroom van hoogere dieren, als enzymen beschouwen, dan zal men, om consequent te blijven, ook toxinen en zelfs sommige gewone coaguleerbare eiwitten tot de enzymen moeten brengen, waardoor dit woord alle waarde zou verliezen. Terwijl men in de beschrijvende natuurwetenschappen zelfs kleine verschillen tusschen verwante natuurvoorwerpen, zeer terecht tracht vast te leggen door bepaalde namen aan de dragers te geven, is het onjuist aan de woorden enzymen en fermenten een telkens veranderende en ruimere beteekenis toe te kennen, die niet meer strookt met het oorspronkelijke begrip.

De eenige plaats in de literatuur, welke mij tot dusver bekend is geworden, waar een hypothese wordt aangegeven, die eenigszins met mijn. opvatting verwant is, is te vinden bij BATESON. Hij zegt [1]: „Ueber die physikalische Natur der Erbeinheiten können wir noch nichts aussagen; die Folgeerscheinungen ihrer Gegenwart sind aber in so vielen Fällen mit den durch Fermente hervorgerufenen Wirkungen vergleichbar, dass wir mit einiger Bestimmtheit annehmen, dass die Fähigkeiten einiger Erbeinheiten im wesentlichen in der Bildung bestimmter Substanzen besteht, welche in der Art von Fermenten wirken".

Ofschoon de waarnemingen, waarop deze uitspraak gegrond is met de enzymtheorie in overeenstemming zijn, en zelfs tot de opstelling ervan hebben bijgedragen, is het duidelijk, dat BATESON zich op een geheel ander standpunt plaatst dan ik.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS doet eene mededeeling over: *„De verplaatsbaarheid van dispersielijnen in absorptiespectra"*.

Zeven oorzaken zijn tegenwoordig bekend, waardoor in het spectrum lijnverplaatsingen kunnen ontstaan: (1) relatieve beweging van lichtbron en waarnemer, (2) snelle verandering van de middenstof tusschen bron en waarnemer, (3) drukking in de lichtbron, (4) magnetisch veld, (5) electrisch veld, (6) gravitatieveld, (7) anomale dispersie. De Heer B. J. VAN DER PLAATS te Utrecht is er onlangs in geslaagd, lijnverplaatsingen door anomale dispersie in volkomen regelbare sterkte bij alle lijnen van een spectrum te doen ontstaan. De hier volgende mededeeling heeft eensdeels ten doel, overeenkomstig den wensch van den Heer VAN DER PLAATS aan de Akademie enkele voorloopige resultaten voor te leggen van het onderzoek dat

[1]) W. BATESON, MENDEL's Vererbungstheorien, Pag. 269, 1914 (Vertaling der Engelsche editie van 1909).

binnenkort door hemzelf uitvoerig in zijn proefschrift zal worden gepubliceerd, anderdeels in het licht te stellen, waarom het noodig was dat zekere onbetwijfelbare gevolgtrekkingen uit de dispersietheorie proefondervindelijk werden gestaafd. Bovendien zullen eenige nieuwe gronden worden aangevoerd voor de hypothese, dat Fraunhofersche lijnen in hoofdzaak *dispersielijnen* zijn.

De astrophysicus, die voor lijnverschuivingen in de spectra van hemellichamen uit de vele denkbare verklaringen de meest waarschijnlijke moet zoeken, staat dikwijls voor een moeilijke keus. Als oorzaken van zeer groote verschuivingen (verscheidene Ångströmsche eenheden) komen voor hem eigenlijk alleen het Doppler-effect en de anomale dispersie in aanmerking; maar veelal heeft hij te doen met plaatsverschillen van slechts enkele duizendsten Å, waarbij het toch hoogst gewichtig zijn kan, de juiste interpretatie te vinden; en dan dient hij niet alleen op al de zeven genoemde mogelijkheden de aandacht gevestigd te houden, maar bovendien te bedenken dat persoonlijke fouten en psychische momenten bij de metingen een zekeren invloed hebben kunnen doen gelden.

De keuze wordt vereenvoudigd door het feit, dat men sommige oorzaken van verplaatsing herkennen kan aan speciale bijkomende verschijnselen, die zich niet zouden voordoen als de verplaatsing een andere oorzaak had. Zoo hebben wij: de splitsingen en polarisatieverschijnselen in de bovengenoemde gevallen (4) en (5), de evenredigheid der verplaatsing met de golflengte in geval (6). Ook voor geval (7) is het ons in 1913 gelukt, zulk een criterium te vinden.

Een kenmerk van verschuivingen tengevolge van anomale dispersie is namelijk, dat daarbij onder zekere omstandigheden een „wederzijdsche invloed” van verschillende golfstelsels moet bestaan, die zich o.a. openbaren kan als een schijnbare onderlinge afstooting van naburige lijnen.

De theoretische gronden voor het verwachten van dit verschijnsel bij Fraunhofersche lijnen heb ik in vroegere mededeelingen aangegeven [1]). Zelfs indien de lichtverdeeling in Fraunhofersche lijnen overeenkomstig onze opvatting inderdaad op anomale dispersie berust, zal de bedoelde onderlinge werking uit den aard der zaak nog maar zeer gering kunnen zijn. Ontsnapte zij voorloopig aan de waarneming, dan ware het niettemin zeer wel mogelijk dat anomale dispersie toch nog een zeer groote rol in de zonneverschijnselen speelde; men zou dan alleen dit directe bewijs daarvoor nog niet bezitten. Wordt echter de aanwezigheid van het bedoelde effect, dat men op

[1]) Verslag Afd. Natuurk. XXII, 1248, (1914); XXIV, 684, (1915); Astroph. Journ. **40**, 11, (1913); **43**, 50, (1916).

andere wijze dan door anomale dispersie moeilijk kan verklaren, met zekerheid vastgesteld, dan zal daarin een bijzonder krachtige steun gelegen zijn voor onze hypothese aangaande het wezen der Fraunhofersche lijnen.

Volgens onderzoekingen nu van ALBRECHT [1]) wordt de voorspelde wederzijdsche invloed bij lijnparen in het zonnespectrum inderdaad aangetroffen, tot in bijzonderheden overeenstemmend met de eischen der anomale dispersietheorie.

ST. JOHN [2]) heeft de uitkomsten van ALBRECHT gecontroleerd, met nieuwe metingen aangevuld, en de door ALBRECHT genoemde *feiten* eigenlijk volkomen bevestigd gevonden; maar hij bestrijdt krachtig de gegeven verklaring. Het geheele verschijnsel schrijft hij toe aan systematische fouten in de golflengte-tabellen van ROWLAND, omdat bij wijziging in de methode van meten de beweerde invloed vermindert of zelfs verdwijnt.

KING [3]) is nog verder gegaan in de bestrijding van het denkbeeld dat anomale dispersie verplaatsing van lijnen zou kunnen veroorzaken. Hij beschrijft proeven waaruit hij de conclusie trekt, dat zelfs onder omstandigheden, die hij zeer gunstig acht voor het optreden van „wederzijdschen invloed", geen spoor van afstooting bij naburige lijnen zichtbaar is, ja dat eer een schijnbare aantrekking wordt waargenomen.

KING en ST. JOHN besluiten beiden, dat er geen aanwijzing is om bij lijnverplaatsingen aan anomale dispersie eenigen invloed van beteekenis toe te kennen.

In de volgende bladzijden wordt hunne bewijsvoering nader onderzocht en zal blijken dat wij, mede op grond van proefnemingen, tot het tegenovergestelde besluit moeten komen.

Onderzoek van dispersielijnen in het laboratorium.

Dat het aan KING niet gelukt is, met de bewonderenswaardig door hem ingerichte laboratorium-hulpmiddelen van het Mount Wilson Solar Observatory den invloed zichtbaar te maken, dien lijnen ten gevolge van anomale dispersie kunnen hebben op de plaatsen van naburige lijnen, moet worden toegeschreven aan de verkeerde voorstelling welke hij zich blijkbaar van het te verwachten verschijnsel gemaakt heeft. Hij zegt:

„According to a theory advanced by JULIUS, when anomalous

[1]) ALBRECHT, Astroph. Journ. **41**, 333, (1915); **44**, 1, (1916).

[2]) ST. JOHN, Contrib. Mt. Wilson Sol. Obs. N⁰. 123; Astroph. Journ. **44**, 265, (1916).

[3]) KING. Proc. Nation. Acad. of Sc. **2**, 461, (1916). Communications N⁰. 31.

dispersion is active, two vibrations of nearly the same period affect each other in such a way as to cause a mutual repulsion between the corresponding spectrum lines."

Dit nu is een vergissing. Door LARMOR [1]), niet door mij, is het denkbeeld geopperd, dat van zeer naburige lijnen de afstand der *kernen* iets grooter zou moeten zijn dan beantwoordt aan de plaatsen dier lijnen indien zij vrij stonden. De eigen periode van een vibrator hangt namelijk af van den brekingsindex van het omringende medium (op de wijze van het zoogenaamde druk-effect); en doordat deze brekingsindex sterk geinfluenceerd wordt door de aanwezigheid van andere vibratoren met een slechts weinig afwijkende periode, ontstaat volgens LARMOR wederzijdsche afstooting der lijnen.

De omstandigheden die KING bij zijne experimenten verwezenlijkt had, stelden hem in staat de waarneembaarheid van *dit* effect op de proef te stellen. Het resultaat was negatief. LARMOR zelf had trouwens in de tweede van zijne bovenbedoelde mededeelingen reeds opgemerkt, dat men op grond van een ruwe schatting van de grootheden die het effect bepalen, geen merkbare waarde voor de afstooting mocht verwachten. En verder zegt LARMOR nog: ,,This mutual repulsion of intrinsic periods seems to be a different thing from the mutual influence of adjacent lines that is asserted by W. H. JULIUS" — voorzeker een gerechtvaardigd vermoeden.

KING onderzocht in den electrischen oven mengsels van chromium (waarvan de lijnen λ 4254, λ 4275, λ 4290 sterke anomale dispersie vertoonden) met titanium en calciumdampen. Er bevond zich een titaniumlijn op 0.21 Å afstand van λ 4275, en een calcium- en een titaniumlijn op resp. 0.36 Å en 0.65 Å van λ 4290 verwijderd. De golflengten van die calcium- en titaniumlijnen werden nu vergeleken met hare golflengten in het emissiespectrum bij afwezigheid van chromium. De nabijheid van de sterke chromiumlijnen bleek niet alleen geen spoor van vergrooting, maar zelfs een *verkleining* van den afstand ten gevolge te hebben. Dit laatste verschijnsel beschouwt KING echter niet als een reëele onderlinge inwerking, doch als een gevolg van de ongelijke lichtsterkte aan de twee kanten van de zwakke lijnen, waardoor een systematische instellingsfout werd gemaakt in den zin van nadering tot de sterkere, verbreede lijn. (Op deze instellingsfout komen wij op blz. 1253 terug).

Het is duidelijk dat deze uitkomsten van KING geen enkel argument leveren tegen het bestaan van de lijnverschuivingen door anomale dispersie, waarop door mij de aandacht was gevestigd, ver-

[1]) LARMOR, Mutual repulsion of contiguous spectrum lines. The Observatory **39**, 103 and 230, (1916).

schuivingen die slechts voortvloeien uit verandering der lichtverdeeling in de, meestal enge, dispersiebanden of dispersielijnen welke de eigenlijke absorptielijnen omhullen. KING's proeven waren er niet op ingericht, de dispersielijnen zichtbaar te maken.

Dispersielijnen zijn namelijk volstrekt niet in *elk* absorptiespectrum voldoende sterk aanwezig om te kunnen worden waargenomen. Daartoe moeten zekere omstandigheden verwezentlijkt zijn. De bestudeering der zonneverschijnselen heeft mij geleid tot het stellen van de hypothese dat wij in het zonnespectrum een geval voor ons hebben, waarin de dispersielijnen wèl een belangrijke rol spelen [1]). Bij verschillende gelegenheden werd daarna reeds onderzocht, welke eigenschappen der Fraunhofersche lijnen zoo al te verklaren zijn als men aanneemt, dat de duisterheid van die lijnen voor een aanmerkelijker gedeelte aan anomale dispersie dan aan zuivere absorptie te danken is.

Wil men de bedoelde dispersie-effecten ook in het laboratorium bestudeeren, dan is natuurlijk een eerste eisch dat men zorgt, inderdaad met lijnen te doen te hebben waarin de lichtverdeeling in hoofdzaak door anomale dispersie wordt beheerscht — een voorzorg die KING niet genomen heeft.

Bij proeven betreffende anomale dispersie in natriumdamp, door mij in 1906 beschreven [2]), waren de omstandigheden zóó gekozen, dat de lichtverdeeling in de omgeving der D-lijnen nagenoeg geheel door straalkromming in dichtheidsgradienten werd geregeld, zoodat men met bijna zuivere dispersiebanden te doen had. Fig. ε op Pl. II van de bedoelde verhandeling bijv. doet zien dat D_1 en D_2, hoewel elk naar beide kanten sterk verbreed, asymmetrisch zijn en in de tusschenruimte meer licht overlaten dan het geval zou zijn indien er slechts superpositie was van twee gedeeltelijk over elkaar grijpende symmetrische absorptiebanden. Dezelfde asymmetrie vertoonen de figuren ζ en η op Pl. I in geringere mate. Den waren afstand der lijnkernen kan men zien aan de fijne natriumlijnen in de onderste strooken der figuren (absorptiespectra die gelijktijdig, door dezelfde spleet, werden gefotografeerd) en bovendien aan de plaatsen der lichte pieken, die willekeurig waren voortgebracht binnen de donkere dispersielijnen [3]). Waren die kenteekenen er niet, en had men den afstand der lijnen willen meten door in te stellen op de „zwaarte-

[1]) Versl. Afd. Natuurk. XIII, 26, (1905).

[2]) Versl. Afd. Natuurk. XV, 317, (1906); Astroph. Journ. 25, 95, (1907). De in den text aangeduide figuren zijn in het Astroph J.: θ op Pl. VI, ζ_2 en ζ_3 op Pl. V.

[3]) Zie de verklaring daarvan in de genoemde verhandeling.

punten" der duisterheid, dan zou die afstand grooter uitgevallen zijn dan de werkelijke afstand van D_1 tot D_2.

Natriumdamp vertoont onder gemakkelijk te verwezenlijken omstandigheden zóó sterke anomale dispersie, dat zelfs lijnen op 6 Å afstand van elkander gelegen, de onderlinge afstooting harer dispersiebanden nog duidelijk te zien gaven. Wil men ook in andere, minder handelbare, gevallen echte dispersielijnen doen ontstaan en hare willekeurig voort te brengen verschuivingen bestudeeren, dan moet men òf met ontzettend groote dampmassa's werken, òf tot veel fijnere waarnemingsmethoden zijn toevlucht nemen. Het laatste middel is natuurlijk eenvoudiger.

Door Van der Plaats is een methode bedacht en uitgewerkt om spectra te maken, waarin de lijnen nagenoeg zuivere dispersielijnen zijn. Ik ben in de gelegenheid U enkele fotografieën van zulke spectra te toonen. Al zijn dit nog niet de definitieve uitkomsten van het onderzoek, het karakter van de verschijnselen is er duidelijk in te zien. Deze dispersiespectra behooren bij de absorptiespectra van stikstofdioxyde en van jodiumdamp. Elk van de honderden lijnen dier beide dampen geeft tot anomale dispersie van de haar omringende lichtsoorten aanleiding, en met elke absorptielijn correspondeert dientengevolge een lijn in het dispersiespectrum, die meer of minder verschoven is. Men kan de verschuivingen zoowel naar den kant der grootere als naar den kant der kleinere golven doen plaats hebben, en heeft de grootte der verplaatsingen zoowel als de verhoudingen der lichtsterkten in de verschillende deelen van het spectrum binnen zekere grenzen geheel in de hand, zoo zelfs, dat men het karakter van de spectra haast tot onherkenbaar wordens toe veranderen kan.

Elk van de opnamen die ik U toon bestaat uit 5 strooken, geleverd door vijf deelen van dezelfde spleet. De twee buitenste strooken vertoonen, ter vergelijking, het ongewijzigde absorptiespectrum; de middelste strook geeft een dispersiespectrum te zien waarin de lijnen naar den kant der kleinere golflengten verplaatst zijn; in de tweede en vierde strook zijn de dispersielijnen naar den kant der grootere golflengten verschoven. De intensiteitsverhoudingen in de verschillende deelen der spectra zijn tevens aanmerkelijk gewijzigd.

Aangaande de methode waarop de nagenoeg zuivere dispersielijnen verkregen worden, wil ik hier slechts mededeelen dat zij berust niet op verschillen in de *richtingen* der lichtstralen die anomale dispersie ondergaan, maar op hunne verschillen in *voortplantingssnelheid*. Absorptie- en dispersielijnen werden van elkander gescheiden met behulp van den interferentiaal-refractor. Zooals gezegd,

zijn de resultaten slechts voorloopige; het onderzoek wordt door VAN DER PLAATS met betere hulpmiddelen voortgezet en de verschuivingen zullen worden gemeten bij grootere uiteenspreiding.

Dat dispersielijnen verplaatsbaar zijn, en dat de grootte der verplaatsingen samenhangt met den vorm der dispersiekromme van het medium in de naaste omgeving der beschouwde lijnen, behoeft thans niet meer te worden betwijfeld.

Zijn Fraunhofersche lijnen dispersielijnen?

De tweede vraag die wij willen behandelen is nu deze: blijft het met het oog op een samenhangende interpretatie van zonneverschijnselen nuttig, aan te nemen dat Fraunhofersche lijnen in hoofdzaak dispersielijnen zijn, of is ST. JOHN er in geslaagd aan te toonen, dat deze hypothese onhoudbaar is?

In „Contributions from the Mount Wilson Solar Observatory N°. 123[1]) meent ST. JOHN gegeven te hebben: „Observational evidence that the relative positions of Fraunhofer lines are not systematically affected by anomalous dispersion".

Of deze conclusie uit zijn onderzoek gewettigd is, dan wel sterk betwijfelbaar, hangt af van de vraag, wat bedoeld wordt met de uitdrukking „positie" van een Fraunhofersche lijn.

Verstaat hij daaronder de plaats van het maximum der duisterheidskromme, dan geven de uitkomsten der metingen die hij beschrijft hem zeer zeker het recht te besluiten, dat onderlinge afstooting tusschen naburige lijnen van het zonnespectrum niet in merkbare mate schijnt te bestaan. Maar dan heeft hij daarmede slechts aangetoond dat het LARMOR-effect onzichtbaar klein is; terwijl onweersproken blijft de mogelijkheid, waarop door mij gewezen was, dat de smalle *dispersiebanden* die elk der Fraunhofersche lijnen omhullen, onder elkaars invloed merkbaar verschoven zijn.

Men hecht daarentegen vaak aan het woord „positie" bij objecten als Fraunhofersche lijnen een eenigszins andere beteekenis, die voor de meet-praktijk niet zonder belang is, namelijk deze, dat het de plaats is waarop een onbevooroordeeld waarnemer een index zal instellen als hij ernaar streeft, de beide kanten van het object zoo goed mogelijk met elkander in evenwicht te brengen. Aldus opgevat is de positie eener lijn afhankelijk van den graad harer asymmetrie. Dat men in de zóó gedefinieerde posities van Fraunhofersche lijnen geen stelselmatigen invloed van anomale dispersie zou kunnen herkennen, volgt uit de resultaten van ST. JOHN *niet*.

---

[1]) Zie ook: Astrophysical Journal **44**, 1916

Onderzoeken wij wat het verschil is tusschen de wijze waarop de plaatsen der componenten van lijnparen in het zonnespectrum beoordeeld zijn door ALBRECHT en door ST. JOHN.

ALBRECHT leidt ze af uit de golflengtetafels van ROWLAND in vergelijking met de internationale standaarden; ST. JOHN uit metingen op negatieven, die op Mount Wilson speciaal waren vervaardigd met de bedoeling om de te meten lijnparen zoo scherp mogelijk voor den dag te brengen. Daartoe werd de belichtingstijd en de sterkte der ontwikkeling voor elk bijzonder geval zóó geregeld, dat men de scheidingen het best te zien kreeg. De negatieven waren dan te zwaar voor de meeste andere lijnen van het spectrum [1]) en dus stellig zwaarder dan de platen van ROWLAND, die natuurlijk gunstig waren gekozen voor het gemiddelde type van lijnen uit het beschouwde gebied.

Wat moesten nu daarvan de gevolgen zijn? Vooreerst, dat wegens het steilere verloop der fotografische zwarting van de plaat aan beide zijden van elk der componenten, de juiste plaatsen van de ware kernen veel beter uitkwamen, zoodat men daarop gemakkelijk kon instellen. Dat dus *nu* de afstanden der Fraunhofersche lijnen in overeenstemming gevonden werden met die der correspondeerende lijnen in 't boogspectrum, kan ons — bij afwezigheid van het LARMOR-effect — niet verwonderen.

Een tweede gevolg van de grootere sterkte der negatieven is echter, dat eventueele asymmetrie van elk der componenten, wegens hun geringere breedte, minder tot uiting komt. Denkt men zich namelijk bij gegeven graad van asymmetrie een lijn gelijkmatig samengedrukt, dan zal de schijnbare lineaire verplaatsing, waarin de asymmetrie zich uitspreekt, geringer worden. ST. JOHN heeft dus door zijn methode van onderzoek de kans op het vinden van een werkelijk bestaande asymmetrie verminderd. De gegevens van ROWLAND, door ALBRECHT gebruikt, hebben voor de herkenning van anomale dispersie-effecten grootere waarde, dan de gewone micrometer-instellingen op de, in zekeren zin overbelichte, platen van Mount Wilson.

Om deze reden is het dan ook niet te verdedigen, de resultaten van ALBRECHT, die met de gevolgtrekkingen uit de dispersietheorie in overeenstemming zijn, eenvoudig toe te schrijven aan „fouten" in de golflengtebepalingen van ROWLAND. Tot het karakter van een Fraunhofersche lijn kan behooren haar asymmetrie. Wil men die mede uitdrukken in haar *plaats*, dan is haar plaats eene andere dan die van de wellicht symmetrische booglijn, waaraan zij beant-

---

[1]) CH. E. ST. JOHN and L. W. WARE, Astrophysical Journal **44**, 16—17, (1916).

woordt. Men heeft immers ook de velerlei verplaatsingen der *kernen* van Fraunhofersche lijnen niet aan „fouten" in de tabellen van Rowland toegeschreven, doch daaruit veeleer conclusies getrokken omtrent bewegingen, druk-effecten, magnetische velden, enz. Evenzoo zal men uit de constante en de veranderlijke *asymmetrieën* dier lijnen gevolgtrekkingen kunnen afleiden op grond van de dispersietheorie.

St. John verdedigt de meening, dat het grooter aanslaan van den afstand van dubbellijnen op een niet voldoende dicht negatief een echte instellingsfout zou zijn, veroorzaakt door de ongelijke helderheid van den achtergrond ter weerszijden van elk der componenten. Ingeval men te doen heeft met twee lijnen die ieder, indien zij alleen stonden, symmetrisch zouden zijn, doch nu gedeeltelijk over elkaar vallen, is men volgens St. John steeds geneigd, den afstand te overschatten. De voorbeelden die hij tot staving aanvoert, zijn echter aan het zonnespectrum ontleend; zij kunnen op werkelijke asymmetrie der naburige Fraunhofersche lijnen berusten en zijn daarom niet bewijzend. King heeft bij laboratoriumproeven met symmetrische lijnen de tegenovergestelde ondervinding opgedaan (zie boven, blz. 1248): hij zag regelmatig een *verkleining* van den afstand, en meende die aan een systematische instellingsfout te moeten toeschrijven.

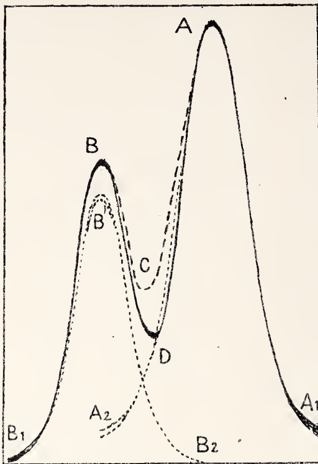
Betere resultaten, minder afhankelijk van persoonlijke fouten en psychische momenten, mag men verwachten van de bestudeering der intensiteitskrommen die geregistreerd zijn met den microfotometer van Koch. Aan deze methode kleven ook nog wel kleine moeilijk te vermijden instrumenteele onjuistheden, maar daarmee kan men tot op zekere hoogte rekening houden. Zoo is het natuurlijk niet te vermijden, dat de bovenste spleet van het instrument een breedte heeft die vergelijkbaar is met den afstand der componenten van het te onderzoeken lijnenpaar, en als gevolg daarvan zal het minimum tusschen de twee toppen minder diep uitvallen dan het bij *zeer* nauwe spleet en bij afwezigheid van storing door diffractie eigenlijk zou moeten zijn. St. John en Ware zeggen [1]): „The resolution upon the original spectrogram is more nearly complete than the curves indicate, as the pinhole effect has accentuated the overlap."

Wij kunnen nu onderzoeken of in de microfotometerkrommen, door St. John and Ware gepubliceerd [2]), ook aanduidingen te vinden zijn van wederzijdschen invloed der lijnen.

---

[1]) Astrophysical Journal **44**, 22, (1916).

[2]) Ibid.



In de nevenstaande figuur is de doorgetrokken kromme B_1BDAA_1 een getrouwe afteekening van de microfotometerkromme van het Mg—Fe lijnenpaar λ 5167, gereproduceerd op blz. 21 van de laatstgenoemde verhandeling. De gestippelde tak AA_2 is verkregen door den tak AA_1 om de vertikaal van 't maximum A om te klappen. Vervolgens is de ordinaat van B met dien van A_2 verminderd, wat het punt B' opleverde, en is de symmetrische kromme $B_1B'B_2$ geconstrueerd. Had men nu hier te doen met twee symmetrisch gebouwde lijnen die eenvoudig naast elkander bestonden zonder elkaar te influenceeren, dan zou de lichtverdeeling van het complex ten naaste bij hebben moeten beantwoorden aan de som der ordinaten van $B_1B'B_2$ en A_2AA_1, dus aan de kromme B_1BCAA_1, terwijl in werkelijkheid een merkbaar ander verloop, *met diepere inzinking bij D*, gevonden is. En zooals wij zagen moet de inzinking feitelijk nog dieper zijn dan het fotogram aangeeft.

Er is hier dus inderdaad een aanduiding van wederzijdschen (schijnbaar afstootenden) invloed aanwezig, die doet denken aan hetgeen in veel sterkere mate zich voordeed bij onze proeven betreffende anomale dispersie in natriumdamp, waarvan op blz. 1249 sprake was.

De stelselmatige verschillen, die volgens de onderzoekingen van Albrecht bestaan tusschen de golflengten uit de tabellen van Rowland en de golflengten, ontleend aan het systeem van internationale standaarden, bij Fraunhofersche lijnen met begeleiders op korten afstand, kunnen zeer wel het gevolg zijn van versterkte inzinkingen der intensiteitskromme, zooals die welke bij λ 5167 werd opgemerkt. Wij mogen daarin dus vooralsnog veilig een bevestiging blijven zien van de hypothese, dat de lichtverdeeling in Fraunhofersche lijnen voor een aanmerkelijk gedeelte op anomale dispersie berust. Dat in het zonnespectrum aanwijzingen voor het bestaan van anomale dispersie zouden ontbreken, blijkt uit de onderzoekingen van St. John *niet*.

Langs een geheel anderen weg wordt men bovendien er toe geleid, aan de genoemde hypothese een groote mate van waarschijnlijkheid toe te kennen.

Voortbouwende op theoretische onderzoekingen van RAYLEIGH [1]), SCHUSTER [2]), L. V. KING [3]) en SCHWARZSCHILD [4]) over de moleculaire verstrooiing van het licht heeft J. SPIJKERBOER [5]) in zijn onlangs verschenen dissertatie een grondige behandeling geleverd van het vraagstuk, hoe de verdeeling der lichtsterkte over de zonneschijf voor verschillende kleuren zijn zou indien uitsluitend *verstrooiing* door de moleculen van een niet absorbeerende en niet zelf-lichtende atmosfeer de oorzaak was, waardoor de in alle richtingen gelijkmatige straling van een zelf-lichtende zonnekern werd gewijzigd. De atmosfeer werd daarbij aanvankelijk als *vlakke* verstrooiende gaslaag van bepaalde diepte behandeld.

Het bleek dat men bij die onderstelling komt tot een lichtverdeeling die reeds zeer veel overeenkomst vertoont met de werkelijk waargenomene, zooals die opgesloten ligt in het fraaie, uitvoerige waarnemingsmateriaal van ABBOT [6]). Er zijn echter verschillen, vooral nabij den rand, en ook in zoo verre, dat de invloed der *golflengte* op het karakter der lichtverdeeling minder sterk tot uitdrukking komt in de gegevens van ABBOT, dan op grond dezer theorie van zuivere moleculaire diffusie moest worden verwacht. Maar door twee voor de hand liggende omstandigheden in rekening te brengen, kon men de uitkomsten der theorie nog aanmerkelijk beter bij die der waarnemingen doen aansluiten.

Vooreerst werd namelijk ingevoerd het door velerlei overwegingen gesteunde denkbeeld, dat de zon tot op zeer groote diepte gasvormig is. Dit heeft ten gevolge, dat men de verstrooiende laag niet meer als vlak mag beschouwen. Neemt men haar bolvormigheid in aanmerking, dan komt de berekende lichtverdeeling nader bij de werkelijk gevondene. En omdat de diffusie-coëfficient volgens RAYLEIGH sterk afneemt met toenemende golflengte, volgt dan tevens dat de uittredende straling uit grootere diepten afkomstig moet zijn naarmate haar golflengte grooter is. Men moet de zonne-atmosfeer, om zoo te zeggen, dikker onderstellen voor rood dan voor violet

1) RAYLEIGH, Phil. Mag. (5), **47**, 375, 1899.

2) SCHUSTER, Astrophysical Journal **21**, 1, 1905.

3) L V. KING, Phil. Frans. R. S. London, A (212), 375, 1912.

4) SCHWARZSCHILD, Sitzungsber. Kön. Pr. Ak. d. W. **47**, 1183, 1914.

5) J. SPIJKERBOER, Verstrooiing van licht, en intensiteitsverdeeling over de zonneschijf. Dissertatie, Utrecht, 1917.

6) C. G. ABBOT, Annals Astroph. Obs. Smiths. Inst. **2**, 1908; **3**, 1913.

licht. Doet men dit, dan blijkt de theoretische verdeeling inderdaad minder sterk met de golflengte te varieeren, dan volgens de eerste berekening, bij welke was uitgegaan van het denkbeeld, dat een wit-stralende oppervlakte zich bevond op één bepaalde diepte.

Ten tweede is het noodig te bedenken, dat straalkromming in onregelmatige dichtheidsgradienten eveneens tot een soort van verstrooiing aanleiding geeft, doch dat *deze* verstrooiing eenigszins andere wetten volgt en slechts in geringe mate van de golflengte afhankelijk is. Voegt zij zich bij de moleculaire verstrooiing, dan wordt ook daardoor in het gezamenlijk effect de invloed der golflengte verzwakt.

Diezelfde verstrooiing door onregelmatige straalbreking kan rekenschap geven van het ontstaan van den zonsrand[1]), en daarmee tevens van het feit dat de straling nabij den rand volgens de waarnemingen grooter is (vooral voor de langere golven) dan het geval zou moeten zijn indien men slechts met moleculaire verstrooiing te doen had.

Spijkerboer heeft ook berekend, hoe de verdeeling der lichtsterkte over de zonneschijf volgens de theorie veranderen zou, indien men naast verstrooiing een algemeene absorptie aannam.

Hoogst belangrijk nu is het resultaat, dat zelfs een absorptie-coëfficient die slechts half zoo groot ware als de diffusie-coëfficient, reeds een zóó groote verandering in de verdeeling der intensiteiten over de schijf zou teweegbrengen (namelijk een veel grootere verzwakking naar den rand), dat daardoor de fraaie aansluiting bij de waarnemingen, welke men op grond van de verstrooiings-theorie verkregen had, geheel verloren zou gaan. Alleen voor den violetten kant van het spectrum zou de toevoeging van een absorptie-coëfficient, die een kleine fractie was van den verstrooiings-coëfficient, den gang der theoretische intensiteitsverdeeling misschien nog een weinig kunnen verbeteren.

Uit dit onderzoek van Spijkerboer volgt derhalve, dat men de wijze waarop de lichtsterkte voor de verschillende kleuren verdeeld is over de zonneschijf het best begrijpen kan indien men onderstelt, dat het licht op zijn lange wegen door de uitgestrekte gasmassa's hoofdzakelijk moleculaire verstrooiing en verstrooiing door straalkrommingen ondergaat, doch slechts weinig verzwakt wordt door absorptie.

Dit geldt natuurlijk in de eerste plaats voor het sterke licht dat zich in het spectrum tusschen de Fraunhofersche lijnen bevindt.

---

1) Versl. Afd. Natuurk. **22**, 64, 1913; Astroph. Journ. **38**, 129, 1913.

Maar behoeft het anders te worden wanneer men de Fraunhofersche lijnen nadert?

Vatten wij een lichtsoort in het oog, behoorende tot een Fraunhofersche lijn, en zoo dicht bij haar kern, dat zij reeds veel geringer intensiteit heeft dan het licht uit een naburig lijnenvrij deel van het spectrum. Was nu de oorzaak der duisterheid van de lijn gelegen in *absorptie,* dan zou voor de bedoelde lichtsoort de intensiteitsvermindering van het centrum naar den rand der zonneschijf, zooals wij zagen, volgens een geheel andere wet moeten geschieden, dan voor het licht uit lijnvrije gebieden van het spectrum; zij zou veel sterker moeten zijn; en de Fraunhofersche lijn zou dus in het spectrum van randdeelen aanmerkelijk donkerder en breeder moeten wezen dan in het spectrum van centrale deelen der schijf (indien men namelijk de twee spectra op gelijke gemiddelde intensiteid had gebracht).

Dit nu is *niet* het geval. Terwijl volgens Hale en Adams [1]) de gemiddelde lichtsterkte naar den rand tot ongeveer $^1/_8$ voor violet en $^1/_4$ voor rood vermindert, komt slechts weinig verandering in de intensiteits*verhouding* van het licht der Fraunhofersche lijnen tot dat van den grond van het spectrum. Beide lichtsoorten schijnen op haar langen weg door de zonnegassen volgens nagenoeg dezelfde wet verzwakt te worden. Miss Clerke, in haar bekend werk ,*Problems in Astrophysics*" p. 42, zegt van dit verschijnsel „An embarrassing peculiarity of the Fraunhofer lines is their virtually uniform existence all over the sun's disk".

Wilde men beproeven, de geringe veranderlijkheid van het contrast te verklaren door aan te nemen dat in het spectrum van de zonnekern de Fraunhofersche lijnen reeds als absorptielijnen aanwezig zijn en dat in de verstrooiende omhulling de selectief-absorbeerende gassen niet in voldoende hoeveelheid voorkomen om de lijnen te versterken, dan zou men op talrijke groote bezwaren stuiten, o.a. bij de uitlegging van het flitsspectrum en van de chromosfeer.

De moeilijkheid verdwijnt zoodra wij in de Fraunhofersche lijnen dispersielijnen zien.

Dan toch geldt voor het licht uit het gebied dier lijnen inderdaad dezelfde verzwakkingswet van centrum naar rand, als voor het overige licht — echter met dien verstande, dat nabij de eigenfrequenties verandering komt zoowel in den verstrooiingscoëfficient van Rayleigh als in de relatieve beteekenis der brekingsverstrooiing.

Neemt men dit in aanmerking, dan wordt tevens begrijpelijk het

---

[1]) Hale and Adams, Contrib. Mt. Wilson Sol. Obs. No. 17 p. 3; Astroph. Journ. **25**, 302, 1907.

door HALE en ADAMS in de genoemde verhandeling beschreven feit dat zich zeer nabij den rand sommige lijnen een weinig versterkt, andere verzwakt toonen, en vooral het bijzondere gedrag der *enhanced lines*, die haar „vleugels" verliezen. Hoe men namelijk dit alles kan afleiden uit de snelle verandering van den brekingsindex nabij de eigen frequenties, is door mij in eene vroegere mededeeling aangetoond [1]).

SAMENVATTING.

In deze mededeeling werden experimenteele gegevens betreffende dispersielijnen besproken, en werden nieuwe gronden aangevoerd voor de meening dat anomale dispersie een belangrijk aandeel heeft in de vorming der Fraunhofersche lijnen.

Er werd aangetoond dat proeven van A. S. KING, die volgens hem het bestaan van een invloed van anomale dispersie op de plaatsen van spectraallijnen zouden weerspreken, slechts de afwezigheid bewijzen van een merkbaar LARMOR-effect, doch geen argument leveren tegen de bewering dat naburige *dispersielijnen* elkander kunnen influenceeren.

Het werkelijk bestaan van lijnverplaatsingen en wederzijdschen invloed door anomale dispersie werd bewezen aan de hand van proeven met natriumdamp, die reeds in 1906 door mij waren gepubliceerd, en uit de resultaten van een nieuw onderzoek, uitgevoerd door B. J. VAN DER PLAATS, waarbij aan honderden lijnen van stikstofdioxyde en van jodium willekeurige verschuivingen door anomale dispersie konden worden gegeven.

De opvatting van ST. JOHN, dat de wederzijdsche invloed van Fraunhofersche lijnen, door ALBRECHT in overeenstemming met de eischen der dispersietheorie geconstateerd, berusten zou op systematische fouten in de tabellen van ROWLAND, werd weerlegd. De sterker belichte en ontwikkelde platen van Mount Wilson waren minder geschikt dan die van ROWLAND om de aanwezigheid van asymmetrie bij de lijnen zichtbaar te doen zijn. In krommen van lijnparen, met den microfotometer van KOCH op Mount Wilson geregistreerd, is het bestaan van een asymmetrie zooals die bij dispersielijnen kon worden verwacht, aan te toonen.

Een uitvoerig onderzoek van J. SPIJKERBOER heeft als uitkomst opgeleverd dat men vooral aan moleculaire verstrooiing en onregelmatige breking van het licht, slechts in zeer geringe mate aan

---

[1]) Versl. Afd. Natuurk. **24**, 874, 1915. Astroph. Journ. **43**, 62, 1916.

absorptie, het intensiteitsverloop op de zonneschijf van centrum naar rand moet toeschrijven. Daar nu de intensiteitsverhouding van het licht der Fraunhofersche lijnen tot dat van den algemeenen grond van het spectrum zich uiterst weinig wijzigt van het centrum naar den rand, heeft men alle aanleiding, de lichtverzwakking die in de Fraunhofersche lijnen tot uiting komt grootendeels te beschouwen als een gevolg van anomale verstrooiing en anomale breking.

Scheikunde. — De Heer Ernst Cohen doet eene mededeeling over: „*Het warmtetheorema van* Nernst *en de ervaring*".

(Deze mededeeling zal in een volgend Zittingsversl. worden opgenomen.)

Scheikunde. — De Heer Schreinemakers biedt eene mededeeling aan over: „*In-, mono- en divariante evenwichten*". XVI.

De velden in het P,T-diagram.

In mededeeling VIII hebben wij reeds in het kort deze velden besproken; wij zullen ze thans nader beschouwen. Als het evenwicht

$$E = F_1 + F_2 + \dots + F_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

uit n komponenten bestaat, dan is het in het algemeen divariant; het wordt dus in het algemeen in het P,T-diagram door een veld voorgesteld. Wij zullen dit veld E nu beschouwen in zijne geheele uitgebreidheid, nl. zonder er rekening mede te houden, dat eenige deelen door het optreden van andere phasen metastabiel kunnen worden.

Bij een bepaald evenwicht E kunnen wij onderscheiden:

1°. de totale samenstelling van E.

2°. de samenstelling van elk der phasen, waaruit het evenwicht E bestaat.

Wij zullen zeggen dat twee evenwichten dezelfde phasensamenstelling hebben, als de phasen van beide evenwichten dezelfde samenstelling hebben.

Wij nemen nu een bepaald punt x van het veld E (dus het evenwicht E bij P_x en T_x). Het evenwicht E heeft dan of slechts éene bepaalde phasensamenstelling E_x, of twee phasensamenstellingen E_x en E'_x, of drie nl. E_x, E'_x en E''_x; enz. Wij kunnen dit uitdrukken door te zeggen dat bij het punt x van het veld E of één, of twee of meer evenwichten E behooren,

Behoort bij elk punt x van het veld E slechts één enkel even-

wicht E_x, dan noemen wij het veld éénbladig; behooren er in een deel van het veld bij elk punt x twee evenwichten (E_x en E'_x), dan noemen wij dat deel tweebladig enz.

Daar het evenwicht E_x, dat bij een bepaald punt van het veld E behoort, zoowel stabiel als labiel kan zijn, zoo kan het veld E, behalve uit stabiele, ook uit labiele bladen bestaan.

Doorloopt het punt x het veld E van het P,T-diagram of met andere woorden, geeft men aan het evenwicht E alle mogelijke phasensamenstellingen, dan kunnen evenwichten optreden, die iets bijzonders vertoonen.

1°. Het evenwicht E van n komponenten in n phasen gaat over in een evenwicht E_0 van $n-1$ komponenten in n phasen. [De index 0 geeft aan dat de hoeveelheid van een der komponenten nul is geworden].

2°. Tusschen de n phasen van het evenwicht E kan eene phasenreactie:

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots + \lambda_n F_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

optreden. Wij noemen dit evenwicht E_R. [De index R geeft aan dat eene reactie op kan treden].

3°. Er treden kritische verschijnselen tusschen twee phasen op; wij noemen dit evenwicht E_K.

Het eerste geval treedt op, als de hoeveelheid van een der komponenten, b.v. K_1, in alle phasen nul kan worden. Het is duidelijk dat de phasen met constante samenstelling dus dezen komponent K_1 niet mogen bevatten.

Het evenwicht E_0 bevat $n-1$ komponenten in n phasen en is dus monovariant; het wordt in het P,T-diagram dus voorgesteld door eene kurve, die wij kurve E_0 zullen noemen. Deze kurve E_0 is dus niets anders dan eene monovariante kurve van een stelsel met $n-1$ komponenten. Zij is dus bepaald door:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H}{\Delta V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hierin stelt ΔH de entropie- en ΔV de volumetoename voor bij de reactie, die in het evenwicht E_0 kan optreden.

Daar op kurve E_0 de hoeveelheid van een der komponenten nul wordt, moet het veld E in kurve E_0 eindigen (of beginnen); wij noemen E_0 daarom de grenslijn van het veld E. Wij komen hierop later nog terug. In fig. 1 zijn $a\,b$ en $c\,d$ de grenslijnen van een veld $a\,b\,c\,d$; op kurve $a\,b$ ontbreekt een der komponenten, b.v. K_1, op kurve $c\,d$ ontbreekt een andere komponent, b.v. K_2, in het

evenwicht E. Gaat men van uit een punt h eener grenslijn naar een punt l of m binnen het veld, dan gaat het evenwicht E_0 in het evenwicht E over.

Nemen wij thans het tweede geval, nl. dat een evenwicht E_R optreedt. Het evenwicht E_R bestaat uit n komponenten in n phasen, waartusschen de phasenreactie (2) kan optreden. E_R is dus een monovariant evenwicht en kan in het P,T-diagram door eene kurve worden voorgesteld. Zij is bepaald door (3), waarin ΔH en ΔV thans betrekking hebben op reactie (2). Om de ligging van het veld in de nabijheid van deze kurve te onderzoeken, gebruiken wij de eigenschap: als in een stelsel van n komponenten in n phasen eene phasenreactie kan optreden, dan is bij constante T de druk en bij constante P de temperatuur maximum of minimum [1]).

Zij in fig. 2 ef eene kurve E_R. Doorloopt men het veld volgens eene horizontale lijn (P constant) dan moet in het snijpunt dezer lijn met ef de temperatuur maximum of minimum zijn. Zij g dit snijpunt en neemt men aan dat T_g een maximum is, dan moet het veld dus links van kurve ef liggen. Bij $T_g + dT \,(dT > 0)$ bestaat dan nl. geen evenwicht E, bij $T_g - dT$ bestaan er echter twee verschillende evenwichten E; het veld is in de nabijheid van kurve E_R dus tweebladig. In fig. 2 is het eene blad van het veld gestippeld, het andere blad gestreept. Doorloopt men het veld volgens eene verticale lijn, dan is de druk op ef een minimum. Kurve E_R is dus ook eene grenslijn van het veld E maar in verband met de eigenschap van het veld in de nabijheid dezer kurve, noemen wij haar de „keerlijn" van het veld E.

Ook op de keerlijn E_R kan bij eene bepaalde T (en bijbehoorende P) de concentratie van een der componenten nul worden; wij krijgen dan een evenwicht $E_{R.0}$, dat zoowel tot de keerlijn E_R als tot de grenslijn E_0 behoort. Keerlijn en grenslijn raken elkaar in het punt $E_{R.0}$.

In het onder 3° genoemde geval treden kritische verschijnselen tusschen 2 phasen op. Dit is het geval, als in het evenwicht E twee vloeistoffen L_1 en L_2 dezelfde samenstelling krijgen of als eene vloeistof en een gas identiek worden. Men krijgt dan een evenwicht E_K van n komponenten in n phasen, waarvan 2 phasen in kritischen toestand zijn. Dit evenwicht E_K wordt in het P,T-diagram voorgesteld door eene kurve E_K die wij de kritische kurve

[1]) F. A. H. Schreinemakers, Die heterogenen Gleichgewichte von Bakhuis Roozeboom. III[1]. 285.

van het veld noemen. In de nabijheid dezer kurve E_K is het veld éénbladig.

Uit het vorige blijkt dus, dat een bivariant veld in de nabijheid van eene grenslijn of kritische lijn éénbladig, in de nabijheid van eene keerlijn twéébladig is. Wij komen later hierop nog terug.

Een- en tweebladige velden.

Een éénbladig veld kan begrensd worden door grenslijnen en kritische lijnen, maar het kan ook onbegrensd zijn. Bevat het evenwicht E b.v. alleen phasen van onveranderlijke samenstelling, dan bestaat er noch grenslijn noch kritische lijn, noch keerlijn. Het veld E is dus onbegrensd. [Een deel van dit veld wordt bij hoogere T natuurlijk wel metastabiel, omdat zich door smelting of omzetting van vaste stoffen eene andere phase vormt b.v. eene vloeistof. Laat men echter het optreden van andere phasen buiten beschouwing, dan breidt het veld zich onbegrensd uit]. Het veld kan ook onbegrensd zijn, als in het evenwicht, behalve onveranderlijke phasen, ook nog veranderlijke phasen optreden, die niet alle komponenten bevatten [b.v. mengkristallen of een gas].

Wij nemen een evenwicht $E = L + G$ van een binair stelsel met de komponenten A en B, die beide in den damp G optreden. Het veld E heeft dan twee grenslijnen E_0. Ontbreekt in L en G de komponent A, dan heeft men de grenslijn $E_{A=0}$, ontbreekt B dan heeft men de grenslijn $E_{B=0}$. Kurve $E_{A=0}$ is dus de kookpuntslijn van de stof B, kurve $E_{B=0}$ die van de stof A.

Hebben L en G altijd verschillende samenstelling, dan heeft het veld $E = L + G$ geen keerlijn; het kan dan voorgesteld worden door fig. 1, waarin ab en cd de grenslijnen zijn. Kunnen L en G wel dezelfde samenstelling krijgen, zoodat eene reactie $L \rightleftarrows G$ kan optreden, dan bestaat er ook eene keerlijn E_R. Het veld kan dan

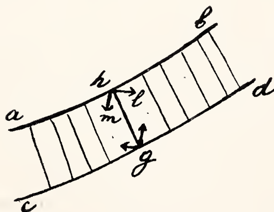


Fig. 1.

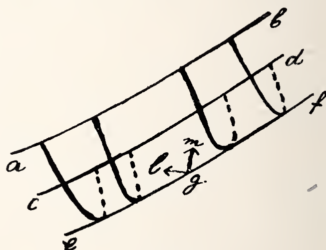


Fig. 2.

voorgesteld worden door fig. 2, waarin $a b$ en $c d$ de grenslijnen en $e f$ de keerlijn is.

Hetzelfde geldt voor een evenwicht $E = M + L$ of $M + G$ van een binair stelsel $A + B$. [M stelt mengkristallen voor].

Het veld E bestaat in fig. 2 uit twee bladen nl. $a e f b$ en $c e f d$. Op het eene blad bevat de vloeistof meer A, op het andere meer B dan de damp.

Nemen wij aan dat in het binaire stelsel $A + B$ eene verbinding F optreedt. Het veld $E = F + L$ heeft dan geene grenslijn E_0, maar wel eene keerlijn E_R; deze is de smeltlijn van de verbinding F. Het veld $E = F + L$ is dus tweebladig; in het eene blad liggen de vloeistoffen, die ten opzichte van F eene overmaat van A bevatten, in het andere blad liggen de vloeistoffen, die een overmaat van B bevatten.

Het veld $E = F + G$ van het binaire evenwicht $A + B$ heeft eveneens geene grenslijn, maar wel eene keerlijn E_R; deze is de sublimatiekurve van de verbinding F.

Wij nemen een ternair stelsel met de drie vluchtige komponenten A, B en C, waarin een binaire verbinding F van B en C optreedt. Wij nemen nu het evenwicht $E = F + L + G$, waarin ook G dus de 3 komponenten bevat. [Men vergelijke ook „Evenwichten in ternaire stelsels" XI; in fig. 6 dezer mededeeling moet op de door het punt F gaande kurve de pijl in de nabijheid van punt F in andere richting wijzen].

Dit veld E heeft eene grenslijn $E_{A=0}$; deze stelt dus het evenwicht $F + L + G$ van het binaire stelsel $B + C$ voor en is in fig. 3 door kurve $a c d$ aangegeven; zij heeft in b een druk- en in c een temperatuurmaximum.

Treedt er geen evenwicht E_R op, dan is het veld E éénbladig en moet in fig. 3 dus binnen kurve $a b c d$ liggen. [Het strekt zich dus niet, zooals in fig. 3 geteekend, over $a f$ uit].

Bestaat er een evenwicht E_R [dit is het geval, als de 3 phasen in het concentratiediagram op eene rechte lijn liggen] dan is er ook eene keerlijn E_R; deze is in fig. 3 door $e f$ voorgesteld. Dit raakpunt f stelt het evenwicht $E_{R.A=0}$ voor.

Het veld E is nu tweebladig; $a f e$ is het eene, $d c f e$ is het andere blad.

Beschouwt men het evenwicht $E = F + L + G$ bij eene constante T, lager dan T_f, dan is de druk op de keerlijn $e f$ een maximum; was de keerlijn door $g h$ voorgesteld, dan zou de druk een minimum zijn.

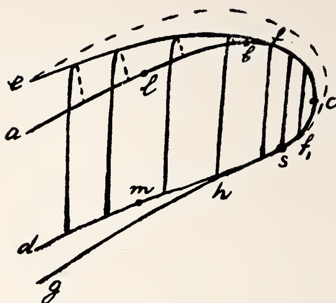


Fig. 3.

Op kurve $a\,c\,d$ ligt in de nabijheid van c eene oplossing s, die dezelfde samenstelling heeft als de verbinding F. Als F onder volumetoename smelt, dan ligt s, zooals in fig. 3, op tak dc.

Uit formule 17 der mededeeling over „Evenwichten in ternaire stelsels" XI blijkt: gaat men bij constante T van uit het punt s het veld $E = F + L + G$ binnen, dan moet de druk toenemen.

Hieruit volgt, dat het raakpunt h van kurve $g\,h$ altijd op tak ds moet liggen en dat van kurve $e\,f$ altijd op tak $a\,s$. Het raakpunt kan in het laatste geval dus ook wel tusschen s en c b.v. in f_1 liggen; men krijgt dan eene grenskurve zooals $e\,f_1$. Het evenwicht $E = F + L + G$ bestaat dan nog bij temperaturen boven T_c, de hoogste temperatuur, waarbij het evenwicht $E_{A=0}$ kan optreden.

Beschouwen wij thans van het ternaire stelsel $A + B + C$ het evenwicht $E = B + L + G$. [Men vergelijke ook „Evenwichten in ternaire stelsels" XIII. Februari 1914]. Het veld E heeft dan twee grenslijnen $E_{A=0}$ en $E_{c=0}$. Het eerste stelt het monovariante evenwicht $B + L + G$ van het binaire stelsel $B + C$ voor; het tweede hetzelfde monovariante evenwicht van het binaire stelsel $A + B$. Elk dezer kurven kan al of niet een maximumdrukpunt hebben, zoodat wij drie gevallen kunnen onderscheiden. Treedt er in het evenwicht E geen evenwicht E_R op, dan ligt het veld E geheel binnen de grenslijnen en is dus éénbladig; treedt er wel een evenwicht E_R op, dan bestaat er ook eene keerlijn en is het veld dus tweebladig.

Twee grenslijnen $a\,b$ en $c\,d$ kunnen elkaar in een punt s snijden (fig. 4); dit beteekent dat de twee evenwichten E_0 bij de temperatuur

T_s denzelfden druk P_s hebben. In dit geval is er altijd eene grenskurve ef (fig. 4), die zoowel boven als beneden het punt s kan liggen. De keerlijn ef kan in fig. 4 de kurven cs en sb raken.

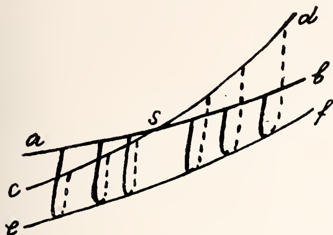


Fig. 4.

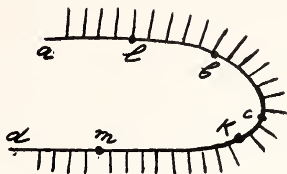


Fig. 5.

Beschouwen wij thans het evenwicht $E = L_1 + L_2 + G$ waarin L_1 en L_2 twee vloeistofphasen voorstellen. [Op overeenkomstige wijze kan men ook de evenwichten $L_1 + L_2 + F$, $M_1 + M_2 + L$ en $M_1 + M_2 + G$ enz. behandelen, waarin M_1 en M_2 mengkristallen voorstellen]. Worden in het evenwicht $E = L_1 + L_2 + G$ de beide vloeistoffen gelijk, dan onstaat een kritisch evenwicht $E_K = L_K + G$. Kurve E_K kan een vorm hebben, als kurve acd[1]) in fig. 3. Nadert in het evenwicht E_K de hoeveelheid van een der komponenten, b.v. van A, tot nul, dan heeft kurve E_K een eindpunt $E_{K.A=0}$.

Als acd in fig. 3 de kritische kurve E_K voorstelt, dan ligt het veld $E = L_1 + L_2 + G$ of geheel binnen kurve acd of het is ten deele tweebladig met de keerlijn ef of gh. Ook in fig. 5 is eene kritische kurve E_K door acd voorgesteld; het veld E ligt hier echter geheel buiten de kritische kurve en kan ook in dit geval nog een keerlijn hebben.

Wij nemen in fig. 3 en 5 twee punten l en m op eene verticale lijn; wij hebben dus $T_l = T_m$. Bij de temperatuur $T_l = T_m$ bestaan dus twee evenwichten E_K, het eene $[E'_K = L'_K + G']$ bij den druk P_l, het andere $[E''_K = L''_K + G'']$ bij den druk P_m.

De kritische vloeistoffen L'_K en L''_K kunnen nu al of niet tot hetzelfde ontmengingsgebied onder eigen dampdruk van de temperatuur $T_l = T_m$ behooren. Behooren zij tot hetzelfde ontmengingsgebied, dan ligt het veld E zooals in fig. 3; behooren zij tot verschillende ontmengingsgebieden, dan ligt het veld E zooals in fig. 5; in beide gevallen kan al of niet eene keerlijn optreden.

[1]) Men vergelijke ook F. A. H. SCHREINEMAKERS, Archives Néerl. Serie II. VI. 170 (1901).

Men zou kunnen denken dat in punt c van fig. 3 of 5 twee kritische vloeistoffen dezelfde samenstelling krijgen, zoodat L_c eene kritische vloeistof der 2e orde zou zijn. Dit is echter niet het geval in het punt c, maar in een ander punt K der kurve; dit is in fig. 5 op tak dc geteekend. Kurve acd raakt in dit punt aan eene kurve KK_1 (in de figuur niet geteekend); de punten dezer kurve KK_1 stellen kritische vloeistoffen van de 2e orde voor. Van al deze vloeistoffen kan alleen de vloeistof K met damp in evenwicht zijn.

Meerbladige velden.

Behalve één- en tweebladige velden, waarvan wij hiervoor enkele voorbeelden hebben beschouwd, kunnen ook meerbladige velden optreden. Dit kan b.v. als er in het veld E twee keerlijnen optreden. Wij zullen, om de gedachten te bepalen, een bepaald geval beschouwen.

Wij nemen daartoe het evenwicht $E = B + L + G$ van een ternair stelsel met de drie vluchtige komponenten A, B en C. Dit evenwicht E heeft twee grenslijnen $E_{A=0}$ en $E_{C=0}$; deze worden in het concentratiediagram (fig. 6) voorgesteld door de zijden BC en BA van den driehoek ABC, in het P,T-diagram (fig. 7) door de kurven $aeil$ en $dhkn$. Denkt men zich in fig. 7 deze beide kurven naar hoogere T verlengd, dan eindigen beide in een punt B, dat de P en T van het smeltpunt onder-eigen dampdruk van de stof B voorstelt. Wij hebben boven reeds gezegd dat deze kurven al of niet een drukmaximum kunnen hebben.

Het evenwicht $E = B + L + G$ bestaat bij eene temperatuur T_a uit eene reeks van oplossingen, die met vast B verzadigd zijn en eene reeks van bijbehoorende dampen. Deze reeks van oplossingen vormt de verzadigingskurve onder eigen dampdruk van B, de bijbehoorende dampen vormen de dampverzadigingskurve. [Men zie ook: Evenwichten in ternaire stelsels XIII, Februari 1914]. In fig. 6 stelt kurve $abcd$ eene verzadigingskurve van B onder eigen dampdruk voor; de bijbehoorende dampverzadigingskurve is niet geteekend. Wij nemen nu aan, dat op kurve ad een minimumdrukpunt b en een maximumdrukpunt c optreedt; de druk langs ad neemt dan in de richting der pijltjes toe.

Wij denken ons nu in het P,T-diagram (fig. 7) eene verticale lijn, die met de temperatuur T_a overeenkomt. Uit fig. 6 blijkt dat de punten a, b, c en d in het P,T-diagram ten opzichte van elkaar moeten liggen als in fig. 7; deze vier punten moeten natuurlijk op dezelfde verticale lijn liggen; ter wille der duidelijkheid is hiervan in fig. 7 echter een weinig afgeweken.

In overeenstemming met fig. 6 neemt dus ook in fig. 7 bij de

temperatuur T_a de druk van uit a eerst af tot in b, daarna van b uit toe tot in c en vervolgens van c uit weer af tot in d. De punten b en c zijn in fig. 7 binnen de beide grenslijnen geteekend; het is echter duidelijk dat b ook beneden kurve dn en dat c ook boven kurve al zou kunnen liggen.

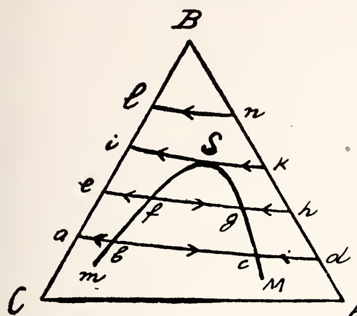


Fig. 6.

Wij nemen nu eene temperatuur T_e; de verzadigingskurve onder eigen dampdruk is in fig. 6 door kurve eh voorgesteld; zij heeft in f een minimum —, in g een maximumdrukpunt. In fig. 7 vindt men de overeenkomstige punten.

Wij nemen nu aan dat bij T-verhooging het minimum — en het

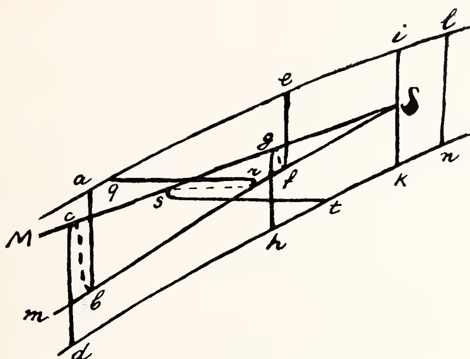


Fig. 7.

maximumdrukpunt der verzadigingskurve onder eigen dampdruk dichter bij elkaar komen en dat zij bij T_i in het punt S samenvallen. De druk neemt dan langs kurve iSK (fig. 6 en 7) van K uit naar i toe. In het P,T-diagram moeten de punten i, S en K dan ten opzichte van elkaar liggen, zooals in fig. 7; het is duidelijk dat het punt S tusschen de punten i en K moet liggen.

Bij temperaturen boven T_i, b.v. bij T_l, hebben de verzadigingskurven onder eigen dampdruk geen minimum- of maximumdruk-

punt meer; de druk neemt van uit n naar l toe. (fig. 6 en 7.)

Het minimumdrukpunt doorloopt in fig. 6 en 7 dus eene kurve mS, het maximumdrukpunt eene kurve MS. Het evenwicht E_R bestaat dus uit twee takken, die in S samenkomen; men kan echter ook zeggen dat er slechts eene enkele keerlijn $E_R = mSM$ is, die in S een singulier punt heeft.

Wij zullen later algemeen aantoonen, dat de beide takken mS en MS van eene keerlijn E_R elkaar in het singuliere punt S raken en dat de raaklijn in S tusschen de beide takken ligt.

Het veld E in fig. 7 is nu éénbladig, behalve in het binnen de keerlijn liggende deel dat driebladig is. Dit geldt natuurlijk alleen voorzoover dit deel tusschen de grenslijnen ligt.

Leiden, *Anorg. Chem. Lab.* (*Wordt vervolgd.*)

Mechanica. — De Heer DE SITTER biedt eene mededeeling aan: *„Over de relativiteit der traagheid: Beschouwingen naar aanleiding van* EINSTEIN's *laatste hypothese."* [1])

Wanneer wij de gravitatie-werking van alle gewone materie (zon, sterren, etc.) verwaarloozen, dan zijn in dat gedeelte der vier-dimensionale tijdruimte, waarover zich onze waarnemingen uitstrekken, de $g_{\mu\nu}$ met groote benadering gelijk aan die der oude relativiteitstheorie, n.l.

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wanneer wij als coördinaten kiezen drie rechthoekige cartesische ruimte-coördinaten en den tijd vermenigvuldigd met c. Het gedeelte der tijdruimte, waar dit zoo is, zal ik „onze nabijheid" noemen. In ruimte strekt deze zich uit minstens tot de verste ster, nevel of sterrenhoop in wier spektrum wij in staat zijn bepaalde lijnen te identifieeren. [2])

Hoe de $g_{\mu\nu}$ buiten onze nabijheid zijn, weten wij niet, en elke

---

[1]) A. EINSTEIN, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. Berlin, 8 Febr. 1917, blz 142.

[2]) W. DE SITTER, On EINSTEIN's theory of gravitation and its astronomical consequences (second paper), Monthly Notices R.A.S. Dec. 1916, Vol. LXXVII, p. 182. Deze grens geldt alleen voor g_{44}.

veronderstelling daaromstrent is eene extrapolatie, die des te onzekerder wordt naar mate men zich verder (in ruimte, of in tijd, of in beide) van het uitgangspunt verwijdert. Hoe zij in het oneindige (van ruimte en tijd) zijn, zullen wij nooit weten. Toch heeft men de behoefte gevoeld daarover hypothesen te maken. De meest voor de hand liggende veronderstelling, die ook in de klassieke mechanica stilzwijgend gemaakt wordt, is dat de waarden (1) tot in het oneindige geldig blijven. Aan den anderen kant is het verlangen ontstaan integratie-constanten, of liever grenswaarden in het oneindige, te hebben, die voor alle coördinatenstelsels dezelfde zouden zijn. De waarden (1) zijn dit niet. Het eenvoudigste zou zijn, als in het oneindige alle $g_{\mu\nu}$ *nul* werden. EINSTEIN is er naar zijn zeggen[1]) niet in geslaagd, een dergelijk stel grenswaarden te vinden, en maakt daarom de hypothese, dat de wereld niet oneindig is, maar b.v. spherisch: dan heeft men in het geheel geen grenswaarden noodig, en is de moeilijkheid verdwenen. Van het standpunt der relativiteitstheorie is het schijnbaar niet juist te zeggen: de wereld *is* spherisch, immers men kan haar door een transformatie, die overeenkomt met een stereographische projectie, afbeelden op een Euclidische ruimte. Dit is een volkomen geoorloofde transformatie, die den vorm der veldvergelijkingen, evenals de verschillende invarianten ds^2, G etc., onveranderd laat. Uit deze invariantie volgt echter juist dat ook in het Euclidische coördinaten-systeem de wereld, in natuurlijke maat gemeten, eindig en spherisch blijft. Past men deze transformatie toe op de door EINSTEIN in zijn spherische wereld gevonden $g_{\mu\nu}$, dan blijken deze over te gaan in een stel, dat in het oneindige tot de waarden

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2A)$$

nadert.

Het blijkt nu evenwel dat de $g_{\mu\nu}$ van EINSTEIN's sperische wereld [en dus ook hun getransformeerde waarden in de Euclidische ruimte] niet voldoen aan de tot nu door EINSTEIN gebruikte veldvergelijkingen

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa(T_{\mu\nu} \quad \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \,.\; \ldots\ldots \quad (3)$$

EINSTEIN is daarom gedwongen aan de veldvergelijkingen nog een term toe te voegen, zoodat zij worden

[1]) l.c. blz. 148. Het blijkt echter hier dat EINSTEIN's hypothese equivalent is met het aangeven van een invariant stel $g_{\mu\nu}$, en wel het stel (2A).

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu} = - \varkappa (T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Bovendien blijkt het noodig te zijn zich de ruimte gevuld te denken met eene materie van zoo enorm groote totaal-massa, dat daarbij alle ons bekende massa geheel in het niet valt. Deze hypothetische materie zal ik met een kort woord aanduiden als „wereldmaterie".

EINSTEIN veronderstelt alleen dat de *drie*-dimensionale ruimte eindig is. Hiermee hangt samen dat in (2 A) $g_{44} = 1$ blijft, en niet als de andere $g_{\mu\nu}$ nul wordt. Dit heeft mij op het denkbeeld gebracht[1]) EINSTEIN's hypothese uit te breiden tot de *vier*-dimensionale wereld. Men krijgt dan een stel $g_{\mu\nu}$, die in het oneindige ontaarden tot

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2B)$$

Bovendien doet zich het verrassende resultaat voor dat nu geen wereldmaterie noodig is.

Om de analogie tusschen de beide gevallen goed te doen uitkomen geef ik de formules naast elkaar. De formules A hebben betrekking op EINSTEIN's hypothese (*drie*-dimensionaal), de formules B op de hier ingevoerde veronderstelling (*vier*-dimensionaal). Ik zal de indices i en j gebruiken als zij alleen de waarden 1, 2, 3 aannemen, terwijl μ en ν van 1 tot 4 loopen. Verder is Σ een som van 1 tot 4 en Σ' een som van 1 tot 3, terwijl $\delta_{\mu\mu} = 1$, en $\delta_{\mu\nu} = 0$ als $\mu \neq \nu$.

Eerst neem ik het door EINSTEIN gebruikte coördinatenstelsel. In geval A is $x_4 = ct$, in B neem ik voor de symmetrie[2]) $x_4 = ict$. In beide gevallen is R de straal van de hyperspheer. De $g_{\mu\nu}$ worden dan in de twee gevallen:

A	B
$g_{ij} = - \delta_{ij} - \dfrac{x_i x_j}{R^2 - \Sigma' x^2_i}$	$g_{\mu\nu} = - \delta_{\mu\nu} - \dfrac{x_\mu x_\nu}{R^2 - \Sigma x^2_\mu}$
$g_{44} = 1$	

Om het spherische karakter beter te doen uitkomen voer ik hyperspherische coördinaten in door de transformaties:

---

[1]) Het denkbeeld de vier-dimensionale wereld als spherisch op te vatten, ten einde aldus het vaststellen van grenswaarden te vermijden, werd reeds eenige maanden geleden door Prof. EHRENFEST in een gesprek met den schrijver geopperd. Het is toen echter niet verder uitgewerkt.

[2]) Men kan ook $x_4 = ct$ nemen, dan is de vier dimensionale wereld hyperboloïdisch in plaats van sperisch, maar de resultaten blijven dezelfde.

$x_1 = R \sin\chi \sin\psi \sin\vartheta$	$x_1 = R \sin\omega \sin\chi \sin\psi \sin\vartheta$
$x_2 = R \sin\chi \sin\psi \cos\vartheta$	$x_2 = R \sin\omega \sin\chi \sin\psi \cos\vartheta$
$x_3 = R \sin\chi \cos\psi$	$x_3 = R \sin\omega \sin\chi \cos\psi$
	$x_4 = R \sin\omega \cos\chi$

De uitdrukking voor het lijnelement wordt dan in de beide gevallen:

$$A:\quad ds^2 = -R^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\vartheta^2)] + c^2dt^2,$$

$$B:\quad ds^2 = -R^2[d\omega^2 + \sin^2\omega\{d\chi^2 + \sin^2\chi(d\psi^2 + \sin^2\psi d\vartheta^2)\}].$$

Ten slotte voer ik de „stereographische projectie" uit, en voer tevens weer rechthoekige cartesische coördinaten in, door de transformaties:

A	B
$r = 2R \tan\frac{1}{2}\chi$	$h = 2R \tan\frac{1}{2}\omega$
$x = r \sin\psi \sin\vartheta$	$x = h \sin\chi \sin\psi \sin\vartheta$
$y = r \sin\psi \cos\vartheta$	$y = h \sin\chi \sin\psi \cos\vartheta$
$z = r \cos\psi$	$z = h \sin\chi \cos\psi$
	$ict = h \cos\chi$
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = h^2$

Natuurlijk kan men in A x, y, z en in B x, y, z, ict willekeurig verwisselen. Ik stel verder ter bekorting

$$\sigma = \frac{1}{4R^2}.$$

De $g_{\mu\nu}$ voor de variabels x, y, z, ct worden dan [1])

[1]) In het stelsel B worden alle $g_{\mu\nu}$ oneindig op de „hyperboloïde"

$$1 + \sigma h^2 = 0 \text{ of } 4R^3 + x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Deze schijnbare discontinuiteit is ingevoerd, doordat wij terwille van de symmetrie de vier-dimensionale wereld als spherisch hebben voorgesteld, terwijl zij in werkelijkheid hyperboloïdisch is, en bestaat uit twee bladen, die alleen in het oneindige samenhangen. De formules omvatten beide bladen, hoewel natuurlijk slechts één van de twee de werkelijke wereld voorstelt. De hyperboloïde (a) is de grens tusschen de afbeeldingen der twee bladen op de euclidische ruimte x, y, z, ct. Zij snijdt de t-as in de punten $ct = \pm 2R$, waarvan de afstand tot den oorsprong, in natuurlijke maat gemeten, is $\int_0^{2R} \frac{c\,dt}{1 - \sigma c^2t^2} = \infty$. De lengte van de halve x-as in natuurlijke maat is in beide systemen A en B: $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + \sigma x^2} = \pi R$.

A	B
$g_{ij} = -\dfrac{\delta_{ij}}{(1+\sigma r^2)^2}$	$g_{ij} = -\dfrac{\delta_{ij}}{(1+\sigma h^2)^2}$
$g_{44} = 1$	$g_{44} = \dfrac{1}{(1+\sigma h^2)^2}$

. . . . . (5)

Alle $g_{\mu\nu}$ buiten de diagonaal zijn nul. Als σ zeer klein is hebben, voor matige waarden van r en h, de $g_{\mu\nu}$ zeer nabij de waarden (1), en in het oneindige naderen ze tot de boven reeds gegeven waarden (2 A) en (2 B).

Om de betrekking tusschen σ en λ te vinden, moeten wij de waarden (5) substitueeren [1]) in de vergelijkingen (4). Daarbij moeten wij rekening houden met de eventueele noodzakelijkheid van het aannemen eener wereldmaterie. Wij verwaarloozen alle gewone materie, en deze wereldmaterie denken wij ons gelijkmatig [2]) over de ruimte verdeeld en in rust, zoodat $T_{44} = g_{44}\varrho$ en alle andere $T_{\mu\nu} = 0$. De veldvergelijkingen worden dan:

$$G_{ij} - (\lambda + \tfrac{1}{2}\varkappa\varrho)\, g_{ij} = 0,$$
$$G_{44} - (\lambda + \tfrac{1}{2}\varkappa\varrho)\, g_{44} = -\varkappa\varrho.$$

Voor de waarden van $G_{\mu\nu}$ vindt men in de beide stelsels

A	B
$G_{ij} = 8\sigma g_{ij}$	$G_{\mu\mu} = 12\sigma g_{\mu\mu}$
$G_{44} = 0,\; g_{44} = 1$	

Hieruit volgt

$\lambda = 4\sigma$	$\lambda = 12\sigma$
$\varrho = \dfrac{8\sigma}{\varkappa}$	$\varrho = 0$

. . . . (6)

Het resultaat van A is hetzelfde als EINSTEIN gevonden heeft. Bij B is $\varrho = 0$: de hypothetische wereldmaterie bestaat niet.

Welk stelsel verdient nu de voorkeur: A met wereldmaterie, B zonder wereldmaterie, beide met de veldvergelijkingen (4) en in het oneindige de $g_{\mu\nu}$ (2A) en (2B), of het oorspronkelijke stelsel zonder wereldmaterie met de veldvergelijkingen (3) en de $g_{\mu\nu}$ (1), die in het oneindige zoo blijven?

---

[1]) Men kan natuurlijk even goed de waarden in elk ander coördinatensysteem nemen.

[2]) Bedoeld is eene verdeeling met constante ϱ, als ϱ de *natuurlijk* gemetene densiteit is. De in coördinatenmaat gemetene densiteit is dan niet constant, maar nadert (in het stelsel x, y, z, t) in het oneindige tot nul. In het hyperspherische coördinatenstelsel is ook de in coördinaten-maat gemetene densiteit constant.

Zuiver physisch, voor de beschrijving der verschijnselen in onze nabijheid, heeft deze vraag geen belang. In onze nabijheid gelden in elk geval binnen de grenzen der nauwkeurigheid van onze waarnemingen, de waarden (1) der $g_{\mu\nu}$ en verschillen de veldvergelijkingen (4) niet van (3). De vraag is dus alleen: hoe wenschen wij daarbuiten te extrapoleeren? De keus kan derhalve niet door physische argumenten beslist worden, maar moet afhangen van metaphysische of philosophische overwegingen, waarbij natuurlijk ook persoonlijke voorkeur en smaak een rol spelen.

Op de vraag: Wanneer alle materie weggedacht wordt, behalve één materieel punt, dat als proeflichaam dienst doet, heeft dan dat proeflichaam traagheid? eischt de school van MACH het antwoord *Neen*. De ervaring geeft echter zeer stellig het antwoord *Ja*, wanneer onder „alle materie" wordt verstaan alle gewone physische materie: sterren, nevels, sterrenhoopen, etc. De volgelingen van MACH zijn dus gedwongen het bestaan van nog andere materie aan te nemen: de wereldmaterie. Houdt men aan dezen eisch vast, dan moet men wel het stelsel A kiezen, daar dit het eenige is dat eene wereldmaterie toelaat.[1])

Deze wereldmaterie heeft evenwel geenerlei physische beteekenis en dient voor niets anders dan om weggedacht te kunnen worden. Uit de formule (6) blijkt echter dat als men ze wegdenkt ($\varrho = 0$) de veldvergelijkingen niet voldaan zijn: het wegdenken schijnt een logische onmogelijkheid, de wereldmaterie *is*, in het stelsel A, de drie-dimensionale ruimte, of is er tenminste onafscheidelijk mee verbonden.

Men kan ook den eisch van MACH laten vallen, en hem vervangen door den eisch dat in het oneindige de $g_{\mu\nu}$, of alleen de ruimtelijke g_{ij}, nul moeten zijn, of ten minste invariant voor alle transformaties. Deze eisch kan zoo uitgedrukt worden, dat het mogelijk moet zijn dat de geheele wereld willekeurige bewegingen uitvoert zonder dat daarvan door eenige waarneming ooit iets kan blijken. Wil men voor de vierdimensionale wereld deze aanschouwelijke voorstelling [2])

[1]) Van de vroeger door EINSTEIN verdedigde, en door mij bestreden, opvatting dat het mogelijk zou zijn met de vergelijkingen (3), door middel van zeer groote en zeer ver verwijderde massa's, in het oneindige een invariant stel $g_{\mu\nu}$ te krijgen, heeft EINSTEIN zelf thans de onjuistheid aangetoond. (l. c. blz. 146).

[2]) Natuurlijk is hierbij van aanschouwelijkheid eigenlijk geen sprake. Ook reeds de drie-dimensionale wereld moet, opdat zij „bewegingen" kunne uitvoeren, d. i. opdat haar plaats een veranderlijke functie van den tijd zij, in een minstens drie-dimensionale „absolute" ruimte (*niet* de tijd-ruimte x, y, z, t) gedacht worden. Om van „beweging" der vier-dimensionale wereld te kunnen spreken moet men zich behalve een minstens vier-dimensionale absolute ruimte, waarin zij zich kan bewegen, ook

doorvoeren, dan moet men zich haar als bewegelijk in een andere, ,,absolute", vier- (of meer-) dimensionale ruimte denken. Het stelsel A met de waarden (2A) voor de $g\mu\nu$ in het oneindige voldoet aan dezen eisch als zij alleen voor de drie-dimensionale wereld wordt gesteld, en als men de invariantie eischt niet voor *alle* transformaties, maar alleen voor die, waarvoor in het oneindige $t' = t$ is.[1]) Stelt men den eisch voor de vierdimensionale wereld en voor *alle* transformaties, dan voldoet alleen het stelsel B. De tijd heeft dus in het stelsel A een bijzondere positie. Dat dit zoo zijn moet is ook wel a priori in te zien. Immers te spreken van *de* drie-dimensionale ruimte staat gelijk, zoo al niet met het invoeren van een absoluten tijd, dan toch met de veronderstelling, dat er in elk punt der vier-dimensionale ruimte één bepaalde coördinaat x_4 is, die boven alle anderen als tijd de voorkeur verdient, en dat dan ook altijd en overal die éene als tijd gekozen wordt. Dat de tijd zoo principieel zou verschillen van de ruimte-coördinaten, schijnt wel eenigszins in strijd te zijn met de volkomen symmetrie der veldvergelijkingen en der bewegingsvergelijkingen (vergelijkingen van de geodetische lijn) ten opzichte der vier variabels.

Op enkele bijzonderheden van de stelsels A en B moge nog de aandacht gevestigd worden. In A is de lichtsnelheid veranderlijk[2]), in het oneindige wordt zij oneindig. In B is zij altijd en overal dezelfde. Uit de mogelijkheid om bepaalde lijnen te identifieeren in de spectra, uit het niet negatief zijn der parallaxen, van de verst verwijderde ons bekende objecten, zooals b.v. de Maghellaansche wolken, is af te leiden dat voor die objecten nog altijd met groote benadering $g_{ij} = -\delta_{ij}$, $g_{44} = 1$ moet zijn, derhalve dat voor A σr^2,

---

nog een extra-mundalen „tijd" denken om bij deze „beweging" als onafhankelijk variabele te dienen. Uit dit alles blijkt dat men aan den eisch der invariantie van de grenswaarden *geen* physische voorstelling kan vastknoopen. Het is een zuiver mathematische eisch.

[1]) Zoo is b.v. een gewone LORENTZ-transformatie:

$$x' = \frac{x - qct}{\sqrt{(1-q^2)}} \quad , \quad ct' = \frac{ct - qx}{\sqrt{(1-q^2)}}$$

in het stelsel A niet geoorloofd, maar moet vervangen worden door

$$x' = \frac{x - qct}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{q^2}{(1+\sigma r^2)^2}\right)}} \quad , \quad ct' = \frac{ct - \dfrac{qx}{1+\sigma r^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{q^2}{(1+\sigma r^2)^2}\right)}}.$$

[2]) Ten minste in het coördinatensysteem x, y, z, ct; in het systeem χ, ψ, ϑ, ct is zij constant.

voor $B\ \sigma h^2$ zeer klein moet zijn. In het geval A volgt hieruit een bovenste limiet voor σ, in het geval B echter niet, daar, ten gevolge van de onveranderlijkheid der lichtsnelheid, bij alle zuiver optische waarnemingen $h^2 = 0$ is (als de invloed der materie verwaarloosd wordt).

Wat den invloed van σ op de planetenbeweging betreft: in beide gevallen blijft het baanvlak ongestoord. In het geval A is er een beweging van het perihelium ten bedrage van

$$d\tilde{\omega} = \sigma a^2 nt,$$

die wegens de kleinheid van σa^2 geheel te verwaarloozen is. In het geval B zijn de door σ voortgebrachte termen een orde grooter, ten gevolge van het feit dat hier alle g_{ij} expliciet van t afhangen. De periheelbeweging wordt

$$d\tilde{\omega} = \frac{3\sigma a^3}{\lambda_0^2} nt - 2\sigma c^2 t^2,$$

terwijl ook de andere elementen termen met t^2 bevatten: zoo is b.v. de parameter van de elliptische baan

$$p = p_0\, e^{-2\sigma c^2 t^2},$$

waar $\lambda_0^2 = \varkappa m / 8\pi$, als m de massa van de zon is, en $e = 2.718\ldots$ Daar deze „storingen” volgens de ervaring onmerkbaar zijn, kan men ook hier een bovenste limiet voor σ aangegeven [1]).

Ik zal geen poging doen deze bovenste limiet met eenige nauwkeurigheid te bepalen. Voor beide stelsels zal men b.v. kunnen nemen $\sigma < 10^{-24}$ in astronomische eenheden, of $2\sigma < 10^{-50}$ in centimeters [2]). Verder dan het aangeven van een bovenste grens kan men echter niet gaan. Voor het bepalen van de waarde van σ zou het noodig zijn dat deze constante op eenig physisch of astronomisch

---

1) De termen van de laagste orde in de „storende krachten” zijn in de beide gevallen:

$$In\ A: \quad S = -2\sigma + \frac{2\sigma}{\lambda_0^2} r(\dot{r}^2 - r^2\dot{\vartheta}^2) \quad , \quad T = \frac{4\sigma}{\lambda_0^2} r^2 \dot{r}\dot{\vartheta}, \quad W = 0,$$

$$in\ B: \quad S = \frac{2\sigma}{\lambda_0^2} r - \frac{2\sigma}{\lambda_0^2} ct\dot{r} \quad , \quad T = -\frac{2\sigma}{\lambda_0^2} ctr\dot{\vartheta}, \quad W = 0.$$

(Voor de notatie zie b.v. DE SITTER, *On* EINSTEIN's *theorie of gravitation*, M.N. Vol. LXXVI, blz. 724 en vlgg.).

De termen met c^2t^2 in de uitdrukkingen der elementen in het stelsel B ontstaan doordat zoowel de tijds- als de lengte-eenheid (in coördinatenmaat) van den tijd afhankelijk zijn.

2) De densiteit van de wereldmaterie wordt dan: $\varrho < 3.10^{-17}$ (astronomische eenheden) of $\varrho < 2.10^{-23}$ (C. G. S. eenheden). Dit komt overeen met ongeveer één ster in een bol van 1 parsec straal.

verschijnsel een merkbaren invloed had. Nu is het natuurlijk niet a priori uitgesloten, dat te eeniger tijd waarnemingen gedaan zullen worden, of verschijnselen ontdekt zullen worden, die zich met behulp van σ laten verklaren, maar voorloopig zijn zulke verschijnselen niet bekend, en is er niets dat in die richting wijst. De constante σ dient alleen om aan een door velen gevoelde philosophische behoefte tegemoet te komen, doch heeft geen eigenlijk physische beteekenis, al laat zij zich mathematisch interpreteeren als een kromming der ruimte.

Ten slotte blijft het natuurlijk ook altijd nog mogelijk de beide stelsels A en B te verwerpen en zich te houden aan de oorspronkelijke veldvergelijkingen (3) met de, in het oneindige niet invariante, waarden (1) der $g_{\mu\nu}$. Weliswaar blijft dan de traagheid onverklaard: men moet dan het onverklaard laten der traagheid verkiezen boven eene verklaring door de onbepaalde en onbepaalbare constante λ. Het is in elk geval niet te ontkennen dat het invoeren dezer constante schaadt aan de symmetrie en elegantie van EINSTEIN's oorspronkelijke theorie, waarvan juist een der groote aantrekkelijkheden was dat zij zoo veel bereikte zonder eenige nieuwe hypothese of empirische constante in te voeren.

Naschrift.

De heer EINSTEIN, wien ik den inhoud van het bovenstaande in het kort had medegedeeld, schrijft mij: „Es wäre nach meiner Meinung unbefriedigend, wenn es eine denkbare Welt ohne Materie gäbe. Das $g_{\mu\nu}$-Feld soll vielmehr *durch die Materie bedingt sein, ohne dieselbe nicht bestehen können.* Das ist der Kern dessen, was ich unter der Forderung von der Relativität der Trägheit verstehe". Hier wordt dus wat ik boven noemde de logische onmogelijkheid van het wegdenken der materie juist als eisch gesteld. Men kan dit den „materieelen relativiteitseisch" noemen. Hieraan kan alleen voldaan worden door het stelsel A te kiezen, met zijn wereldmaterie, d. i. door de constante λ in te voeren, èn den tijd een geheel afzonderlijke plaats onder de vier coördinaten toe te kennen.

Hier tegenover staat de „mathematische relativiteits-eisch", d. i. de eisch dat de grenswaarden der $g_{\mu\nu}$ invariant zijn. Deze eisch, waaraan zooals reeds werd opgemerkt geen eigenlijk physische voorstelling is vast te knoopen, spreekt niet van materie. Hieraan kan voldaan worden met behoud van de volkomen relativiteit van den tijd, en zonder wereldmaterie, door het stelsel B te kiezen. De constante λ heeft men ook dan noodig. Het invoeren van deze constante kan alleen vermeden worden door in het geheel geen relativiteit der traagheid te eischen.

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN biedt, mede namens den Heer H. R. BRUINS eene mededeeling aan over *„Experimenteele bepaling der fiktieve Oploswarmte"*. III.

1. In de volgende regels zal eene vierde methode worden ontwikkeld en experimenteel worden uitgewerkt, die in staat stelt de fiktieve oploswarmte eener stof in een bepaald oplosmiddel bij gegeven temperatuur en druk te bepalen. Evenals de derde methode, in onze tweede mededeeling [1]) beschreven, zal zij worden toegepast ter bepaling van de fiktieve oploswarmte van kadmiumjodide bij 18°.0 C.

2. Beschouwt men twee omkeerbare galvanische cellen, die resp. volgens het schema:

Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het Kation K	Oplossing van een zout KA, verzadigd bij $T°$, in aanraking met de vaste phase	Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het Anion A	(Cel A)

en:

Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het Kation K	Oplossing van het zout KA, verzadigd bij $T°$, *zonder* vaste phase	Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het Anion A	(Cel B)

zijn samengesteld, dan geldt volgens § 4 onzer tweede mededeeling bij de temperatuur T_0, bij welke de samenstelling der verzadigde oplossing in cel A identiek wordt met die in cel B:

$$(F)_{T_0} = T_0\left[\left(\frac{dE}{dT}\right)_A - \left(\frac{dE}{dT}\right)_B\right] 46105 \text{ gramkalorieën}, \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin $(F)_{T_0}$ de fiktieve oploswarmte van het zout bij de temperatuur T_0 voorstelt, $\left(\frac{dE}{dT}\right)_A$ en $\left(\frac{dE}{dT}\right)_B$ de temperatuurkoëfficiënten der cellen bij T_0.

Nu bestaat echter tusschen $\left(\frac{dE}{dT}\right)_A$ en $\left(\frac{dE}{dT}\right)_B$ bij gegeven temperatuur en druk de volgende betrekking:

$$\left(\frac{dE}{dT}\right)_A = \left(\frac{dE}{dT}\right)_B + \left(\frac{dE}{dC}\right)_{T=konst} \times \frac{dC}{dT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

[1]) Deze Verslagen **25**, 1046 (1917).

Hierin is $\left(\frac{dE}{dC}\right)_T$ de verandering, die de E. K. van eene cel *zonder* vaste phase ondergaat, wanneer bij T_0 de koncentratie der daarin aanwezige oplossing met de eenheid van koncentratie verandert, terwijl $\frac{dC}{dT}$ den temperatuurkoëfficiënt der oplosbaarheid van het zout KA bij T_0 voorstelt.

Substitueeren wij (2) in (1) dan ontstaat de uitdrukking:

$$(F)_{T_0} = T_0 \left(\frac{dE}{dC}\right)_{T.} \times \frac{dC}{dT} \times 46105 \text{ gramkalorieën} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bepaalt men dus $\left(\frac{dE}{dC}\right)_T$ en $\frac{dC}{dT}$, dan wordt daarmede $(F)_{T_0}$ bekend.

3. Aleer wij tot het bespreken der wijze van bepaling van $\left(\frac{dE}{dC}\right)_T$ en $\frac{dC}{dT}$ overgaan, worde opgemerkt, dat de gebruikte materialen (water, kadmiumjodide, kwik, merkurojodide en kadmiumamalgaam) dezelfde waren, die bij het onderzoek, in onze tweede mededeeling behandeld, werden gebruikt. Hetzelfde geldt voor de onderzochte cellen, alsmede voor de uitvoering der metingen der E. K.

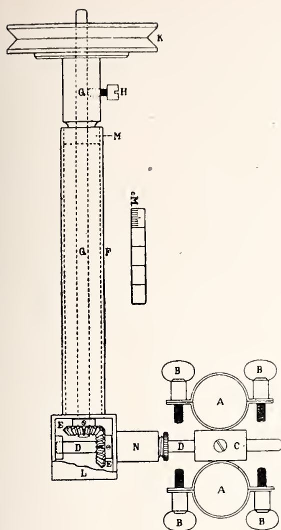
4. *Bepaling van* $\left(\frac{dC}{dT}\right)_{18^\circ.0}$

Ten einde den temperatuurkoëfficiënt der oplosbaarheid bij T_0 ($= 18^\circ.0$ C.) te bepalen, hebben wij eene reeks oplosbaarheidsbepalingen van kadmiumjodide bij 0°, 12°, 18°, 21° en 26° uitgevoerd. In de literatuur zijn slechts gegevens van Dietz en Mylius [1]) bij 0°, 18°, 50°, 75° en 100° voorhanden. Daar omtrent de methode van analyse der verzadigde oplossingen opgaven ontbreken en Dietz duplikaat bepalingen niet heeft uitgevoerd, hebben wij zelf die waarden bepaald. Daarbij werden, zooals nader zal blijken, afwijkingen gevonden, die voor ons onderzoek niet van belang zijn ontbloot.

De door ons gevolgde methode van oplosbaarheidsbepaling was in 't kort als volgt: Kadmiumjodide en water werden in fleschjes van ±25 c.c. inhoud, die met kaoutchouc stoppen waren gesloten, gedurende eenige uren geschud. De fleschjes waren geplaatst in het toestelletje, dat in Fig. 1 is afgebeeld. Zij worden met behulp der schroeven

---

[1]) Zeitschr. f. anorg. Chemie **20**, 240 (1899); Ber. d. d. chem. Gesellschaft **32**, 90 (1899); Wiss. Abh. der Phys. Techn. Reichsanstalt **3**, 434 (1900).



BBBB in de koperen ringen *AA* geklemd, die op de as *D* zijn bevestigd. Deze loopt door een stopbus *N* naar het koperen doosje *L*, waarin zich, geheel omgeven door olie, de kamraderen *EE* bevinden. De as *G*, die door de buis *F* loopt, welke in een statief wordt vastgeklemd, wordt met behulp der schijf *K* door een motor in draaiing gehouden. Het geheel kan in een willekeurigen (water- of olie-) thermostaat worden gedompeld.

Met behulp van den toluol-regulator in § 11 onzer tweede mededeeling beschreven, werd de temperatuur tot op 0°,01 nauwkeurig konstant gehouden.

De verzadigde oplossingen werden na het schudden met behulp van een vakuumpipet [1]) uit de fleschjes genomen en daarna geanalyseerd. Daarbij werd de methode met den ringbrander van W. EULER [2]) gevolgd, nadat wij ons ervan hadden overtuigd, dat zij ook voor de bepaling van CdI_2 betrouwbare resultaten levert. Te dien einde werden twee hoeveelheden „Kadmium KAHLBAUM" (veronteiniging 0.005 %) in platinakroezen afgewogen, in zuiver verdund joodwaterstofzuur opgelost en tot konstant gewicht op den ringbrander verhit. Hierbij behoort overmatig sterke verhitting zorgvuldig te worden vermeden, teneinde ontleding van het zout te voorkomen. Aldus werd gevonden:

a. gewicht kadmium 0,6254 gr. CdI_2 gevonden: 2.0372 gr. (berekend 2.0378 gr.) [3])

b. gewicht kadmium 0,5133 gr. CdI_2 gevonden: 1.6730 gr. (berekend 1.6725 gr.)

In analyse *a.* bedraagt de afwijking — 0,03 %.

„ „ *b.* „ „ „ + 0,03 %.

In Tabel I zijn de resultaten der oplosbaarheidsbepalingen vereenigd.

Met behulp der oplosbaarheidscijfers, gevonden bij 0°, 12°, en 26°, vindt men voor de oplosbaarheidskromme:

$$C = 44.18 + 0,0828\,t + 0,000183\,t^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin *t* de temperatuur voorstelt.

Met behulp van deze vergelijking zijn ter kontrôle de waarden van C bij 18°,0 en 21°,0 berekend. (Zie de Tabel onder berekend). De kromme geeft dus het verloop der oplosbaarheid in het onderzochte temperatuurinterval geheel weer.

---

1) Zie ERNST COHEN, INOUYI und EUWEN. Zeitschr. f. physik. Chemie **75**, 257 (1910).

2) Zeitschr. f. anorg. Chemie **25**, 146 (1900).

3) Atoomgew. Cd = 112.4 ; I = 126.92.

TABEL I.

Tempe-ratuur	Gew. oplossing in gr.	Gew. zout in gram	Schudtijd in uren	Gr. zout in 100 gr. oplossing	Gemidd. gr. zout in 100 gr. oplossing	Bere-kend	Mylius en Dietz gevonden
0°.0	7.6400	3.3744	6	44.17	**44.18**	(44.18)	44.39
0.0	2.0898	0 9237	6	44.20			
12°.0	5.8745	2.6551	18	45.19	**45.20**	(45.20)	—
12.0	8.2378	3.7243	18	45.21			
18°.0	7.7409	3.5386	3½	45.71	**45.72**	45.73	46.02
18.0	8.2304	3.7641	3½	45.73			
18.0	3.5774	1.6353	24	45.71			
18.0	8.9231	4.0816	24	45 74			
21°.0	7.6545	3.5196	4½	45.98	**46.00**	46.00	—
21.0	9.2997	4.2794	4½	46.01			
26°.0	7.3929	3.4337	3½	46.45	**46.46**	(46.46)	—
26.0	6.1679	2.8660	18	46.47			
26.0	6.3500	2.9493	18	46.45			

Uit onze vergelijking (4) volgt:

$$\left(\frac{dC}{dT}\right)_{18^{0}.0} = + \mathbf{0{,}08939}.$$

5. *Bepaling van* $\left(\frac{dE}{dC}\right)_{18^{0}.0}$.

Om deze waarde vast te leggen, werden een aantal cellen van het type B (zie § 2) gekonstrueerd, die verschillend gekoncentreerde oplossingen van CdI_2 bevatten.

Wij hebben te dien einde door direkte inweging oplossingen bereid, die resp. 46.284; 45.730; 44.405; 43.201 en 42.277 gram CdI_2 op 100 gram oplossing bevatten.

Het gebruikte CdI_2 werd te voren tot konstant gewicht gedroogd (bij 140°). Men weegt in een kolfje van Jenaglas een zekere hoeveelheid van het droge zout af, voegt uit een buret eenige cc. water minder toe, dan de oplossing later moet bevatten en brengt door verwarming het zout in oplossing. Nadat alles weder op kamertemperatuur is afgekoeld, wordt zooveel water toegevoegd, tot de gewenschte

koncentratie ongeveer is verkregen. Daarna wordt weer gewogen en berekent men de koncentratie, die aldus is ontstaan.

De oplossing die 45.730 gram zout op 100 gr oplossing bevat, is verzadigd bij 18°.0, die welke 46.284 gr. bevat, is oververzadigd. De oververzadiging blijft echter bij 18°.0 voortdurend gehandhaafd, hetgeen blijkt uit het konstant blijven der E.K. der cel bij die temperatuur.

Nadat de cellen met de verschillende oplossingen waren gevuld (van elke koncentratie 4 cellen), werd hare E. K. bij 18°.0 C. gedurende een aantal dagen dagelijks bepaald.

TABEL II. Temperatuur 18°.00 C.

Naam der cellen	N⁰.	Na 24 uren	Na 48 uren	Na 72 uren	Na 96 uren
L	1		0.41400	0.41401	0.41401
	2		0.41401	0.41401	0.41401
	3		0.41400	0.41400	0.41401
	4		0.41402	0.41401	0.41401
H	1	0.41460	0.41461	0.41460	0.41459
	2	0.41459	0.41461	0.41459	0.41459
	3	0.41460	0.41461	0.41459	0.41458
	4	0.41454	0.41454	0.41454	0.41457
K	1		0.41591	0.41591	0.41591
	2		0.41590	0.41590	0.41589
	3		0.41590	0.41594	0.41593
	4		0.41592	0.41590	0.41590
N	1	0.41709	0.41708	0.41708	0.41707
	2		0.41708	0.41708	0.41708
	3	0.41709	0.41708	0.41708	0.41709
	4		0.41712	0.41710	0.41709
M	1	0.41798	0.41794	0.41796	0.41796
	2	0.41796	0.41791	0.41791	0.41791
	3	0.41796	0.41794	0.41796	0.41797
	4	0.41795	0.41786	0.41790	0.41793

Tabel II (zie p. 1281) bevat de resultaten der metingen, welker gemiddelde eindwaarde in Tabel III is geresumeerd.

TABEL III.

Naam der cellen	Koncentratie (gr. zout in 100 gr. opl.)	E.K. in Volt bij 18°.0 C. gevonden	E.K. in Volt bij 18°.0 C. berekend
L	46.284	0.41401	
H	45.730	0.41458	0.41458
K	44.405	0.41591	
N	43.201	0.41709	0.41708
M	42.277	0.41794	

Berekent men, uitgaande van de E. K. der *L*, *K* en *M* cellen, de afhankelijkheid der E. K. van de koncentratie (C) dan vindt men:

$$E_{18^\circ.0} = 0{,}43150 + 0{,}000283\, C - 0{,}0\ 001428\, C^2 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Uit de kolom onder „berekend" in Tabel III blijkt, dat ook de E.K. der H en N-cellen door vergelijking (5) goed wordt weergegeven.

Uit deze verg. vinden wij bij de koncentratie $C = 45.73$

$$\left(\frac{dE}{dC}\right)_{18^\circ.0} = -\mathbf{0.001023}\,\frac{Volt}{Procent}$$

6. Voeren wij thans de voor $\left(\frac{dC}{dT}\right)_{18^\circ.0}$ en $\left(\frac{dE}{dC}\right)_{18^\circ.0}$ gevonden waarden in onze vergelijking (3) in, dan vinden wij voor de fiktieve oploswarmte van kadmiumjodide bij 18°.0 C.:

$$(F)_{18^\circ.0} = -291 \times 0.08939 \times 0.001023 \times 46105 =$$
$$-\mathbf{1227}\ \text{gramkalorieën.}$$

Volgens de derde methode, beschreven in onze tweede mededeeling, werd hiervoor gevonden — **1246** gramkalorieën.

Utrecht, Maart 1917. VAN 'T HOFF-*Laboratorium*.

Physiologie. De Heer ZWAARDEMAKER doet een mededeeling over *„Afstandsbetrekkingen bij de bestraling van het geïsoleerd hart met mesothorium en radium."*

Vroeger[1]) mocht ik met mijne medewerkers op grond van een aanvankelijk 34-tal proeven vaststellen, dat een geïsoleerd kikvorschhart, volgens de methode KRONECKER doorstroomd met RINGER'sche

[1]) H. ZWAARDEMAKER, C. E. BENJAMINS en T. P. FEENSTRA, Radium-bestraling en Hartswerking, Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1916. II. p. 1923.

vloeistof, waaraan het kaliumchloride is onttrokken, na eerst stil te hebben gestaan, door bestraling met mesothorium of radium weer aan het kloppen gaat [1]). Wij bezigden 6 mgr. mesothorium, in een glazen bolletje opgesloten en 3 mgr. radiumbromide, onder mica besloten. Gemiddeld moest de bestraling een half uur worden voortgezet, voor en aleer het herstel der bewegingen plaats had [2]). Dan echter vertoonden zij zich in volle kracht en regelmatigheid, ongeveer in hetzelfde tempo als vroeger, voor dat het hart van circuleerend kalium was bevrijd. De mesothoriumproeven gelukten ook nog, wanneer de straling een aluminiumscherm van 0.2 mM dikte moest doordringen.

In de Februarizitting [3]) mocht ik vervolgens aantoonen, dat het kalium en het rubidium, wanneer zij een van beide in de circulatievloeistof zijn opgenomen, in hun werking geneutraliseerd worden door uranium, thorium, radium of emanatie. De vrije bestraling van het orgaan kan eveneens in deze reeks een plaats vinden en wel aan den kant van het kalium en rubidium. Haar uitwerking kan door uranium of thorium, in de circulatie gebracht, worden geneutraliseerd.

Dit gaf mij aanleiding om de quantitatieve verhoudingen te onderzoeken, die aan het licht komen, wanneer een mesothoriumpraeparaat van 5 mgr. in glazen bolletje op verschillende afstanden wordt geplaatst en aan een neutraal mengsel van 40 mgr. kaliumchloride en 10 mgr. uranylnitraat per Liter de voor elken afstand ter neutralisatie benoodigde hoeveelheid uranylzout wordt toegevoegd [3]).

Men denke zich een kikvorschhart volgens de methode van Kronecker eerst door Ringer'sche vloeistof, daarna gedurende eenigen tijd met kaliumlooze circulatievloeistof doorstroomd van de samenstelling 7 gram natriumchloride, 200 mgr. calciumchloride en 200 mgr. natriumbicarbonaat per Liter. Op een gegeven oogenblik wordt deze inactieve circulatievloeistof vervangen door een van gelijke samenstelling, waaraan 40 mgr. kaliumchloride en 10 mgr. uranylnitraat is toegevoegd. Het op die wijze behandelde hart staat

---

[1]) Het vooraf bevrijden van circulatiekalium is zeer wezenlijk, want bestraling van een hart in situ of met normale Ringer'sche vloeistof doorstroomd, geeft geen merkbare wijziging in de bestaande kloppingen.

[2]) De tijd van het begin der bestraling en de terugkeer der kloppingen is zeer verschillend, o. a. afhankelijk van de snelheid van doorstrooming, de natuurlijke frequentie, de vlugheid, waarmee de inactieve doorstroomingsvloeistof stilstand heeft gegeven, enz.

[3]) Bij deze proeven had ik mij in de nauwgezette hulp van den Heer T. P. Feenstra, adsistent bij de Physiologie, te verheugen.

weldra stil. Dan wordt het praeparaat van 5 mgr. mesothorium (in een glazen bolletje) op nauwkeurig 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 en 1 mM. afstand opgesteld en afgewacht tot het hart zijn kloppingen herneemt, hetgeen plaats heeft na gemiddeld 13 min. (in minimo 1, in maximo 60 minuten). Zoodra het zoover is gekomen, wordt aan het mengsel, dat als doorstroomingsvloeistof dient, eenig uranylnitraat in overmaat toegevoegd, door bijschenken van een oplossing, die per cub. cM. 1 mgr. van het uraanzout bevat. Geleidelijk wordt met deze toevoeging voortgegaan, terwijl de bestraling voortduurt, totdat weldra het hart weer stilstaat. Een enkele lichte aanraking geeft in zulk een geval één systole. Mocht er aanvankelijk een korte reeks volgen dan is het juiste evenwicht nog niet bereikt, en moet nog iets meer uranium worden genomen. Ten slotte is er stilstand en kan deze gedurende 5 à 10 minuten worden gehandhaafd (wij kozen 5 minuten, wanneer de vloeistof betrekkelijk snel doorvloeide, 10 minuten, wanneer het langzaam plaats had).

Het bedoelde evenwicht tusschen straling eenerzijds en uraanovermaat in de doorstroomingsvloeistof anderzijds werd aangetroffen bij

Afstand tusschen mesothorium en hart in mM.	Uranylnitraat toegevoegd aan het oorspronkelijk mengsel in mgr.
8	2 (?)
6	5,5
5	7
4	8
3	12
2	20
1,5	30
1	40

Is zulk een evenwicht op de wijze, die de tabel aangeeft, eenmaal vastgesteld, dan kunnen de omstandigheden desverkiezende opnieuw worden gewijzigd. Men kan het mesothorium dichter bij schuiven of wel nog meer uraanzout toevoegen. In beide gevallen begint het hart weer te kloppen en kan ten tweede male een evenwicht worden opgespoord. Zelfs drie achtereenvolgende evenwichten hebben we op die wijze kunnen doorloopen.

Graphisch voorgesteld verkrijgt men uit de gegevens der tabel een gebogen lijn, die aan een exponentieele kromme herinnert. Ik heb daarom de afstanden op de as der abscissen afgezet en als ordinaten de logarithmen van de hoeveelheden uraanzout in mgr. genomen, die in de opeenvolgende evenwichten aanwezig waren boven de 10 mgr., die van den aanvang af naast 40 mgr. kaliumchloride per Liter doorstroomingsvloeistof voorkwam. In de figuur is de kromme, die dan ontstaat door een getrokken lijn aangegeven.

Gelijk de figuur uitwijst, is de lijn van de logarithmen der tegen de bestraling opwegende uraandoses nagenoeg recht. Alleen voor de groote afstanden bestaat in dit opzicht eenige afwijking.

Deze uitkomst is over het geheel wat zonderling; α-stralen zijn niet in het spel, want de restaureerende invloed op het hart heeft zelfs door een aluminiumscherm van 0,2 mM. en meer plaats. Van de overblijvende β-stralen wordt zeer veel in het hart geabsorbeerd, zooals de opname van het orgaan in het looden dak van een kleine ioniseeringskamer uitwees, terwijl de γ-stralen haast ongehinderd passeeren.

Ook andere overwegingen wijzen de β-stralen in casu aan als biologisch werkzaam. Uit de zooeven beschreven proeven volgt nu, dat het deel, waarop het aankomt, in hooge mate door de lucht absorbeerbaar is.

Reeds op 9.5 mM. is het door uraan compenseerbaar quantum uitgeput. Op 6 mM. is nog slechts zooveel voorhanden als met 5 mgr. uranylnitraat per Liter extra aequivalent is, juist dezelfde hoeveelheid, die vlakbij nog door 0.2 mM. aluminium wordt doorgelaten.[1])

Het weer opwekken der pulsaties in een hart, dat door een geheel inactieve circulatievloeistof (kaliumlooze Ringersche vloeistof) wordt doorstroomd of door een vloeistof, die nauwkeurig antagonistische hoeveelheden kalium en uranium bevat, moet dus aan een breeden bundel van zeer weeke β-stralen worden toegeschreven. Dat deze niet-homogeen weeke stralenmassa in de lucht volgens een nagenoeg exponentieele wet geabsorbeerd wordt, is allerminst wonderbaarlijk. Evenmin, dat wat door de lucht van uit verschillende afstanden aankomt, daarna in het orgaan volledig wordt geabsorbeerd. Wat in de boven beschreven proeven wordt aangetoond is echter daarenboven het feit, dat de uraanhoeveelheden, die op de verschillende afstanden opwegen tegen den herstellenden invloed van de bestraling,

[1]) Het radiumpreparaat liet nog juist toe voor door 0.1 mM. aluminium heen een uraanaequivalent te vinden. Bij de waardeering van zulke uitkomsten, zal men natuurlijk ook de secundaire stralen van zeer week karakter in het oog hebben te vatten, die bij den doorgang door de schermen ontstaan.

zoodat het door het mesothorium in gang gebracht hart weer gaat stilstaan, aan dezelfde quantitatieve wet onderworpen zijn als de absorptie der straling. Met het aangroeien van den afstand behooren deze uraanquanta verminderd te worden zoodanig, dat hun logarithmus omgekeerd evenredig blijft aan den afstand.

Ik zie in de qualitatieve betrekking een aanwijzing tot de aanname, dat de biologisch werkzame energiehoeveelheid, welke het mesothorium in zijn weeke β-straling uitzendt en de tot het evenwicht vereischte uraandosis, waarbij het hart stilstaat, elkanders rechtstreeksche antagonisten zijn. Zoowel de straling als de in het orgaan gebrachte radioactieve materie moeten beide werken door de met haar aangedragen, in dit geval elkaar compenseerende, energiën.

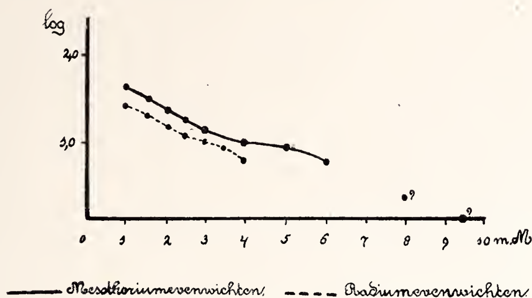
De natuur van de weeke β-stralen, waarom het gaat, schijnt door het bovenstaande vrij scherp omschreven te zijn, ten minste, wanneer men, gelijk wij doen in onze proeven, den herstellenden invloed in het oog vat. Vernietigenden invloed zullen ook de meer doordringende stralen kunnen hebben en het is misschien aan het feit, dat wij ze op den koop toe moeten nemen, toe te schrijven, dat ik door de kunstmatige bestraling altijd een voorbijgaand, nimmer een blijvend herstel heb verkregen.

Wanneer men, op dezelfde wijze als boven voor de mesothoriumbestraling is beschreven, met een radiumpraeparaat van 3 m.gr. te werk gaat en daarbij — omdat het een vlakte-praeparaat is — het voordeel van een gelijkmatiger stralingsveld heeft, komt men tot de volgende evenwichten:

Afstand tusschen radium en hart in mM.	Uranylnitraat toegevoegd aan het oorspronkelijk mengsel in mgr.
4	5
3,5	6,5
3	9
2,5	11,5
2	15
1,5	18
1	22

Ook deze gegevens willen wij graphisch voorstellen en wel zoo, dat

de afstanden op de as der abscissen worden uitgezet en de logarithmen der uraandoses, die het evenwicht herstelden, als ordinaten. In de figuur



vormt dit de gebroken lijn. Wederom mag men haar als ten naastebij recht aanmerken.

Het is duidelijk, dat men in gedachten extrapoleerend naar de ordinaat 0 tot een methode ter bepaling van de biologische waarde van een radio-actief-praeparaat in herstellend opzicht zal kunnen komen. Het is intusschen niet de plaats hier over deze praktische toepassing te handelen.

Dierkunde. — De Heer J. F. van Bemmelen biedt eene mededeeling aan: „*Het kleurenpatroon der Diptera-vleugels*".

Het onderzoek der kleurenpatronen op de vlindervleugels bracht mij tot het besluit, dat in hunne teekening oorspronkelijke en afgeleide (gewijzigde) motieven konden onderscheiden worden, en dat de eerstgenoemde zich in strenge afhankelijkheid van het aderstelsel en in regelmatige rangschikking over de geheele oppervlakte van den vleugel herhaalden. Reeds hieruit liet zich de waarschijnlijkheid voorzien, dat ook de vleugels van andere insectenorden diergelijke verschijnselen zouden vertoonen, dat dus ook bij hen een oorspronkelijk patroon zich van latere secundaire wijzigingen zou laten onderscheiden, en dat dit primitieve patroon eveneens in zijn verspreiding over den vleugel den loop der aderen zou eerbiedigen. En aangezien het vergelijkend onderzoek der vleugeladerstelsels bij verschillende insectenorden de overtuiging heeft gewekt, dat al deze stelsels als wijzigingen van een en denzelfden grondvorm mogen

beschouwd worden[1]), lag de onderstelling voor de hand, dat ook de tusschen die aderen gelegen primitieve kleurenpatronen een fundamenteele overeenkomst zouden vertoonen.

Van deze onderstelling uitgaande, heeft J. BOTKE[2]) trachten aan te toonen, dat de overeenkomst in vleugel-kleurenpatroon der Cossiden, Micropterygiden, Hepialiden en andere families onder de vlinders, met de Trichoptera of Schietmotten en de Panorpata of Schorpioenvliegen, geen toevallige gelijkenis, maar een wezenlijke homologie is. Het ligt voor de hand, dit onderzoek ook tot andere insectenorden uit te breiden.

Als daarbij in de eerste plaats de Tweevleugeligen worden besproken, geschiedt dit niet omdat ik de meening zou zijn toegedaan, dat er een bijzonder nauwe verwantschap tusschen Diptera en Lepidoptera bestaat, en evenmin omdat de Diptera mij bij uitstek primitief georganiseerd toeschijnen, maar meer bepaaldelijk, omdat J. H. DE MEIJERE, in een onlangs (1916) verschenen artikel: Zur Zeichnung des Insekten-, im besonderen des Dipteren- uud Lepidopteren-flügels, (Tijdschrift voor Entomologie) deze beide orden opeenvolgend heeft besproken en bij beider kleurenteekening gelijksoortige eigenschappen heeft opgemerkt; al heeft hij zich ook ervan onthouden, ze in bijzonderheden met elkaar te vergelijken.

DE MEIJERE nu erkent niet het doòr mij gemaakte onderscheid tusschen primitieve en secundaire teekening, en neemt ook niet aan, dat tusschen de patronen der verschillende Diptera-families overeenkomsten zouden kunnen bestaan, die op verwantschap berusten. Integendeel; daar hij bij de Diptera de kleurloosheid als den oorspronkelijken toestand beschouwt, is hij van meening, dat: „aangezien wij gekleurde vleugels in zeer vele en zeer verschillende families aantreffen, het waarschijnlijk is, dat op zeer vele plaatsen in 't systeem (kleuring) zelfstandig is opgetreden".

Toch ziet hij in zooverre verband tusschen deze onafhankelijk van elkaar optredende kleuringen, als hij bepaalde plekken van voorkeur voor kleurvorming meent te kunnen aanwijzen. Waar deze plekken hetzij de aderen zelf zijn, of de tusschen die aderen gelegen ruimten, kan zijn waarneming worden opgevat als een bevestiging der boven uitgesproken bewering, dat het kleurenpatroon oorspronkelijk afhankelijk is van het aderstelsel. Eveneens is dit het

---

[1]) Zie NEEDHAM and COMSTOCK, The wings of Insects, American Naturalist, 1898.

[2]) J. BOTKE, Les motifs primitifs des ailes des Papillons et leur signification phylogénétique. Onderzoekingen verricht in het Zoöl. Lab. der Rijks-Universiteit Groningen V, 1916, Tijdschr. d. Ned. Dierk. Ver. 2de Ser. Dl. XV.

geval met de praedilectie voor kleurophooping langs de vleugelranden en aan den vleugelwortel.

Ook waar DE MEIJERE de vorming van gekleurde dwarsbanden in vele gevallen toeschrijft aan verbreeding van dwarsaderzoomen, kan ik geheel met hem meegaan, evenals in zijn opvatting dat wolkachtige „berooking" door uitbreiding van vlekken (die dus oorspronkelijk kleiner moeten geweest zijn) kan teweeggebracht zijn.

Deze verschijnselen kunnen, — evenzeer als de overgang van vlekken in dwarsstrepen, en de samenvloeiing van twee vlekken ter weerszij van een ader tot één enkele vlek, die dan door de ader middendoor gedeeld wordt — opgevat worden als uitingen van de verschillende manieren waarop een oorspronkelijk patroon zich kan differentieeren en wijzigen.

Het beslissende bewijs, dat de meer ingewikkelde patronen der gekleurde Dipteravleugels mogen beschouwd worden als differentiaties van een en dezelfde eenvoudiger en regelmatiger primitieve teekening, kan slechts geleverd worden door aan te toonen, dat aan het optreden van het definitieve patroon gedurende de ontwikkeling der imago binnen de pop, een ander tijdelijk patroon voorafgaat, dat het bovenomschrevene meer oorspronkelijk karakter bezit, evenals mij dit voor vlinders is gelukt. Maar in afwachting van dat ontogenetisch bewijs, kan door vergelijking van verwante volwassen vormen gestreefd worden naar het bijeenbrengen van waarschijnlijkheidsgronden voor deze opvatting, en tevens een beeld ontworpen worden van de vermoedelijke gesteldheid van dat primitieve patroon. Hierbij moet aangevangen worden met de onderlinge vergelijking van soorten uit eenzelfde geslacht of uit naverwante geslachten, om vervolgens de daaruit afgeleide grondvormen te vergelijken met dien van een of meer geslachten eener andere familie. Men zou daarbij allicht geneigd zijn te denken, dat bij vormen met een oorspronkelijker aderstelsel (wat bij Diptera 't zelfde is als een meer volledig systeem van aderen) grooter kans op 't aantreffen van een primitiever systeem van teekening bestond, maar ik hoop beneden enkele argumenten aan te voeren voor de meening dat, en de reden waarom, dit niet het geval behoeft te zijn. Toch lijkt het mij verkieselijk om van vormen met minder gewijzigd aderstelsel uit te gaan. Daartoe behoort o.a. het geslacht Haematopota, waarvan een aantal soorten onderscheiden worden, wier vleugels een tamelijk rijke, maar tegelijk regelmatige kleurenteekening vertoonen.

Vergelijkt men nu b.v. met elkaar vier soorten: italica, tuberculata, pluvialis en maculata, dan ziet men zonder moeite en ook zonder twijfel, dat bij alle die teekening berust op hetzelfde grond-

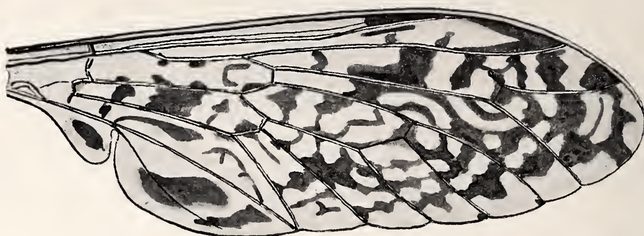


Fig. 1. Haematopota pluvialis.

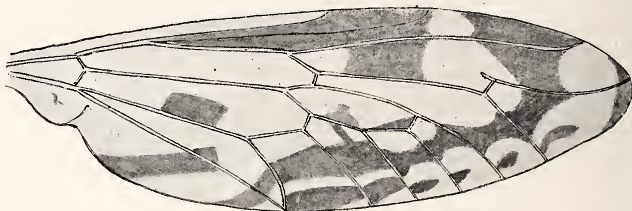


Fig. 2. Haematopota maculata (De Meijere).

plan, en dat dit plan bij italica, pluvialis en tuberculata vollediger en regelmatiger aanwezig is dan bij maculata, waar in het proximale gedeelte van den vleugel het patroon, op enkele oogenschijnlijk onregelmatige donkere plekken na, ontbreekt, terwijl in het distale gedeelte de buitenste dwarsrij der donkergetinte vleugelplekken uit kleinere, daarentegen de tweede (submarginale) rij uit grootere en tot een donkere strook aaneengesloten gekleurde vakjes bestaat.

In beide gedeelten echter zijn de grenzen dezer kleurplekken naar twee zijden bepaald door de overlangsche aderen, en waar zij deze schijnbaar overschrijden, is in bijna alle gevallen duidelijk te zien dat twee zelfstandige vlekken die elkaar langs een ader ontmoeten, zich ter weerszijde daarvan over een zelfden afstand uitstrekken.

In den grond der zaak doen zich dus op de Haematopota-vleugels dezelfde verschijnselen voor, welke bij 't onderzoek der Hepialiden onder de Lepidoptera de aandacht trokken, n.l. bijna zuiver regelmatige herhaling van afwisselend donkere en lichte plekken, die de velden (cellen) tusschen de aderen vullen, maar deze aderen zelf niet overschrijden, en in opeenvolgende tusschenadercellen in nagenoeg gelijk aantal voorkomen, tengevolge waarvan zij ook in voor-

en achterwaartsche richting (d. w. z. dwars ten opzichte van de lengteas der vleugels), in regelmatige rijen parallel met den buitenrand der vleugels gerangschikt staan. Ook op die plaatsen, waar de regelmaat der teekening verbroken is, kan men duidelijk waarnemen, dat dit op vervorming van den oorspronkelijken toestand berust, b.v. daar waar twee opvolgende dwarse vlekken door een overlangschen band aaneengekoppeld zijn, of boogsgewijs in elkaar overgaan.

Ofschoon het mij gewaagd voorkomt beteekenis toe te kennen aan de gedaante der vlekken, wil ik toch niet nalaten te wijzen op de opmerkelijke overeenkomst in vorm tusschen, eenerzijds, de haltervormige lichte dwarsvlekken bij Haematopota italica zoowel als de in twee driehoekige helften gescheiden vlekken bij H. tuberculata, anderzijds de zandloopers der Hepialiden.

Uit de vergelijking der genoemde vier soorten van het geslacht Haematopota meen ik dus het besluit te mogen trekken, dat niet kleurloosheid, maar integendeel een over de geheele vleugeloppervlakte zich uitbreidende, gekleurde toestand van den vleugel de oorspronkelijke is, en dat dit volledige kleurenpatroon bestaat uit lichte en donkere plekken in regelmatige afwisseling met elkaar, zich uitbreidende tusschen de aderen, en overeenkomend in grootte en onderlingen afstand, waardoor eene rangschikking in dwarsloopende traplijnen, ongeveer evenwijdig met den buitenrand, tot stand komt. In al deze eigenschappen stemt dat patroon dus overeen met dat van Hepialiden, Zeuzeriden, Trichoptera en Panorpata.

In nog hoogere mate dan de Haematopota's vertoont (te oordeelen naar de afbeelding bij VAN DER WULP, Tijdschr. voor Entomologie. Vol. 17. Pl. 8) de vleugel van Poecilostola angustipennis overeenstemming met de bovenomschreven criteria van een oorspronkelijk kleurenpatroon, n.l. strenge afhankelijkheid van het aderbeloop en regelmatige herhaling van eenzelfde motief van teekening. Hier toch



Fig. 3. Poecilostola angustipennis, VAN DER WULP).

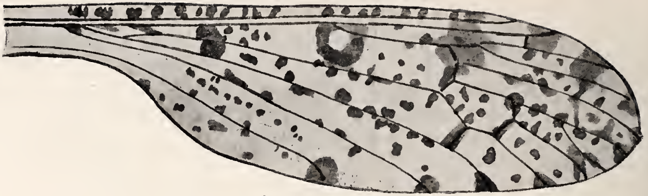


Fig. 4. Poecilostola punctata, (MEIG).

vertoonen zich in alle tusschenadercellen overlangsche rijen van talrijke kleine vlekjes, die ter weerszij dicht langs de aderen loopen. Alleen in de derde cel van achteren, dus degene, die tusschen de eerste cubitalis en de eerste analis-ader gelegen is, vertoont zich ook een rij vlekjes over de middellijn der cel, d. w. z. op de plaats, waar de tweede cubitaalader zich bevinden zou, als hij niet geoblitereerd was.

Bij Poecilostola punctata (afb. bij Grünberg: Diptera, in Brauer's Süsswasserfauna Deutschlands, p. 57) vind ik een diergelijke mediane rij stippels tusschen de eerste en tweede anaalader, wat dus misschien een aanduiding zou kunnen zijn voor het ontbreken van An_2. Maar tevens zijn hier te midden der kleine, op rijen geplaatste vlekjes, grootere verspreid, die ten deele een onregelmatigen vorm hebben, als waren zij door versmelting van eenige kleinere ontstaan. Deze vlekken liggen ten eerste aan het uiteinde der overlangsche aderen, en ten tweede op gaffel- en vereenigingsplaatsen.

Zet men de vergelijking voort met de beschouwing van Acyphona maculata (GRÜNBERG, p. 39) dan ziet men dat bij deze laatste de bovenvermelde grootere vlekken alle in dezelfde rangschikking aanwezig zijn, de kleinere daarentegen op enkele na ontbreken, zoodat

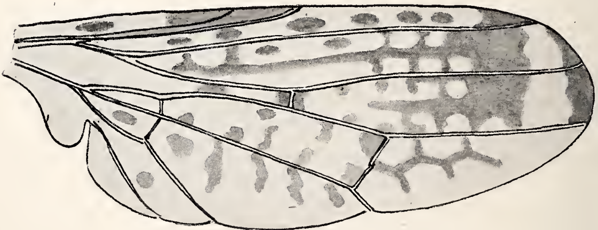


Fig. 5. Sciomyza javana (de Meyere).

men geneigd wordt dit laatste aan achteruitgang toe te schrijven.

Beschouwen we daarnaast enkele vormen uit geslachten met een gereduceerd aderstelsel, zooals Tephritis, Sciomyza en Traginops, dan

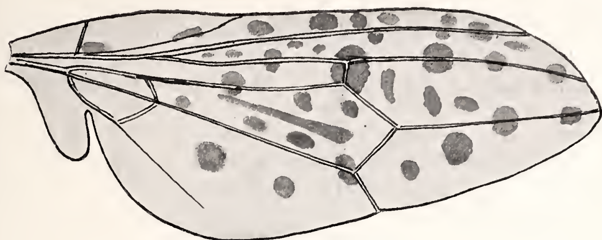


Fig 6. Traginops orientalis.

zien wij hetzelfde verschijnsel als bij Haematopota, n.l. regelmatige afwisseling van lichte en donkere vlekken, in rijen evenwijdig met de overlangsche aderen, maar in zooverre gewijzigd en meer samengesteld, als over het midden van onderscheidene tusschenadercellen, hetzij een donkere, hetzij een lichte baan zich uitstrekt, waarmede in het eerste geval de donkere, in het tweede de lichte vlekken kunnen samenhangen. Het resultaat van deze kleurverdeeling is, dat bij donkere middenbanen de lichte plekken zich voordoen als vlekken op een donkeren ondergrond, terwijl bij lichte mediaanvelden juist het omgekeerde effect ontstaat. Dat beide kleurpatronen niets meer zijn dan varieteiten van hetzelfde grondplan, blijkt ten eerste uit de vergelijking van soorten van 't zelfde geslacht, zooals Tetanocera vittigera, die donkere vlekken op een lichten grond, en Tet. umbrarum, die lichte op een donkeren vertoont. Maar ten tweede kan ook in een en denzelfden vleugel de eene tusschenadercel een donkeren middenband vertoonen, met rijen lichte vlekken ter weerszij, de andere het omgekeerde beeld, ja zelfs kan in één en dezelfde cel het proximale deel licht zijn met donkere, het distale daarentegen donker met lichte vlekken.

Ofschoon zoowel het aantal als de grootte der vlekken onstandvastig schijnt te zijn, neig ik tot de onderstelling, dat ook in deze opzichten een grondtal en een grondvorm bestaan, en de afwijkingen van den oorspronkelijken toestand in dezen verklaard moeten worden: eenerzijds door versmelting van donkere vlekken tot grootere schaduwpartijen, anderzijds door hun achteruitgang en verdwijnen, wat tengevolge heeft dat het licht de overhand verkrijgt. Ook hier

is weer het proximale vleugelgedeelte het lichtere, waar de vlekken kleiner en geringer in aantal zijn, terwijl zij langs den achterrand en in de streek van lobus en alula, geheel ontbreken.

Let men nu op de cellen, waarin hetzij een donkere hetzij een lichte middenbaan voorkomt, dan zijn dit juist diegene, waarvan men mag aannemen dat zij door de versmelting van twee opvolgende tusschenadervelden, tengevolge van 't wegvallen van de middelste ader, zijn ontstaan. Bij Sciomyza javana, waar de donkere mediaanstrepen het duidelijkst in 't oog vallen, loopen zij op de plaatsen waar bij vliegen met vollediger aderstelsel de vierde radialis en de eerste medianustak zich bevinden. Er is dus reden om aan te nemen, dat zich hier hetzelfde verschijnsel voordoet als in de discoidale en de cubito-anale vleugelcel van Lepidoptera (met name Papilioniden en Danaiden), n.l. dat daarin de baan van geobliteerde aderen aangeduid blijft door het kleurenpatroon, gewoonlijk als een zwarte, maar toch ook wel als een lichte streep.

Ook DE MEIJERE heeft zijn aandacht aan de pigmentatie van de middenbaan der tusschenadercellen geschonken, want hij zegt bl. 58: „Mediane Fleckenreihen treten bei den Dipteren in den Zellen nur relativ selten in typischer Ausbildung auf. Als Beispiele sind zu erwähnen Sciomyza Schönherri, Hydrophorus nebulosus (hier zwischen der 1en und 2en, bzw. 2en und 3ten Längsader; überdies findet sich hier Aderspitzenfärbung. Queradersäumung, sowie Spuren einer doppelten Fleckenreihe oben in der Mitte der 1en Hinterrandzelle), Hythea spilota, Scatella quadrata, ferner auch einige Pterocallinen. Bei manchen Verwandten ersterer Art, namentlich unter den Tetanocerinen, sind die Medianflecke in der Unterrandzelle deutlich, während in den übrigen Längszellen eine zweireihige Fleckung vorhanden ist. Weil bei Schönherri die Flecke öfters schon als Querstriche erscheinen, und in den anderen Fällen öfters 2 über einander in einer und derselben Zelle liegende Flecke deutlich zusammengehören, wie ihre Lage angibt, so bin ich der Ansicht, dass diese zweireihige Fleckung als durch Teilung der Medianreihe entstanden zu betrachten ist. Als typisches Beispiel möchte ich Tetanocera (Pherbina) punctata aufführen, wo gleichzeitig auch schon eine weitere Erscheinung auffällt, nämlich *ein medianer Längsstreifen in den Zellen*," en blz. 69: „Recht interessant sind die Verhältnisse bei den Sciomyziden. Viele Arten zeigen hier Queradersäumung, Längsaderstreifung findet man bei Tetanocera elata, Elgiva lineata; Vorderrandsäumung bei T. elata. Eine deutliche Punktierung findet sich bei zahlreichen Formen, so z. B. bei T. punctata; gewöhnlich ist diese in der Unterrandzelle einreihig, in den anderen findet sich je eine Reihe neben jeder die Zelle begren-

zenden Längsader, oder, wie man auch sagen könnte, jede Längsader liegt zwischen 2 Reihen; die Punkte zu beiden Seiten correspondieren öfters, jedoch nicht immer, öfters tun dies gerade die in einer und derselben Zelle über einander gelegenen Flecke. Dass ich diese zweireihigen Flecke als durch Teilung einer Reihe von Medianflecken entstanden betrachte, wurde von mir p. 58 erörtert. Bei punctata ist eine hinzukommende Medianstreifung der Zelle wenig entwickelt. Bei anderen Formen sind diese und die Punkte innig mit einander verbunden, bei coryleti und unguicornis ist es schon deutlicher als bei punctata, bei marginata, fumigata u. dgl. führt es dazu, dass die dunkle Farbe überwiegt und nur je 2 Reihen glasheller Flecke in den Zellen übrig bleiben. Das Schema hat sich bei punctulata und umbrarum dadurch weiter differenziert, dass in bestimmten Binden die Fleckung einen deutlicheren Charakter trägt.

Unter den Sciomyzinen zeigen Sc. albocostata, cinerella, fuscipennis deutliche Längsaderstreifung, bei letzterem fast bis zum Verschwinden der Grundfarbe führend. Queraderfleckung zeigt z. B. griseola; Querbinden sind bei bifasciella zur Entwicklung gelangt, während Schoenherri sich durch einreihige Medianflecke in den Hinterrandzellen unterscheidet. Aus diesem Verhalten möchte ich eben, durch Zweiteilung der Flecke, dasjenige von Tetanocera punctata u. a. mit zweireihigen Flecken herleiten. Auch Sciomyza javana hat dieselbe Differenzierung schon erreicht. Bei albocostata kommt noch das Weisswerden vom Vorderrande hinzu. Auch hier also allerhand Zeichnungsmotive bei nahe verwandten Formen."

Ofschoon dus DE MEIJERE de fundamenteele overeenkomst van donkere vlekken op lichten met lichte op donkeren grond erkent, trekt hij uit de aanwezigheid van een mediaanstreep niet dezelfde consequentie als boven door mij ontwikkeld, maar laat de twee paramediane vlekkenrijen door deeling van een mediane rij ontstaan. Een geval als dat van Poecilostola, waar in één enkele cel behalve de twee randrijen ook nog een middenrij van donkere vlekken voorkomt, en deze cel juist degene is, waarvan men mag onderstellen dat zij door versmelting van twee tusschenruimten tengevolge van 't obliteeren der scheidende ader is gevormd, blijft met DE MEIJERE's onderstelling onverklaard.

Echter moet worden toegegeven, dat, terwijl eenerzijds uit de vergelijking van Sciomyza met Traginops kan worden afgeleid, dat een zwarte middenbaan plaats kan maken voor een lichte, en zoodoende dit kenmerk van oorspronkelijke dupliciteit der cel tot verdwijnen kan gebracht worden, anderzijds geen reden bestaat om in alle gevallen waarin terweerszij der aderen op één rij donkere of lichte

vlakken gerangschikt staan, en dus in elke cel twee zulke rijen worden aangetroffen, aan 't ontstaan van die cel uit de versmelting van twee cellen te denken. Bij Poecilostola b.v. kan daarvan geen sprake zijn, behalve voor de cellen tusschen Cu_1—An_2 en An_2—An_1. Het is ermede als bij de Hepialiden onder de vlinders, waar ook de beide helften der zandloopers of dwarsstreepjes vaak gescheiden zijn, en zoodoende zelfstandige vlekjes vormen, gelegen tegen de aders aan.

Wanneer de bovenomschreven onderstelling, dat aan de kleurenpatronen der Diptera een gemeenschappelijke, regelmatige, eenvoudige maar volledige oerteekening ten grondslag ligt, juist is, dan moet het mogelijk blijken ook de samengesteldste en ingewikkeldste patronen op die oorspronkelijke teekening terug te brengen.

De eerste proef, die ik daaromtrent kon nemen, bracht al dadelijk het verrassende resultaat, dat dit zeer wel mogelijk bleek voor de grillige teekening van Cleitamia astrolabei Boisd., welke bij 't ♀ bestaat

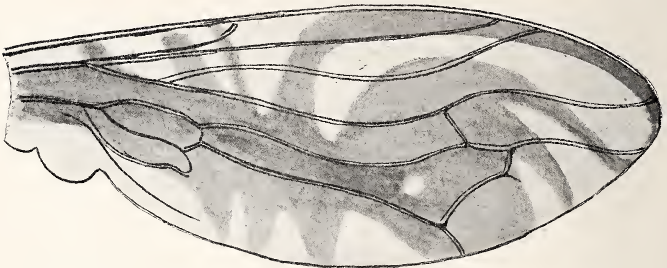


Fig. 7. Cleitamia astrolabei ♀ (Boisd).

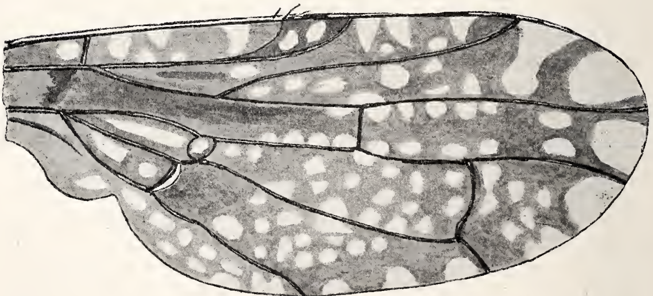


Fig. 8. Trypeta cribrata ♀ (v. d. Wulp).

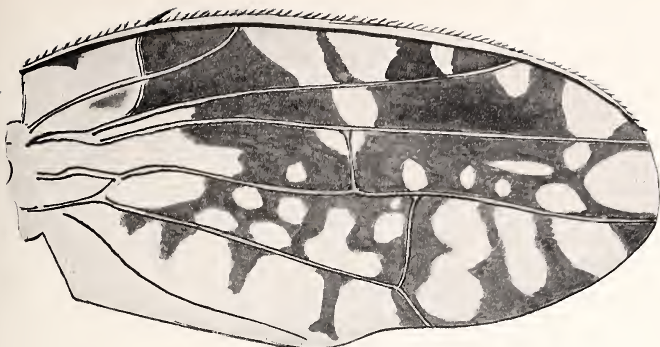


Fig. 9. Tephritis pantherina.

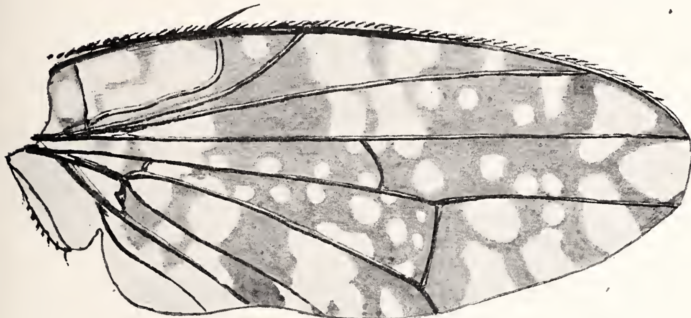


Fig. 10. Tetanocera (Dictya) umbrarum.

uit een onregelmatig centraal zwart veld, waarvan tien banen van verschillende breedte naar den omtrek uitstralen, die gedeeltelijk kort en recht, gedeeltelijk langer en gebogen zijn, en die zich niet schijnen te storen aan 't beloop der aderen. Vergelijkt men n.l. dit spinnekopachtige kleurenpatroon met dat van Tephritis pantherina, ['t geen weer tot in alle bijzonderheden overeenkomt met dat van Tetanocera (Dictya) umbrarum, en bij beide bestaat uit een groot aantal lichte vlekken op donkeren grond, die zich streng houden aan de grenzen der aderen, maar in aangrenzende tusschenadercellen dikwijls aaneensluiten] dan ziet men dat de lichte partijen van Cleitamia in plaats en uitgestrektheid nauwkeurig overeenstemmen met de randvlekken van Tephritis, wanneer men slechts aanneemt, dat langs het buitenste gedeelte van den voorrand tot aan de vleugelspits een

zestal dezer vlekken zijn ineengevloeid en tegelijkertijd door een smallen zwarten randzoom van den buitenkant zijn afgesneden, terwijl meerdere vlekken, o. a. die aan 't proximale deel van den voorrand, zich met meer binnenwaarts gelegen vlekken hebben vereenigd tot dwarsbanen, die de grens van het nervus-radialis-gebied zelfs eenigszins overschrijden. Het aantal dezer vlekken is tamelijk, maar niet volkomen standvastig, 't geen blijkt uit de vergelijking met den vleugel van Trypeta cribrata, waar vlekken, die bij Tetanocera umbrarum zijn ineengesmolten, zich nog zelfstandig vertoonen, en die dus waarschijnlijk een nog oorspronkelijker toestand vertegenwoordigt.

Evenals in het geval der soorten van 't geslacht Haematopota, kan men ook hier eenige naverwante vormen opstellen in een reeks, die een geleidelijken overgang vertoont van den primitieven toestand: vele gelijkvormige lichte vlekjes op rijen ter weerszij van de aderen, en in sommige cellen ook in de middellijn, terwijl langs den vleugelrand grootere lichte plekken voorkomen [Trypeta cribrata], — langs Tetanocera umbrarum en Tephritis pantherina, waar het aantal der vlekjes afneemt, zoowel tengevolge van versmelting als van verduistering, — om te culmineeren in Cleitamia astrolabei met zijn groote maar minder talrijke en onderling zeer verschillende lichte partijen, welke de grenzen der aderen niet meer schijnen te ontzien.

Naar de andere zijde kan men Tetanocera (Dictya) umbrarum meer tot in bijzonderheden (zooals het aantal der vlekken) vergelijken met Tetanocera vittigera, als men maar aanneemt, dat de lichte stippen van eerstgenoemde zich dusdanig hebben vergroot, dat zij in 't midden der cellen met elkaar zijn saamgesmolten, en zoodoende den donkeren ondergrond in stukjes hebben verdeeld, die zich thans voordoen als zelfstandige donkere vlekken. Sporen der oorspronkelijke uitgebreidheid van dien donkeren grond zijn nog te zien in cel R_5—M_1 en M_1—Cu_1 als een flauwe donkere middenbaan,

Maar naast Cleitamia astrolabei komen een aantal andere soorten van ditzelfde geslacht voor, wier vleugelteekening schijnbaar minder grillig en samengesteld is, en die dus allicht voor eenvoudiger en oorspronkelijker konden aangezien worden. Bij nauwkeurige vergelijking, zoowel onderling als met de toestanden bij andere verwante geslachten [1]), komt men echter tot de overtuiging, dat de reeks juist omgekeerd moet gelezen worden, en van astrolabei (of nog beter van C. ostensackeni, waar het aantal lichte vlekken langs den

---

1) Zie de figuren op Taf. I. van HENDEL in Genera Insectorum. Platystominae (fam. Muscaridae).

voorrand nog één grooter is dan bij astrolabei, en dus vijf bedraagt) uit moet gaan, om langs C. biarcuata (Fig 136), similis (Fig. 134), amabilis (Fig. 128), liturata (Fig. 129), te voeren tot kertészi (Fig, 135), waar de distale vleugelhelft bijna geheel wordt ingenomen door één enkelen breeden donkeren band, die van vóór- tot achterrand reikt, en aan de vleugelspits slechts een smalle halfcirkelvormige witte plek overlaat, terwijl ook het proximale vleugelgedeelte niet veel meer teekening vertoont dan een donkere overlangsche vlek in 't midden, vóór en achter geflankeerd door een lichte streek, en van het distale kleurveld gescheiden door een lichten dwarsband. De eenvoudigste teekening is hier dus, evenals in zoovele andere gevallen, de meest veranderde: zij staat het dichtst bij algeheele eenkleurigheid. Van Cleitamia ostensackeni uitgaande, kan men ook langs rivelloïdes (Fig. 131), en over similis (Fig. 132) [waarbij men de gelijkenis met het kleurenpatroon in 't geslacht Bothrometopsa [1]) uit de familie der Pterocallinae kan opmerken] tot gestroi (Fig. 130) komen, die, schoon zeer verschillend van kertészi in vorm der teekening, deze in uitgebreidheid en samenhang der donkere massa nog overtreft.

Naast de waarneming, dat men patronen van zeer verschillend uiterlijk met elkaar in verband kan brengen en uit elkaar kan afleiden, laat zich nu de andere stellen, dat men in verschillende geslachten, ja onderfamilies en families, telkens weer dezelfde reeks van patronen ziet terugkeeren, en hetzelfde onderlinge verband tusschen hen kan opmerken. Om voor dit verschijnsel een sprekende voorstellingswijze te vinden, verdient het aanbeveling, de onderscheidene patroon-typen met namen aan te geven. Men zou hiervoor de hoofdmotieven der verschillende teekeningen kunnen gebruiken, b.v. dat der paranervurale vlekkenrijen (zooals bij Sciomyza's), der mediane vlekkenrijen (Scatella's), der rechte dwarsbanden (Pterocerinen), der gekromde banden (Cleitamia astrolabei), der talrijke vlekjes (Coremacera) enz.

Maar ten slotte schijnt mij deze methode toch weinig aanbevelenswaardig, omdat de meeste patronen niet enkel een hoofdmotief, maar tevens een of meer andere motieven vertoonen, welke laatste dikwijls juist de overblijfselen der oorspronkelijke teekening vertoonen. Zoo treft men in de teekening van Cleitamia astrolabeï tusschen de gekromde banden lichte velden aan, die, zooals boven betoogd werd, mogen opgevat worden als saamgesmolten tusschenadervlekken. Beter schijnt het mij dus, aan de verschillende typen

---

[1]) Genera Insectorum, HENDEL Pterocallinae, Taf. IV., fig. 73 en 74.

van vleugelteekening eenvoudig de namen te geven van soorten, geslachten of families, bij welke zij in bijzondere duidelijkheid en volledigheid voorkomen, b.v. het astrolabei-patroon, de scatella-teekening, het Pterocerine-bandenstelsel. Echter moet men daarbij nimmer uit het oog verliezen, dat diezelfde patronen (met wijzigingen in allerlei onderdeelen) ook bij andere geslachten en zelfs families van Diptera worden aangetroffen, ja zelfs in andere orden van Insecten, zoodat dus de keuze van den naam voor 't een of andere type van teekening in hoofdzaak afhankelijk is van de toevallige omstandigheid, of men het bij de een of andere soort of geslacht van Insecten 't eerst opmerkt.

Waar nu tusschen die verschillende typen van teekening een genetisch verband blijkt te bestaan, zoodat zij in een reeks gerangschikt kunnen worden, die van den oorspronkelijksten en regelmatigsten tot den meest gewijzigden en grilligsten vorm leidt, en deze vormenreeks bij verschillende, met elkaar verwante geslachten en families steeds dezelfde blijkt te zijn, ligt de gevolgtrekking voor de hand, dat die overeenkomst berust op verwantschap, en wel in dien zin, dat de gemeenschappelijke voorouders der met elkaar verwante genera en hoogere groepen reeds in 't bezit waren van al die verschillende patronen, en dat hunne nakomelingen den aanleg tot de geheele serie der kleurenteekeningen van hen geerfd hebben.

De beschouwing der Diptera heeft mij dus geleid tot dezelfde algemeene gevolgtrekking als de onderlinge vergelijking der Hepialiden: „de motieven en patronen der kleurenteekening zijn ouder dan de geslachten en families waarin ze optreden". Ook de Meijere heeft het verschijnsel der overeenkomstige patroonreeksen opgemerkt, want reeds in den aanvang zijner verhandeling zegt hij: „Man braucht nur eine einigermaassen grosse Dipterensammlung durchzusehen, um zu der Ueberzeugung zu gelangen, dass auch in den Familien, wo eine Färbung vorkommt, diese bei den einzelnen Formen sehr verschiedenartig sein kann, sodass ein Familiencharakter hierin nicht zu erkennen ist, *man dagegen öfters bei den verschiedenen Familien die gleichen verschiedenartigen Patronen repräsentiert findet*" (ik cursiveer). En op bl. 75: „dass demnach die einzelnen Motive in den verschiedenen Familien wiederkehren".

De Meijere ziet in dit verschijnsel slechts een bewijs, dat de vleugelteekening zich bij de verschillende families op gelijksoortige wijze heeft gevormd, ontwikkeld en gewijzigd, dat wij hier dus te doen hebben met verschijnselen van parallelisme. Zelfs binnen de grenzen van een en dezelfde familie kan volgens hem van een onderling verband tusschen de patronen van vleugelteekening geen

sprake zijn: „Bei fast gleichem Geäder finden wir bald eine Querader-, bald eine Längsaderstreifung, bald eine Spitzen- oder Wurzelfärbung. Es wäre deshalb verfehlt, selbst die Patrone innerhalb einer und derselben Familie in eine einzige Evolutionsreihe zusammenfassen zu wollen".

Op pag. 70 zegt DE MEIJERE: „Bei den Trypetiden finden wir allerhand Zeichnungsmuster, welche nicht auf einander zurückführbar sind".

Uit het bovenstaande volgt, dat ik tot de tegenovergestelde opvatting gekomen ben.

Op bl. 63 vestigt DE MEIJERE er de aandacht op, dat „bij de breedvleugelige Trypetine Platensina ampla eenige vlekken zich onderscheiden van de geheel glasheldere door een kleur, die in een bepaalde richting gezien mat bruinachtig is." Dit onderscheid berust volgens hem slechts op een iets lichtere kleuring der chitinelaag en der daarop staande haren.

Bij het onderzoek van een exemplaar dezer soort trof het mij in de eerste plaats, dat de bedoelde afwijkende vlekken niet over de geheele vleugeloppervlakte verspreid waren, maar de randen vrijlieten, waarlangs, op de gebruikelijke plaatsen, evenals bij andere vliegensoorten, glasheldere vlekken op regelmatige afstanden van elkaar voorkwamen. Verder merkte ik op dat de centrale vlekken ongetwijfeld mat, d.w.z. ondoorzichtig waren, maar hun kleur niet lichtbruin, maar integendeel wazig blauwwit was. En lettende op de plaatsing dezer gekleurde vlekken ten opzichte der glasheldere, trof het mij, dat juist in 't verlengde van elk der van den voorrand uitgaande langwerpige glasvlekken zulk een blauwwazige vlek lag, behalve bij de 5de voorrandvlek (zich aansluitend aan 't uiteinde der subcostaalader), die zich van de meer distale onderscheidde door grootere lengte en door een insnoering in 't midden. Men zou dit ook zóó kunnen uitdrukken, dat zij zich met een druppelvormig verlengsel verder naar 't midden van den vleugel uitstrekte dan de overige vlekken. Dit verlengsel nu nam dezelfde positie in ten opzichte van het randgedeelte der vlek, als de blauwige vlekken ten opzichte der overige randvlekken. Evenzoo lagen ook de verdere matte vlekken op den vleugel zoodanig verspreid, dat hun plaatsing juist overeenstemde met doorzichtig-kleurlooze bij verwante Trypetinen.

Uit deze waarnemingen meen ik te mogen besluiten, dat de matte vlekken niet anders zijn dan verdwijnende glasvlekken, die door de grondkleur worden verduisterd. Hun voorkomen levert m.i. een bewijs voor de opvatting, dat eenkleurigheid een secundair verschijnsel is, en zijn ontstaan dankt aan de uitwissching eener vlek-

kenteekening. Hoe die uitwissching geschiedt, meen ik ook juist bij Platensina ampla te kunnen waarnemen. Zooals gezegd, noemt DE MEIJERE de kleur der matte vlekken, in een bepaalde richting gezien, bruin. Hij laat echter in 't midden, welke die richting is. Het bleek mij nu, dat er een sterk verschil bestaat tusschen kleur en duidelijkheid der vlekken, al naarmate men ze beschouwt bij opvallend of bij doorvallend licht. Bij 't laatste zijn zij inderdaad lichtbruin, bij 't eerste daarentegen licht blauwachtig en daarbij glanzig. Ook maakt het nog onderscheid, of men het licht rechtdoor laat vallen op volle sterkte, dan wel schuin en getemperd. In 't laatste geval ziet men de vlekken in een lichter bruine tint dan de omgeving, en neemt duidelijk waar, dat ze meer licht doorlaten dan deze. Bij sterk en onmiddellijk doorvallend licht daarentegen teekenen de vlekken zich veel minder tegen de omgeving af, en onderscheiden zich van deze slechts door een lichteren hof rondom een donkerbruine kern. Met behulp van alle drie de waarnemingswijzen echter kan men zich overtuigen, dat de haren boven de matte vlekken kleurloos zijn, evengoed als die boven de glasheldere.

Ik ben het dus met DE MEIJERE eens, dat de kleurloosheid der haren binnen den omtrek der matte vlekken meewerkt tot hun lichteren tint, en dat deze verder veroorzaakt wordt door geringere hoeveelheid der bruine kleurstof in de vleugelmembraan. Maar ik meen in zooverre onderscheid te mogen maken tusschen deze twee oorzaken, als ik aan de eerste meer bepaald den blauwwitten glans der vlekken bij opvallend licht toeschrijf, aan de tweede daarentegen hun lichtbruine tint bij zwak, schuin doorvallend licht.

Het voorkomen dezer matte vlekken is dus m.i. een nieuwe bewijsgrond voor de meening, dat de verschillende kleurenpatronen in de orde der Diptera met elkaar in genetisch verband staan, in tegenstelling met DE MEIJERE's opvatting, dat zij onafhankelijk van elkaar zouden zijn.

Op blz. 70 (o. a.) vermeldt DE MEIJERE nogmaals een geval van tweeërlei soort vlekken bij Trypetinen, n.l. „Tüpfelflecke" in de donkere dwarsbanden, welke vlekken zich bij sommige soorten (bep. verwanten van 't geslacht Tephritis), niet slechts door hun plaats maar ook door hun kleur, zouden onderscheiden van de tusschen deze banden gelegen gewone glasvlekken, welke DE MEIJERE als overblijfsels der oorspronkelijke kleurlooze vleugeloppervlakte beschouwt. DE MEIJERE noemt geen bepaalde voorbeelden, zoodat ik niet met zekerheid kan zeggen welke gevallen hij bedoelt. Mocht het zijn, dat hij het oog heeft op bruinkleuring van een deel der vlekjes, zooals b.v. bij Oxyna parietina, waar in de breede banen

der donkere dwarsbanden een aantal vlekjes voorkomt, die niet slechts kleiner zijn dan die in de lichtere ruimten tusschen de banden, maar bovendien lichtbruin in plaats van kleurloos, dan kan ik mij met zijn onderscheiding van tweeërlei *soort* vlekken niet vereenigen. Immers andere species van 't genus Oxyna bezitten op diezelfde plaatsen overeenkomstige vlekken, die echter noch door kleur noch door afmeting zich bijzonder van de tusschenliggende onderscheiden. Niet de „Tupfelflecke" zelf zijn dus iets nieuws, slechts hun kleur en kleinheid zijn het, en deze worden teweeggebracht door oorzaken, welke, wel verre van tot het ontstaan van nieuwe vlekken te leiden, integendeel het verdwijnen der bestaande in de hand werken.

Groningen, 30 Maart 1917.

Scheikunde. — De Heer van Romburgh biedt, mede namens den Heer J. M. van der Zanden chem. docts., eene (voorloopige) mededeeling aan: „*Over polymeren van methylchavicol.*"

Eenige jaren geleden deelde een van ons (v. R.) mede, dat door verhitting van methylchavicol eenige polymerisatieproducten werden verkregen, nl. een bij 98° en een bij 166° smeltend, terwijl bovendien nog een zeer geringe hoeveelheid van een boven 200° smeltende verbinding kon worden afgescheiden. Elementair analyses en moleculairgewichtsbepalingen der beide eerstgenoemde producten maakten het waarschijnlijk dat dit dimeren van methylchavicol zijn.

De bij 98° smeltende verbinding gaf met broom een bij 87° smeltend dibromide.

Sinds is een grootere hoeveelheid dezer polymeren bereid geworden, zoodat een meer uitvoerig onderzoek mogelijk was, waarvan enkele resultaten thans door ons hier in 't kort worden vermeld.

In de eerste plaats is getracht de niet groote opbrengst aan polymeren te verbeteren. Bij verandering van den duur der verhitting en van de temperatuur bleek, dat eene geringe verbetering in de opbrengst slechts verkregen kan worden door den eersten te verlengen.

Behalve de gekristalliseerde verbindingen, wordt een dikke stroop, welke nog groote hoeveelheden ervan bevat, gevormd. Nu trachtten wij door distillatie in vacuo (15 mM.) een deel daarvan af te scheiden en inderdaad gelukte het uit de fractie 283°—313°, in betrekkelijk goede opbrengst, kristallen te verkrijgen. Verhit men het residu in de kolf sterker (op 350°) dan treedt er blijkbaar een reactie in, althans het distillaat wordt dun vloeibaar en de over-

gedistilleerde vloeistof gaat bij gewone drukking tusschen 150° en 350° over.

Door eene voortgezette gefractioneerde distillatie werd een tusschen 175° en 178° kokend product verkregen, welks reuk overeenkomt met dien van den methylaether van parakresol, die bij 175°.5 kookt. Oxydatie van de gevormde verbinding met het mengsel volgens Kiliani geeft een zuur, dat na omkristallisatie tusschen 178° en 181° smelt en met anijszuur gemengd geen verlaging van smeltpunt geeft.

Behandelt men de stof met gec. salpeterzuur (SG 1.5) dan ontstaan er lichtgele kristallen, welke bij 122° smelten en welke gemengd met de door gelijke behandeling uit p. kresylmethylaether verkregen dinitroverbinding geen smeltpuntsverlaging vertoonen. De verkregen vloeistof is dus zonder twijfel p. kresylmethylaether. Hoe deze stof ontstaat is vooralsnog niet opgehelderd.

Het bij 166° smeltend polymeer, in chloroform opgelost, geeft met broom een uit petroleumaether in fijne naaldjes kristalliseerend bromide, dat bij 139° onder zwartkleuring smelt. Van de proeven, welke zijn genomen om de structuur van de polymeren te bepalen, zij het volgende vermeld.

Het bij 98° smeltend product werd geoxydeerd met een oplossing van kaliumpermanganaat in aceton. Er ontstaat bij deze oxydatie, behalve anijszuur, een zuur, dat bij omkristallisatie uit toluol zich in harde, massieve kristallen afzet. Smpt. 113°. Eene micro-elementair analyse gaf C 69.42 en 69.34 %, H 8.06 en 7.68 %. Deze uitkomsten wijzen op een stof van de samenstelling $C_{12} H_{16} O_3$ (Theorie C 69.22 %, H 7.74 %).

Voor het moleculairgewicht werd gevonden, door titratie, aangenomen dat 't zuur éénbasisch is, 207. Berekend voor $C_{12} H_{16} O_3$: 208.

Voortgezette oxydatie, nu met het mengsel volgens Kiliani, deed uit dit bij 113° smeltend zuur een nieuw zuur ontstaan dat bij 138° smelt. Het onderzoek daarvan houdt ons nog bezig.

Oxydatie van het bij 166° smeltend product gaf alleen anijszuur.

Utrecht. *Org. Chem. Labor. d. Univ.*

Dierkunde. — De Heer VAN BEMMELEN biedt eene mededeeling aan van den Heer A. SCHIERBEEK: *„Over het Setale Patroon der Rupsen.”* II.

(Mede aangeboden door den Heer VAN WIJHE).

In een vorige mededeeling[1]) heb ik de aandacht gevestigd op de constante rangschikking der setae bij de rupsen, en daarbij de redenen aangegeven, welke mij genoopt hebben voor deze setae een nieuwe nomenclatuur in te voeren, welke ik door enkele schematische figuren heb toegelicht.

Uit mijn onderzoek meende ik onderstaande gevolgtrekkingen te kunnen maken;

1°. dat setae (borstels), tubercula (verhoogingen, welke setae dragen), verrucae (wratten), scoli (dorens) en maculae (pigmentvlekken) aan elkaar homoloog zijn.

2°. dat de abdominale segmenten een primitiever setaal patroon bezitten dan de thoracale.

3°. dat het door mij genoemde type I het oorspronkelijkste is en dat de andere typen (I*a*, I*b* en II) ervan afgeleid kunnen worden.

4°. dat aan de veranderingen, optredende in dit type I een bepaalde systematische waarde toekomt.

5°. dat strepen later ontstaan dan pigmentvlekken.

6°. dat de popteekening de meeste overeenkomst vertoont met die van rupseninstar I, en soms belangrijk afwijkt van den laatsten larvalen instar.

Ik heb mijn onderzoekingen verder voortgezet en de in de vorige mededeeling aangekondigde verhandeling, met de volledige beschrijvingen, de figuren en de literatuurlijst, is inmiddels verschenen.[2])

Hieronder zijn de verdere conclusies, waartoe ik gekomen ben, kort weergegeven.

In de eerste plaats heb ik nader onderzocht, waar het rudimentaire stigma op de thoracaalsegmenten is gelegen. Ik meen, dat BOAS (1899) gelijk heeft met zijn bewering, dat het metathoracale

---

[1]) A. SCHIERBEEK, *Over het setale Patroon der Rupsen*, Verslag v. d. Gew. Verg. d. Wis. en Nat. Afd. van de Kon. Akad. v. Wet. 25 Maart 1916, Dl. XXIV p. 1710—1723. Met één plaat.

[2]) A. SCHIERBEEK, *On the Setal Pattern of Caterpillars and Pupae*, Akad. Proefschrift. Groningen. 20 Jan. 1917. Deze studie is ook verschenen in: Onderzoekingen, verricht in het Zoölogisch Laboratorium der Rijks Universiteit te Groningen, N⁰. VI, en in: Tijdschrift der Nederl. Dierk. Ver. 2e Serie. Dl. XV, 1917, p. 261—418, Pl. X—XIV.

stigma is verschoven naar de intersegmentale membraan tusschen de meta- en mesothorax en dat het z.g.n. prothoracale stigma in werkelijkheid een mesothoracaal is.

De vlek of een daarmee homologe vorming, die men aantreft op de plaats, waar men het stigma zou verwachten, vertegenwoordigt niet een overblijfsel van dat stigma, maar komt overeen met den vleugelaanleg. [1])

Ten tweede heb ik mijn aandacht gewijd aan het aantal abdominale segmenten.

Ik meen, in overeenstemming met POULTON (1890) en SPULER (1910), bij sommige rupsen, tijdens den eersten instar, een elfde abdominaalsegment te kunnen aantoonen, n.l. bij *Hepialus hecta* L., *H. cf. lupulinus* L., *Phalera bucephala* L., *Sphinx ligustri* L., *Pieris brassicae* L. en *P. napi* L.

De reden, waarom dit elfde segment niet bij alle rupsen is aan te toonen, moet m.i. gezocht worden in het feit, dat „het verlaten der eischaal voor de insecten geen nauwkeurig bepaald punt is in de ontwikkeling, doch afhangt van de hoeveelheid dooiermassa, enz." (HENNEGUY, 1904). Deze reden verdient des te meer onze aandacht, waar CHAPMAN (1896) kon aantoonen, dat de eieren der *Lepidoptera* zeer verschillend zijn.

Vervolgens onderzocht ik nader de overeenkomst van de rupsenteekening met die van de andere insectenlarven.

In mijn vorige mededeeling wees ik er op, dat binnen één familie verschillende wijzigingen van het setale patroon hebben plaats gevonden, zoodat het den indruk maakt, dat de families zich onafhankelijk van en parallel met elkaar hebben ontwikkeld.

Volgens HANDLIRSCH (1903, 1906, 1910) hebben zich de families der *Lepidoptera* in en na den Krijttijd van elkaar afgesplitst, terwijl de orden reeds te onderscheiden zijn in het Onder-carboon.

A priori is dus geen groote overeenstemming te verwachten Bovendien is de monophyletische oorsprong der Holometabolen zeker geen vaststaand feit. Als er een gelijkheid in patroon gevonden wordt, kan deze een overblijfsel zijn van de teekening der oerinsecten, of der eerste Holometabolen, doch men kan zich ook denken, dat het patroon een zóó groote biologische waarde bezit, dat het zich in vele orden onafhankelijk van elkaar ontwikkeld heeft. Ik meen echter, dat wel aan het bezit der setae, doch niet aan de rangschikking daarvan een belangrijke biologische beteekenis is te hechten, zoodat het mij waarschijnlijk voorkomt, dat gelijkheid in patroon een gevolg is van gelijkheid in afstamming.

[1]) Zie ook P. MAYER, Jenaische Zeitschr. Naturw. 1876.

Bij het onderzoek van andere insectenlarven dan rupsen moest ik bij gebrek aan materiaal alleen afgaan op de in de literatuur voorkomende figuren, die in 't algemeen niet uitmunten door duidelijkheid. Van de eerste instars, die juist het belangrijkst zijn voor deze onderzoekingen, ontbreken zij meestal.

De *Panorpiden* komen volgens HANDLIRSCH den voorouders der *Lepidoptera* zeer nabij. De larven er van zijn door BRAUER (1851—'63) nauwkeurig onderzocht. Zij dragen in 't begin setae, later hoogst interessante verrucae. Te oordeelen naar BRAUER's figuren staan op ieder segment aan weerszijden drie setae boven het stigma.

De *Tenthredinidae* worden meest beschouwd als zeer oorspronkelijke *Hymenoptera*. DYAR (1894) meende de rupsenteekening van die, welke voorkomt bij deze larven te kunnen afleiden. Men vindt op ieder segment aan weerszijden drie verticale rijen, ieder van drie setae.

De *Coleoptera* zullen, zelfs bij aanname van een monophyletischen oorsprong der *Holometabolen*, niet als na met de *Lepidoptera* verwante insecten worden beschouwd. Des te meer moet men zich verwonderen, dat TOWER (1906) op de abdominaalsegmenten van *Leptinotarsa*-larven twee verticale rijen van vlekken aantrof, ieder bestaande uit drie vlekken. Vergelijkt men hiermee nu het setale patroon, Type I, waarvan ik in mijn vorige mededeeling betoogd heb, dat het o.a. bestaat uit een rij setae boven het stigma, samengesteld uit seta dorsalis, s. dorso-lateralis en s. supra-stigmalis, dan ziet men een groote overeenstemming in de teekening dezer zoo verschillende larven.

Eerst een zeer uitgebreid onderzoek van zooveel mogelijk larven, vooral in den eersten instar, uit allerlei verschillende orden, zal kunnen beslissen, of het door mij opgestelde patroon inderdaad een algemeene beteekenis bezit voor alle holometabole insecten. Het zal van belang zijn om, indien mogelijk, de fossiele resten van insectenlarven te onderzoeken. De bedenkingen door HANDLIRSCH ingebracht tegen het monophyletisch ontstaan der *Holometabolen* schijnen mij zeer gewichtig toe.

Ten slotte wil ik één punt nader uitwerken, dat ik in mijn vorig artikel slechts aanroerde.

J. F. VAN BEMMELEN vestigde (1912) de aandacht op de overeenkomst in teekening bij poppen van verschillende *Rhopalocera*, met die van een volwassen rups van *Pieris brassicae*. POULTON (1890), wien de gelijkenis van de pop- en rupsenteekening ook was opgevallen, verklaarde haar door aan te nemen, dat het larvale pigment in de pop nog eenigen tijd blijft bestaan en daar de voorbijgaande

of blijvende teekening te voorschijn roept. Hiertegenover merkte J. F. VAN BEMMELEN op, dat dit niet kan opgaan in het geval van rupsen, die onder elkaar zoozeer verschillen als bijv. *Pieris brassicae* en *P. napi*, terwijl de poppen een bijna volkomen gelijke teekening vertoonen. Bovendien slaagde VAN BEMMELEN er in deze zelfde teekening aan te toonen bij andere *Rhopalocera*poppen. Hij meende hierin een bewijs te mogen zien voor de opvatting der pop als onbeweeglijk geworden subimaginaalstadium.

Bovendien zou ik willen wijzen op de bewering van LAMEERE (1900), dat de hypodermis tijdens het popstadium geheel vernieuwd wordt.

Ik geloof ook, dat VAN BEMMELEN's meening de voorkeur verdient boven die van POULTON, en dat de popteekening wel een morphologische beteekenis heeft.

Reeds in mijn vorige mededeeling wees ik er op, dat de popteekening bijna volkomen gelijk is aan die van rupseninstar *I*.

Uitgaande van de overweging, dat bij bijkans alle gekleurde *Rhopalocera*poppen het vlekkenpatroon gelijk is, en rekening houdende met het feit, dat het eerste pigment zich afzet aan den voet der setae, kan men beweren, dat de vlekkenteekening gelijk te stellen is aan het setale patroon. Is deze meening juist, dan is tevens de bewering van EIMER c. s. vervallen, die aan de streep een hooge waarde toekennen als primair element der teekening. De opvatting van J. F. VAN BEMMELEN (1912) en TOWER (1905) — waarbij zich in den laatsten tijd ook DE MEIJERE (1916) aansloot — is dan de juiste.

Is echter het vlekkenpatroon homoloog aan het setale patroon, dan moet men niet alleen de poppen met vlekkenteekening onderzoeken, maar ook die welke ongekleurd zijn, doch setae dragen. Het is merkwaardig, dat reeds ± 1690 SWAMMERDAM de beteekenis der „haren" op de pop inzag voor de opvatting van het popstadium.

Talrijke ongekleurde poppen bezitten een setaal patroon, bijna geheel overeenstemmend met Type I. Ik ben dan ook overtuigd, dat het oorspronkelijke poppatroon bestaat uit setae, volgens dit type gerangschikt en waarschijnlijk aan den voet voorzien van een pigmentophooping.

Nu toonde CHAPMAN (1893—'96) aan, dat de pop der *Lepidoptera* niet zoo onbeweeglijk is als men meestal denkt. De beweeglijkste poppen vond hij bij de meest primitieve vlinders.

Vereenigt men nu deze beide opvattingen, dan krijgt men de voorstelling van een primitieve pop, die goed beweeglijk was en een setaal- of een vlekkenpatroon bezat als de rupsen. Dit strookt

geheel met de opvatting, dat de pop zou zijn een onbeweeglijk geworden subimaginaal stadium.

Naar men weet pleiten hiervoor vele andere feiten, b.v. de voorbijgaande teekening der vleugels, door J. F. VAN BEMMELEN in 1889 ontdekt, de uitwendige geslachtsverschillen door RATZEBURG in 1843 reeds beschreven en onafhankelijk van hem door JACKSON en POULTON (1890) weergevonden, het minder groote verschil van sprieten en vleugels bij mannetjes en wijfjes in vergelijking met die der imagines, waarop POULTON in 1890 de aandacht vestigde.

Ik meen in overeenstemming met J. F. VAN BEMMELEN hieraan het bestaan van een popteekening te moeten toevoegen.

Waar deze popteekening in 't algemeen overeenkomt met die van de rupseninstar I, en slechts dan met die van de volwassen larve, als de oorspronkelijke teekening bij deze bewaard is gebleven, meen ik hieruit te mogen besluiten, dat zoowel het popstadium als rupseninstar I, primitieve toestanden zijn, doch dat de andere rupseninstars secundair opgetreden phasen vertegenwoordigen. Deze opvatting is op geheel andere gronden door DEEGENER (1909) verdedigd.

In verband met het regelmatig voorkomen op de pop van een macula dorso-lateralis tusschen m. dorsalis en m. suprastigmalis (ook indien een seta dorso-lateralis op het abdomen der rups ontbreekt) kan men zeggen, dat tenminste in dit opzicht de pop de oorspronkelijke insectenteekening het best heeft bewaard, evenals de, in andere opzichten zoo sterk gewijzigde, thoracaal-segmenten.

Experimenteele Psychologie. — De Heer WINKLER biedt een mededeeling aan van den Heer F. ROELS: „*Vergelijkend onderzoek van eenige met behulp der natuurlijke en experimenteele leerwijze bij de studie van het geheugen verkregen resultaten*".

(Mede aangeboden door den Heer ZWAARDEMAKER).

I.

Leerproeven hebben steeds het voornaamste middel tot onderzoek van het geheugen uitgemaakt. Daarbij was het immer de vraag, wat het geheugen onder bepaalde, experimenteel nauwkeurig vastteleggen voorwaarden, van een ingeprente leerstof wist weertegeven. De inprenting geschiedde, van welke methode men zich ook bediende (leer-, besparings-, treffer-, helpmethoden enz.), steeds op dezelfde wijze. De leerstof, bij voorkeur zinloos materiaal, werd den proefpersonen in bepaald, standvastig tempo een, naar gelang van het doel

van het onderzoek, min of meer groot aantal malen getoond. Niet altijd werd daarbij rekening gehouden met de aan elk individu eigen leerwijze, zoodat het b.v. wel gebeurde, dat de snelheid in de opeenvolging der indrukken weinig overeenkwam met die, waarmede het individu een hem geboden leerstof spontaan pleegt inteprenten. De eigenaardige bezwaren, die daaruit voortvloeien en die zich in veel sterker mate bij individueel - dan bij algemeen - psychologische onderzoekingen doen gevoelen, zijn wellicht niet van dien aard, dat zij den langs dien weg verkregen resultaten alle waarde ontnemen; zij lijken echter bij nader beschouwen gewichtig genoeg om een vergelijkend onderzoek naar de met behulp der natuurlijke en experimenteele leerwijze verkregen resultaten te wettigen.

De in deze mededeeling vervatte gegevens zijn verkregen ingevolge eener reeks proeven gedaan in het psychologisch laboratorium der psychiatrisch-neurologische kliniek te Utrecht. De opzet van dit onderzoek was de volgende.

Een drietal proefpersonen — M., R. en D. — leerden ieder 40 reeksen van 12 lettergrepen zonder zin uit het hoofd. Bij de eerste twintig (groep I) was de proefpersoon geheel vrij in de keuze van het tempo, de groepeering der syllaben, de grootte van het interval tusschen twee opeenvolgende herhalingen enz.. De eenige bepalingen, waaraan hij zich had te onderwerpen, waren, dat bij de opeenvolgende herhalingen elke lettergreep slechts éénmaal mocht worden uitgesproken en dat de blik, eens van een lettergreep afgewend, er onder geen voorwendsel meer op mocht worden gevestigd. De andere twintig reeksen (groep II) werden den proefpersonen met behulp van een mnemometer van onze eigen constructie getoond. Deze bestond uit een horizontaal geplaatste, op een as bevestigde trommel, die met behulp van een electromotor van Helmholtz met gelijkmatige, nauwkeurig bepaalde snelheid ronddraaide. Op deze trommel werd een reep papier gelegd, waarop de lettergrepen met gelijke tusschenruimten waren gedrukt. Voor de trommel bevond zich een scherm, in het midden van een spleet voorzien, waarin bij draaiing van de trommel de lettergrepen een voor een verschenen. De tijd, dien de lettergrepen zichtbaar bleven, was dus voor elke lettergreep even groot, ook het interval tusschen twee elkaar volgende syllaben, alsmede dat tusschen twee elkaar volgende herhalingen was constant.

Zoowel bij de proeven van groep I als bij die van groep II sprak de proefpersoon de lettergrepen in een geluidsleutel. Deze bestond in een diaphragma van een grammophoon, waarop een platina-plaatje was bevestigd. Tegen dit plaatje rustte de geplatineerde punt van

een, om een horizontale as draaienden, door middel van een tegenwicht nauwkeurig te stellen V-vormigen arm, welks uitslagen reeds bij geringe intensiteit van het tegen het diaphragma gesproken geluid, een door het instrument gaanden zwakken electrischen stroom onderbraken. Deze onderbrekingen werden met behulp van een markeermagneet op de trommel van een kymographion opgeteekend. Door een tweeden markeermagneet lieten wij een door middel van den chronoscoop van KAGENAAR verkregen tijdlijn schrijven ($^1/_5$ sec.). Wij waren aldus in staat bij de natuurlijke en experimenteele leerwijze den voor elke herhaling vereischten duur, de tijdsbetrekking tusschen de elkaar volgende lettergrepen eener reeks, de veranderingen, die deze betrekking met den voortgang van het van buiten leeren maakt enz., te bepalen.

De bepaling van den tot elke herhaling en het algeheele van buiten leeren benoodigden tijd bracht eenige moeilijkheid mede, daar onze geluidsleutel wel nauwkeurig het oogenblik aangaf, waarop de proefpersoon een aanvang had gemaakt met het uitspreken der eerste lettergreep der reeks, maar daarentegen niet juist het oogenblik aangaf, waarop de lezing der laatste lettergreep werd voleind. Daar het oogenblik, waarop met het uitspreken dezer laatste lettergreep een begin wordt gemaakt, wel nauwkeurig te bepalen is en het uitspreken eener door twee medeklinkers met tusschengeschoven klinker of tweeklank gevormde syllabe uiterst weinig tijd vereischt (ten hoogste 0.20 sec.), hebben wij gemeend dezen bij onze berekeningen te mogen verwaarloozen. Daar de in groep I en II verkregen tijdswaarden deze verkorting in gelijke mate ondergaan, kan dit zonder gevaar geschieden.

Wij hadden bij de proeven van groep II het oogenblik te bepalen, waarop de eerste lettergreep der reeks in de spleet zichtbaar werd. Dit oogenblik toch behoeft niet noodzakelijk samen te vallen met dat, waarop de proefpersoon de syllabe uitspreekt. Wij voorzagen daarom een der zijkanten van de trommel van den mnemometer van een knopje, dat bij elken toer der trommel een oogenblik contact maakte met een veer. Daarmede lieten wij het verschijnen der eerste lettergreep in de spleet samenvallen. De door het contact veroorzaakte stroomsluiting werd met behulp van een markeermagneet op de trommel van het kymographion opgeteekend.

Meende de proefpersoon de reeks te kennen, zoo zegde hij haar uit het hoofd op. Bleef hij daarbij steken, dan liet de experimentator het overblijvende deel der reeks nog eens lezen. Onmiddellijk na recitatie gaf de proefpersoon aan, hoe hij bij het leeren was te werk

gegaan, hoe hij het materiaal had gegroepeerd, welke verbindingen tusschen de lettergrepen waren aangebracht enz..

Elken dag werden vier reeksen van buiten geleerd. Juist 24 uur later werd met behulp der besparingsmethode onderzocht, wat er van de inprenting van den vorigen dag nog was blijven zitten. Groep I werd achter elkaar afgewerkt, daarna volgde eerst groep II.

Onderstaande tabel geeft voor iederen proefpersoon het gemiddeld aantal tot van buiten leeren eener reeks benoodigde herhalingen bij gebruik der natuurlijke (I) en experimenteele (II) leerwijze. De eerste van twee elkaar volgende horizontale rijen bevat de resultaten der leerproeven (*l*) van den eersten dag, de tweede die der repeteerproeven (*r*) 24 uur later. Naast het arithmetisch gemiddelde berekenden wij in deze en volgende tabellen, eveneens de gemiddelde afwijking en de centrale waarde. De laatste kolom veroorlooft zich een denkbeeld te vormen van de besparing (uitgedrukt in pct.) na 24 uur bij gebruik der natuurlijke en experimenteele leerwijze verkregen. Wij geven in een afzonderlijke kolom het aantal van buiten geleerde reeksen, dat ons de gegevens verschafte.

TABEL I.

Proefpersonen	*Aantal reeksen*			*Arithm. gem.*	*Gem. afw.*	*C. W.*	*Besparing na 24 uur*
M.	20	I	l	8.45	1.50	8	52.77
			r	4	0.46	4	
	20	II	l	9.25	1.41	9	47.03
			r	4.90	0.95	5	
R.	20	I	l	4.50	1.04	4	45.56
			r	2.45	0.78	2	
	20	II	l	7.60	1.50	7.50	59.21
			r	3.10	0.74	3	
D.	20	I	l	9.66	2.08	9	49.28
			r	4.90	0.80	5.50	
	8	II	l	10.50	3.25	9.50	46.43
			r	5.60	1.92	4.50	

De rangorde, die de proefpersonen, met betrekking tot het aantal herhalingen der leerproeven, bij I innemen, blijft bij II behouden.

Voor allen neemt echter het aantal herhalingen toe; voor M. en D. met ongeveer gelijke waarde (resp. 9.47 en 8.69 pct.); voor R. is de toename belangrijk grooter (68.89 pct.). Iets dergelijks nemen wij waar bij beschouwing der *r*-rijen. Ook hier is de toename het grootst voor R. (26.53 pct.); zij is echter aanzienlijk geringer voor D dan voor M. (resp. 14.28 en 22.5 pct.).

Het percentage na 24 uur uitgespaarde herhalingen is voor M en D bij I grooter dan bij II (resp. 52.77, 47.03 en 49.28, 46.43 pct.). Voor R nemen wij het tegenovergestelde waar; II geeft een belangrijk grootere besparing (59.21 en 45.56 pct.).

De volgende tabel geeft het gemiddelde van den tot het van buiten leeren eener reeks benoodigden tijd bij I en II. Haar samenstelling behoeft, na hetgeen wij tot verklaring der vorige vermeldden, geen andere opmerking dan dat de tijdswaarden zijn uitgedrukt in seconden.

TABEL II.

Proef-personen	*Aantal reeksen*			*Arithm. gem.*	*Gem. afw.*	*C. W.*	*Besparing na 24 uur*
M.	19	I	l	92.40	15.67	87.45	53.05
	20		r	43.38	6.91	44.55	
	20	II	l	87.52	11.83	88.12	47.44
	20		r	46	8.48	43.40	
R.	20	I	l	61.43	16.15	57.97	52.89
	20		r	28.94	9.55	26.97	
	19	II	l	70.23	11.38	71.85	60.17
	19		r	27.97	6.54	26.75	
D.	17	I	l	114.40	32.36	86.85	51.70
	20		r	55.26	13.54	55.47	
	8	II	l	97.54	21.79	89.23	48.64
	8		r	50.10	14.21	43.20	

Over het algemeen neemt de tijd der leerproeven bij II af; voor M en D resp. met 5.28 en 14.74 pct.. R heeft echter bij II meer tijd noodig (toename met 14.32 pct.). De leertijden der *r*-rijen ontloopen elkaar niet al te zeer. Voor R en D nemen zij bij II af (resp. met 3.35 en 9.34 pct.), voor M nemen zij met 6.04 pct. toe. Wat de besparing aan tijd na 24 uur betreft, zij is

bij M en D grooter bij I (resp. 53.05, 47.44 en 51.70, 48.64 pct.); bij R daarentegen aanzienlijk grooter bij II (52.89 en 60.17 pct.).

Vatten wij deze gegevens in het kort samen, dan zien wij, dat het tot van buiten leeren vereischte aantal herhalingen, zoowel in de leer- als in de repeteerproeven, grooter is bij II dan bij I. De toename van het aantal herhalingen in de leerproeven houdt echter geen gelijken tred met die der repeteerproeven, waardoor voor twee onzer proefpersonen de besparing na 24 uur het grootst is bij I, voor den derden echter bij II. Verder vraagt het van buiten leeren bij II niet alleen minder tijd, ook is de na 24 uur verkregen tijdsbesparing grooter. De enkele uitzonderingen vinden haar verklaring in de ongelijke toename van het tot van buiten leeren benoodigde aantal herhalingen in de leer- en in de repeteerproeven.

Tabel III geeft den gemiddelden duur der recitatie-tijden (in seconden) voor de leer- en repeteer-proeven bij I en II met de na 24 uur verkregen besparing, uitgedrukt in pct..

TABEL III.

Proefpersonen	*Aantal reeksen*			*Arithm. gem.*	*Gem. afw.*	*C. W.*	*Besparing na 24 uur*
M.	20	I	l	13.61	3.31	12.37	13.74
	20		r	11.74	2.24	10.95	
	20	II	l	11.49	2.19	10.47	4.96
	20		r	10.92	2.25	10.07	
R.	20	I	l	11.95	3.73	11.25	2.43
	20		r	11.66	2.21	11.65	
	19	II	l	13.92	4.57	12.63	19.04
	20		r	11.27	2.62	10.65	
D.	17	I	l	11.54	1.98	11.10	14.30
	20		r	9.89	1.79	9.30	
	8	II	l	11.15	2.98	10.78	3.14
	8		r	10.75	1.95	10.45	

Voor al onze proefpersonen is de recitatie-tijd der leerproeven grooter dan die der repeteerproeven, zoowel bij I als bij II. M en D reciteeren vlugger bij II. R daarentegen bij I; dit is tenminste voor de leerproeven het geval. Wat de recitatie der repeteerproeven aangaat, zij duurt alleen voor D langer bij II dan bij I. De kolom,

die het percentage der na 24 uur uitgespaarde herhalingen bij I en II bevat, toont onmiddellijk, dat I een grootere besparing geeft bij M en D; II daarentegen bij R.

De recitatie-tijd is dus, zoowel bij I als bij II grooter voor de leer- dan voor de repeteerproeven. Verder schijnt de experimenteele leerwijze, meer dan de natuurlijke, bevorderlijk te zijn aan een vlotte recitatie, terwijl de laatste daarentegen eene grootere besparing geeft.

De gemiddelde snelheid, waarmede den proefpersonen bij II de reeksen werden aangeboden, gemeten vanaf het oogenblik van verschijnen der eerste lettergreep in de spleet van den mnemometer tot aan dat der laatste, bedroeg 9.5 seconde. Onderstaande tabel laat zien, hoe de proefpersonen het leertempo der leer- en repeteerproeven spontaan regelden. Wij bepaalden daartoe den gemiddelden duur eener herhaling in geval van leeren en repeteeren der reeksen. De eerste kolom bevat het aantal herhalingen, waaruit de tijdswaarden werden berekend.

TABEL IV.

Proef-personen	*Aantal herhalingen*		*Arithm. gem.*	*Gem. afw.*	*C. W.*
M.	167	l	11.26	1.03	10.87
	80	r	11.31	1.21	11.47
R.	86	l	13.44	1.40	12.95
	49	r	11.79	1.08	11.66
D.	173	l	11.16	1.40	10.44
	110	r	9.86	1.39	9.71

Voor R. en D. is de gemiddelde duur eener herhaling aanzienlijk grooter voor de leer- dan voor de repeteerproeven, voor M. zijn beide ongeveer gelijk. Zoowel voor leeren als voor repeteeren vraagt een herhaling gemiddeld meer tijd bij I dan bij II. Alleen de gemiddelde duur eener herhaling in geval van repeteeren komt bij M. dien van I eenigszins nabij.

Onze onderzoekingen hebben ons aangaande de wijze, waarop de proefpersonen spontaan het leertempo met de toenemende bekendheid van het materiaal wijzigden, eenige gegevens verstrekt, die in de volgende tabellen zijn vervat. Wij groepeerden voor elke reeks

de tot het van buiten leeren benoodigde herhalingen — leeren en repeteeren — in drie groepen van elkaar volgende herhalingen. Voor elke groep berekenden wij den gemiddelden tijdsduur der daartoe behoorende herhalingen. Een vergelijking der aldus voor elke groep verkregen tijdswaarden, veroorlooft een denkbeeld te vormen van de veranderingen, die de snelheid van het leeren en repeteeren met de toenemende bekendheid der in te prenten stof ondergaat. Opmerking verdient nog, dat bij niet-deelbaarheid van het aantal herhalingen door drie, de groepen zóó werden gevormd, dat de eerste en laatste steeds hetzelfde aantal herhalingen bevatte, waardoor de middelste dan één herhaling grooter of kleiner uitviel. Hoewel de expositie-tijd der lettergrepen, bepaald door den regelmatig loopenden mnemometer, bij II steeds dezelfde bleef, vond de proefpersoon toch voldoende gelegenheid om, binnen zekere grenzen, den duur der herhalingen naar believen te verlengen of te verkorten, daar hij het uitspreken der eerste en laatste syllabe der reeks op een willekeurig gekozen oogenblik van den tijd, dien zij in de spleet van het scherm zichtbaar bleven, kon doen plaats hebben. Een strekking tot verkorting of verlenging van den duur der herhalingen met het voortschrijden van het leerproces, kan zich dus ook bij II openbaren.

TABEL V. *Proefpersoon M.*

	Groepen		*Arithm. gem.*	*Gem. afw.*	*C. W.*
I (20)	1e	l	9.79	0.63	9.72
		r	9.34	0.68	9.70
	2e	l	10.92	0.86	10.93
		r	10.78	0.92	10.72
	3e	l	12.57	1.66	11.82
		r	12.73	2.03	12.27
II (20)	1e	l	9.62	0.51	9.37
		r	9.52	0.60	9.31
	2e	l	9.57	0.52	9.47
		r	9.52	0.51	9.30
	3e	l	9.50	0.49	9.47
		r	9.49	0.55	9.40

TABEL VI. *Proefpersoon R.*

	Groepen		*Arithm. gem.*	*Gem. afw.*	*C. W.*
I (20)	1e	l	12.42	0.71	12.57
		r	10.91	1.33	11.20
	2e	l	13.33	1.33	13.55
		r	11.10	1.78	10.50
	3e	l	14.13	2.41	13.56
		r	13.28	1.78	12.90
II (19)	1e	l	9.22	0.78	9.22
		r	9.11	0.44	9.10
	2e	l	9.09	0.99	9.08
		r	9.52	0.84	8.80
	3e	I	9.56	1.02	9.83
		r	9	1.02	9.35

TABEL VII. *Proefpersoon D.*

	Groepen		*Arithm. gem.*	*Gem. afw.*	*C. W.*
I (20)	1e	l	11.09	1.33	10.62
		r	9.82	1.49	9.70
	2e	l	10.70	1.33	10.35
		r	10.12	1.74	9.55
	3e	l	11.49	1.89	11.13
		r	10.11	1.58	10.25
II (8)	1e	l	9.76	0.53	9.76
		r	9.53	0.22	9.51
	2e	l	9.69	0.59	9.58
		r	9.22	0.37	9.22
	3e	l	9.67	0.67	9.50
		r	9.33	0.42	9.31

Een enkele uitzondering voor D. daargelaten, neemt de tijdsduur der herhalingen toe, naarmate de proefpersoon met de in te prenten

stof bekend raakt. Dit geldt zoowel voor de leer- als voor de repeteerproeven. Met uitzondering wederom van een enkel geval voor D., is de toename grooter bij de repeteer- dan bij de leerproeven (voor M. 3.39 en 2.78, voor R. 2.77 en 1.71 sec.); een nieuw bewijs, dat, tenminste bij twee onzer drie proefpersonen, de strekking bestaat den leertijd te verlengen, naarmate de leerstof meer bekend raakt. Bij de repeteerproeven toch heeft de proefpersoon het voordeel alreeds den vorigen dag met de leerstof kennis te hebben gemaakt. In dezelfde richting wijst het feit, dat, met een enkele uitzondering, de toename van den leertijd, zoowel in de leer- als in de repeteerproeven van de tweede tot de derde groep grooter is dan die van de eerste naar de tweede (voor M.: 1.13 en 1.65, 1.44 en 1.95 sec.; voor R.: 0.91 en 0.80, 0.19 en 2.18 sec.;

TABEL VIII.

Proef-personen		*Groepen*		*Arithm. gem.*	*Gem. afw.*	*C. W.*
M.	I	1e	l	8.90	1.70	8.50
			r	3.90	0.36	4
		2e	l	8	1.30	8.50
			r	4.10	0.56	4
	II	1e	l	10.40	1.32	11
			r	5.80	1.30	5
		2e	l	8.10	1.50	8.50
			r	4	0.60	4
R.	I	1e	l	5.40	1.40	5.50
			r	2.60	0.80	2.50
		2e	l	3.60	0.68	4
			r	2.30	0.76	2.50
	II	1e	l	8.20	1.40	7.50
			r	3.10	0.74	3
		2e	l	7	1.60	7.50
			r	3.10	0.74	3
D.	I	1e	l	10.62	2.37	10
			r	5.80	1.16	6
		2e	l	8.70	1.80	8
			r	4	0.44	4

voor D.: — 0.39 en 0.79, 0.30 en — 0.01 sec.). De gevolgtrekking schijnt dus gewettigd, dat bij I voor twee onzer drie proefpersonen de voor de elkaar volgende herhalingen vereischte tijd, zoowel bij de leer- als bij de repeteerproeven met de bekendheid der leerstof toeneemt. Bij II is van een geleidelijke toename van den leertijd met de bekendheid van het materiaal niets te bespeuren. Wel zijn hier, evenals bij I, de tijdswaarden over het algemeen kleiner voor de repeteer- dan voor de leerproeven, maar terwijl b.v. bij I de gemiddelde tijdsduur der tot de laatste groep behoorende herhalingen steeds de grootste is, is hij hier, met een enkele uitzondering, steeds het kleinst. Verder biedt een vergelijking van de tijdswaarden der verschillende groepen onderling, niets gelijkmatigs.

TABEL IX.

Proefpersonen		*Groepen*		*Arith. gem.*	*Gem. afw.*	*C. W.*
M.	I	1e	l	90.25	16.54	86.95
			r	36.02	5.89	41.15
		2e	l	94.55	14.80	94.37
			r	50.75	7.93	49.92
	II	1e	l	97.11	10.48	100.37
			r	53.31	11.23	49.62
		2e	l	77.99	13.18	80.47
			r	38.69	5.74	39.92
R.	I	1e	l	75.43	21.16	66.65
			r	28.56	8.80	26.80
		2e	I	47.44	11.15	51.82
			r	29.32	10.31	27.33
	II	1e	l	78.83	12.13	74.25
			r	31.21	8.84	28.90
		2e	l	61.64	10.64	62.85
			r	24.74	4.25	23.60
D.	I	1e	l	138.19	42.22	133.60
			r	68.70	12.74	65.02
		2e	l	90.61	22.50	79.70
			r	41.81	14.35	33.02

De tabellen VIII en IX ten slotte geven een beeld van den invloed der oefening op het aantal herhalingen en den tot het van buiten leeren der reeksen benoodigden tijd bij I en II voor de leer- en repeteerproeven. Wij hebben voor haar samenstelling de bij I en II, in de leer- en repeteerproeven met betrekking tot het aantal herhalingen en den leertijd verkregen gegevens in de volgorde, waarin wij deze wonnen, gerangschikt en hen daarna in twee even groote groepen gesplitst. Voor elke groep berekenden wij het arithmetisch gemiddelde, de gemiddelde afwijking en de centrale waarde. De cijfers van tabel VIII geven het aantal herhalingen, die van tabel IX de tijdswaarden, uitgedrukt in seconden. De gegevens voor D. bij II zijn te gering in getale dan dat zij hier konden worden benut.

Tabel VIII toont onmiddellijk, dat de invloed der oefening zich in een vermindering van het aantal herhalingen openbaart. Bij I worden de reeksen van de tweede groep door M met 10, door R met 33, door D met 17,93 pct. minder herhalingen geleerd dan die van den eersten. Ook bij II doet zich deze besparing aan herhalingen voor. M leert met 22, R met 15 pct. minder herhalingen. Voor den eersten is de invloed der oefening dus grooter, voor den laatsten kleiner bij II dan bij I.

De voor de repeteerproeven aangegeven waarden kunnen niet onmiddellijk met elkaar vergeleken worden, daar zij haar beteekenis voor een groot deel aan haar verhouding tot die der leerproeven ontleenen. Wij berekenen daarom de besparing, die de repeteerproeven in de eerste en tweede groep bij I en II gaven. Deze besparing is in de volgende tabel in pct. uitgedrukt.

TABEL X.

Proefpersonen	*Groepen*	I	II
M.	1e	56.15	44.33
	2e	48.75	51.62
R.	1e	51.85	62.20
	2e	36.11	55.72
D.	1e	45.29	—
	2e	54.05	—

Voor M en R neemt bij I de besparing af; het leeren der reeksen van de tweede groep geschiedt wel met minder herhalingen, doch de vermindering van het aantal herhalingen der repeteer-

proeven houdt daarmede geen gelijken tred, zoodat de besparing tenslotte geringer uitvalt. D, die voor den eersten keer als proefpersoon aan een experimenteel onderzoek van het geheugen deelnam, leert niet alleen de reeksen van de tweede groep met een minder aantal herhalingen, maar heeft daarbij een grootere besparing in de repeteerproeven, een verschijnsel, dat wij aan het feit der volstrekte ongeoefendheid van dezen proefpersoon toeschrijven, waardoor hij meer dan de anderen voor de gunstige werking van oefening en herhaling der proeven vatbaar was.

Bij II doet de invloed der oefening zich voor R in een afname van het percentage uitgespaarde herhalingen gelden; voor M echter neemt het toe. Naar alle waarschijnlijkheid is het verschil, dat hier tusschen deze beide proefpersonen bestaat, te wijten aan het feit, dat R. bij II trachtte het hem niet passende leertempo in het aan zijn spontane wijze van memoriseeren eigen tempo omtezetten, wat hem natuurlijk eerst na de noodige oefening gelukte; M daarentegen heeft zich bij II, gedurende het geheele verloop der proeven, zorgvuldig aan het hem opgelegde tempo gehouden.

De invloed der oefening op den leertijd (tabel IX), openbaart zich bij R. en D. doorgaans in een vermindering van den tot het van buiten leeren benoodigden tijd. Dit geldt zoowel bij I als bij II, voor de leer- als voor de repeteerproeven. Terwijl voor R. bij I in de leerproeven het aantal herhalingen met 33 pct. vermindert, neemt de tijd met 37.11 pct. af, voor D. bedraagt de vermindering resp. 17.93 en 34 pct. Voor D neemt het aantal herhalingen bij I in de repeteerproevən met 31.04, de leertijd met 39,14 pct. af, zoodat ook hier de invloed der oefening zich in een verkorting van den leertijd uit; voor R. vermindert het aantal herhalingen echter met 11.54 pct, terwijl de leertijd met 2.66 pct. toeneemt. Onder den invloed der oefening groeit dus hier de leertijd aan. Bij I neemt de leertijd voor R. in de tweede groep, zoowel voor het leeren als repeteeren toe; aantal herhalingen en tijd vermeerderen hier resp. met 15 en 21.81 en met 0 en 21.05 pct. De invloed der oefening openbaart zich bij M. zonder uitzondering in een verlenging van den leertijd. De afname van het aantal herhalingen en den leertijd toch bedragen voor de leer- en repeteerproeven bij I en II resp. 10 en + 4.76 pct., + 5.13 en + 40.89 pct., 22 en 19.69 pct., 31.04 en 27.43 pct..

Het in het oog springend verschil, dat er, met betrekking tot den invloed der oefening op den leertijd, tusschen M. en de beide andere proefpersonen bestaat, vindt zijn oorzaak in het feit, dat M. bij het van buiten leeren anders te werk gaat dan R. en D. Terwijl deze laatsten, met het toenemen der leerstof in bekendheid, voortgaan te

lezen, begint M. onmiddellijk, wanneer hij daartoe in staat is, te reciteeren. Niet, dat bij R. en D. geen recitatie der reeds gekende lettergrepen plaats heeft, zij gaan daar integendeel gaarne toe over, echter niet in zoo sterke mate als dit bij M. het geval is. Onder den invloed der oefening nu geraken de lettergrepen vlugger bekend, waardoor, bij de bestaande tendentie tot zoo spoedig mogelijk reciteeren, de afwisseling van reciteeren en lezen eerder kan plaats hebben. Het gevolg hiervan is echter dat de leertijd toeneemt.

Opmerking verdient, dat, zooals de voor M. aangegeven percentages doen zien, de natuurlijke leerwijze zich beter dan de experimenteele, tot deze wijze van memoriseeren leent. Dit valt trouwens wel te begrijpen, wanneer men bedenkt, dat de proefpersoon, wil hij niet de kans loopen stoornis in het van buiten leeren aantebrengen, door het gedwongen leertempo genoodzaakt is het zoeken naar een lettergreep optegeven, wanneer zij bij het verschijnen der daarop volgende in den mnenometer, nog niet in het bewustzijn is opgedoken.

De gegevens der drie laatste tabellen kunnen op de volgende wijze worden samengevat. De invloed der oefening openbaart zich in de leerproeven door een vermindering van het tot van buiten leeren vereischte aantal herhalingen. Voor M. is hij grooter bij II, voor R daarentegen bij I. In de repeteerproeven neemt de besparing voor M en R af, D daarentegen spaart herhalingen uit, hetgeen aan de volstrekte ongeoefendheid van dezen proefpersoon moet worden toegeschreven. Dat bij II de invloed der oefening zich voor R in een afname van het percentage uitgespaarde herhalingen doet gelden, vindt waarschijnlijk zijn oorzaak in het feit, dat deze proefpersoon trachtte het hem niet passende leertempo bij I in het aan zijn natuurlijke wijze van memoriseeren eigen tempo omtezetten, hetgeen eerst na voldoende oefening mogelijk was. De invloed der oefening op den leertijd uit zich bij R en D doorgaans in een verkorting van den tot van buiten leeren benoodigden tijd. Bij M daarentegen neemt men een verlenging van den leertijd waar, die op rekening van een krachtige strekking tot reciteeren der gekende syllaben moet worden geschreven. Deze strekking zet zich bij I gemakkelijk, bij II daarentegen veel moeilijker door.

CONCLUSIES.

1°. Het tot van buiten leeren vereischte aantal herhalingen is, zoowel in de leer- als in de repeteerproeven, grooter bij gebruik der experimenteele dan bij gebruik der natuurlijke leerwijze. De toename

van het aantal herhalingen der leerproeven houdt echter geen gelijken tred met die der repeteerproeven, waardoor voor twee onzer proefpersonen de na 24 uur verkregen besparing het grootst is bij gebruik der natuurlijke, voor den derden echter bij gebruik der experimenteele leerwijze.

2. Bij gebruik der experimenteele leerwijze vraagt het van buiten leeren niet alleen minder tijd, ook is de na 24 uur verkregen tijdsbesparing grooter. De enkele uitzonderingen vinden haar verklaring in de ongelijke toename van het tot van buiten leeren benoodigde aantal herhalingen in de leer- en in de repeteerproeven.

3. De recitatie-tijd is, zoowel bij gebruik der natuurlijke als bij gebruik der experimenteele leerwijze, grooter voor de leer- dan voor de repeteerproeven. De experimenteele leerwijze schijnt over het algemeen meer dan de natuurlijke bevorderlijk te zijn aan een vlotte recitatie; de laatste daarentegen geeft een grootere besparing.

4. In den regel is de gemiddelde duur eener herhaling grooter voor de leer- dan voor de repeteerproeven. Het natuurlijke leertempo onzer proefpersonen bleek belangrijk langzamer te zijn dan het experimenteele.

5. Voor twee onzer drie proefpersonen neemt bij gebruik der natuurlijke leerwijze, zoowel in de leer- als in de repeteerproeven, het leertempo geleidelijk met de toename der bekendheid van de leerstof in snelheid af. Bij gebruik der experimenteele leerwijze is van een geleidelijke verlangzaming van het leertempo met de meerdere bekendheid van het materiaal niets te bespeuren. Wel is ook hier het tempo over het algemeen sneller voor de repeteer- dan voor de leerproeven.

6. De invloed der oefening openbaart zich door een vermindering van het tot van buiten leeren vereischte aantal herhalingen. Voor den eenen proefpersoon is hij het grootst bij gebruik der experimenteele, voor den anderen bij gebruik der natuurlijke leerwijze.

7. De invloed der oefening op den leertijd uit zich bij gebruik der natuurlijke en experimenteele leerwijze, over het algemeen, in een verkorting van den tot van buiten leeren benoodigden tijd. De verlenging van den leertijd, die bij een onzer proefpersonen wordt waargenomen, moet op rekening van een krachtige strekking tot reciteeren der gekende syllaben worden geschreven, die zich gemakkelijker bij de natuurlijke dan bij de experimenteele leerwijze vermag door te zetten.

Natuurkunde. De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer L. S. ORNSTEIN: *„De veranderlijkheid van de groepeering van emulsie-deeltjes met den tijd"*.

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS).

SMOLUCHOWSKI heeft dit vraagstuk in verschillende verhandelingen besproken en heeft van zijn werk, in drie voordrachten te Göttingen gehouden, een samenvatting gegeven [1]).

Hij heeft een formule afgeleid voor de gemiddelde verandering van het aantal deeltjes in een element, dat op het tijdstip nul n deeltjes bevat. Deze luidt:

$$\overline{\Delta}_n = (\nu - n) P, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hierin is P de kans, dat een deeltje, dat op den tijd nul in het element ligt, op het tijdstip t er buiten gekomen is; terwijl ν het aantal deeltjes is dat bij een homogene verdeeling over het geheele volume in het beschouwde element zou komen te liggen.

Ook voor het gemiddelde quadraat bij gegeven aantal deeltjes n op den tijd nul geeft SMOLUCHOWSKI een formule n.l.

$$\overline{\Delta^2 n} = [(n - \nu)^2 n] \; P^2 + (n + \nu) P \, , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waaruit, als ook naar n gemiddeld wordt, volgt

$$\overline{\Delta^2} = 2 \nu P.$$

Deze betrekkingen worden door SMOLUCHOWSKI afgeleid met behulp van waarschijnlijkheidsbeschouwingen, die „nach Ausführung recht komplizierter Summationen merkwürdigerweise das einfache Resultat" geven.

Het ligt voor de hand, dat een dergelijk eenvoudig resultaat ook langs een minder gecompliceerden weg bereikt zal moeten kunnen worden. Dat dit inderdaad het geval is wil ik in deze mededeeling aantoonen. Tevens kan dan ook nog eenige uitbreiding aan het resultaat gegeven worden.

1. Laten wij de ruimte in een groot aantal gelijke elementen verdeeld denken, die wij door de indices $1 \, . \, . \, \varkappa \, . \, . \, k$ zullen aanduiden. Laat op een gegeven oogenblik $(t = 0)$ $n_1 \ldots n_\varkappa \ldots n_k$ deeltjes in deze elementen aanwezig zijn. Na afloop van een tijd t zijn deze aantallen veranderd. Stel nu dat $p_{1\varkappa}$ de kans voorstelt, dat een deeltje dat op den tijd $t = 0$ in het element 1 is, zich op den tijd t in het element $\varkappa$ bevindt en laat $p_{\varkappa 1}$ de waarschijnlijkheid van den omgekeerden overgang voorstellen. Is er nu geen voorkeur in de richting bij de beweging der deeltjes dan spreekt het van zelf dat $p_{1\varkappa} = p_{\varkappa 1}$.

[1]) Verg. Phys. Zeitschr. 1916, p. 557 en ook Phys. Zeitschr. XVI 1915, p. 323.

Verder is $\Sigma_{\lambda=1}^{\lambda=k} p_{\varkappa\lambda} = P$, als de som naar alle waarden λ behalve $\varkappa = \lambda$ genomen wordt, immers de som stelt de waarschijnlijkheid voor, dat het deeltje na den tijd t in een der k—1 andere elementen d. w. z. buiten het element $\varkappa$ gekomen is.

Indien een element λ n_λ deeltjes bevat zal in een bepaald geval het aantal deeltjes dat van λ naar $\varkappa$ gegaan is $\Delta_{\lambda\varkappa}$ zijn. Ik zal nu eerst de gemiddelde waarden van $\Delta_{\lambda\varkappa}$ $\Delta^2_{\lambda\varkappa}$ en $\Delta_{\lambda\varkappa}$ $\Delta_{\mu\varkappa}$ aangeven. Het aantal gevallen, waarin $\Delta_{\lambda\varkappa}$ de waarde s heeft en dus $n_\lambda - s$ in het element gebleven zijn, bedraagt,

$$\frac{n_\lambda\,!}{n_\lambda - s\,!\,s\,!}\, p_{\lambda\varkappa}{}^s \,(1 - p_{\lambda\varkappa})^{\,n_\lambda - s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gelijk men gemakkelijk inziet; ter bepaling van de drie gemiddelde waarden heeft men nu deze uitdrukking met s resp. s^2 te vermenigvuldigen en te sommeeren van nul tot n_λ. Men vindt dan na een geheel elementaire berekening van deze eindige sommen

$$\overline{\Delta_{\lambda\varkappa}} = p_{\lambda\varkappa}\, n_\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en

$$\overline{\Delta_{\lambda\varkappa}{}^2} = p_{\lambda\varkappa}{}^2\,(n_\lambda{}^2 - n_\lambda) + p_{\lambda\varkappa}\, n_\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Om het gemiddelde van een dubbel product te bepalen behoeft men (3) λ slechts door μ en s door t te vervangen (waarbij t het aantal in een bepaald geval geemitteerde deeltjes voorstelt).

Vermenigvuldigt men de zoo verkregen uitkomst met (3) en sommeert men naar r van 0 tot n_λ en naar t van 0 tot n_μ, dan vindt men

$$\overline{\Delta_{\lambda\varkappa}\, \Delta_{\mu\varkappa}} = p_{\lambda\varkappa}\, p_{\mu\varkappa}\, n_\lambda\, n_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Met behulp van de betrekkingen (4), (5) en (6) zijn nu de formules van Smoluchowski onmiddellijk af te leiden. De verandering ${}_n\Delta_\varkappa$, d.w.z. de totale verandering van het aantal deeltjes in het element $\varkappa$ kan worden voorgesteld door

$${}_n\Delta_\varkappa = \Delta_{1\varkappa} + \Delta_{2\varkappa} \ldots + \Delta_{k\varkappa} - (\Delta_{\varkappa 1} + \ldots \Delta_{\varkappa k}) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Wij kunnen nu voor $\Delta_{\varkappa 1} + \ldots \Delta_{\varkappa k}$ schrijven $\Delta_\varkappa$ d.w.z. het totale aantal deeltjes dat het element in den tijd t verlaat.

Wij moeten nu (7) middelen bij constante $n_\varkappa$, terwijl aan de aantallen $n_1 \ldots n_k$ in de andere elementen alle mogelijke waarden gegeven moeten worden. Houden we nu eerst de $n_1 \ldots n_k$ vast en middelen we, dan vinden wij

$$\overline{{}_n\Delta_\varkappa} = p_{1\varkappa}\, n_1 + \ldots p_{k\varkappa}\, n_k - n_\varkappa\, P\,.$$

Middelen we nu vervolgens naar $n_1 \ldots n_k$ en bedenken wij dat $\overline{n_1} = \ldots = \overline{n_k} = \nu$, dan vinden wij

$$\overline{\overline{{}_n\Delta_\varkappa}} = \nu\,(p_{1\varkappa} + \ldots p_{k\varkappa}) - n_\varkappa\; P = (\nu - n_\varkappa)\,P\,.$$

Om nu $\overline{{}_n\Delta_\varkappa^2}$ te vinden kunnen wij op geheel analoge wijze te werk gaan, wij brengen (7) in het quadraat. Dan vinden wij

$$\begin{aligned}\Delta_\varkappa^2 = \;& \Delta_{1\varkappa}^2 + \ldots \Delta_{k\varkappa}^2 + \Delta_\varkappa^2 \\ & + 2\,\Delta_{1\varkappa}\,\Delta_{2\varkappa} + \ldots \\ & - 2\,\Delta_\varkappa\,(\Delta_{1\varkappa} + \ldots \Delta_{k\varkappa})\,.\end{aligned}$$

Passen wij nu (5) en (6) toe terwijl wij middelen bij gegeven $n_1 \ldots n_k$ en $n_\varkappa$, dan vinden wij:

$$\begin{aligned}\overline{{}_n\Delta_\varkappa^2} = \;& (n_1^2 - n_1)\,p_{1\varkappa}^2 + p_{1\varkappa}\,n_1 + \ldots + P^2\,(n_\varkappa^2 - n_\varkappa) + n_\varkappa\,P \\ & + 2\,n_1\,n_2\,p_{1\varkappa}\,p_{2\varkappa} + \ldots \\ & - 2\,n\,P\,(p_{1\varkappa}\,n_1 + \ldots p_{k\varkappa}\,n_k)\,.\end{aligned}$$

Dit moet nu vervolgens bij constante $n_\varkappa$ naar n_1 etc. gemiddeld worden. Hierbij moet men bedenken dat $\overline{n_1^2} = \overline{n_2^2} = \ldots \overline{n_k^2} = \nu^2 + \nu$ [1]), dat verder $\overline{n_1} = \nu$ en $\overline{n_1\,n_2} = \nu^2$. Dientengevolge vindt men:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{{}_n\Delta_\varkappa^2}} = \;& (\nu^2 + \nu)\,(p_{1\varkappa}^2 + \ldots p_{k\varkappa}^2) \\ & + 2\,\nu^2\,(p_{1\varkappa}\,p_{2\varkappa} + \ldots \qquad) \\ & - \nu\,(p_{1\varkappa}^2 + \ldots \qquad) \\ & - 2\,n\,\nu\,P^2 + P^2\,(n^2 - n) + n\,P\,.\end{aligned}$$

De drie eerste termen leveren tezamen $P^2\,\nu^2$. De uitkomst wordt dus

$$\overline{\overline{{}_k\Delta_n^2}} = \{\,(n-\nu)^2\;P^2 - n\;P^2\,\} + (n + \nu)\;P,$$

waaruit door middelen naar n, de betrekking

$$\overline{\Delta^2} = 2\,\nu\,P$$

ontstaat.

2. Men kan van de gegeven formules een uitbreiding geven tot het geval, dat de dichtheidsafwijking in de verschillende volume-elementen niet onafhankelijk zijn, waarbij echter omtrent de uitzending der deeltjes nog onafhankelijkheid der gebeurtenissen ondersteld zal worden.

Om de correlatie der dichtheden in te voeren maak ik gebruik van de functie g, die door Dr. ZERNIKE en mij is gedefinieerd [2]).

Is δ_0 de dichtheidsafwijking in een punt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, dan geldt voor de dichtheidsafwijking δ in een punt x, y, z

---

1) We hebben $n_1 = \nu + \delta$, $\overline{n_1^2} = \nu^2 + 2\,\nu\,\overline{\delta} + \overline{\delta^2} = \nu^2 + \nu$.

$$\overline{n_1 n_2} = \overline{(\nu + \delta_1)\,(\nu + \delta_2)} = \nu^2 + \nu\,(\overline{\delta_1} + \overline{\delta_2}) + \overline{\delta_1\,\delta_2} = \nu^2.$$

2) Toevallige dichtheidsafwijkingen in het kritisch punt van een enkelvoudige stof. Deze verslagen XVII 1914. p. 582.

$$\overline{\delta} = g(x, y, z)\, \delta_0\, d v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waarbij $d v$ het volume-element is.

Verder is dan

$$\overline{\delta\, \delta_0} = g(x, y, z)\, \overline{\delta_0^2}\, dv = g(x\, y\, z)\, \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

waarin ϱ het aantal deeltjes per volume-eenheid is.

We hebben nu

$$\overline{{}_n\Delta_\varkappa} = n_1\, p_{1\varkappa} + \ldots n_\varkappa\, p_{k\varkappa} - n\, P.$$

Nu is $\overline{n_1} = v + \overline{\delta_1}\, d\, v_1$, voert men nu (8) in en beschouwt men $p_{\lambda\varkappa}$ als functie van $x\, y\, z$, overweegt men dat $\delta_0 = \dfrac{v - n_\varkappa}{dv}$ is, dan vindt men

$$\overline{\overline{{}_n\Delta_\varkappa}} = (v - n) \left\{ P + \int g_{\lambda\varkappa}\, p_{\lambda\varkappa}\, d\, v \right\} \quad .$$

De invloed van het tweede stuk kan bij sterke correlatie aanmerkelijk worden.

Ook bij het bepalen van $\overline{\overline{{}_n\Delta_\varkappa^2}}$, kan de correlatie in aanmerking genomen worden. Men krijgt dan in de eerste plaats de oude termen terug, doch bovendien levert (9) nog nieuwe stukken in $\overline{n_\lambda^2}$, $\overline{n_\lambda}$ en $\overline{n_\lambda\, n_\varkappa}$, $\overline{n_\lambda\, n_\mu}$. Deze termen zijn:

$$2\, v\, (v - n) \int p_{\lambda\varkappa}\, g_{\lambda\varkappa}\, d\, v$$

$$-\, (v - n) \int p_{\lambda\varkappa}^2\, g_{\lambda\varkappa}\, d\, v$$

$$-\, 2\, n\, P\, (v - n) \int p_{\lambda\varkappa}\, g_{\lambda\varkappa}\, d\, v$$

$$+\; 2\, v \int p_{\lambda\varkappa}\, p_{\mu\varkappa}\, g_{\lambda\mu}\, d\, v_\lambda\, d\, v_\mu .$$

Bepaalt men vervolgens $\overline{\Delta^2}$, dan blijft alleen de laatste term en een stuk van den voorlaatsten term over, zoodat we krijgen

$$\overline{\Delta^2} = 2\, v\, \Big(P + \int p_{\lambda\varkappa}\, p_{\mu\varkappa}\, g_{\lambda\mu}\, d\, v_\mu\, d\, v_\mu .$$

$$+ \int p_\varkappa\, g_{\lambda\varkappa}\, d\, v\Big).$$

Men kan deze beschouwingen, althans bij benadering, ook toepassen op de veranderingen die toevallige dichtheidsafwijkingen tengevolge van de diffusie ondergaan. Onze formules toonen dan dat dicht bij een kritisch punt tengevolge van de correlatie der dichtheidsafwijkingen deze niet alleen gemiddeld sterker zijn, doch ook sterker wisselen.

Utrecht, Maart 1917. *Instituut voor Theoretische Natuurkunde.*

Natuurkunde. — De Heer Kuenen doet een mededeeling namens Dr. S. W. Visser, getiteld: „*Over de Buiging van het Licht bij de Vorming van Halo's.*"

(Mede aangeboden door den Heer Kamerlingh Onnes.)

I. *Inleiding.*

Bij de halo's, die door breking ontstaan, worden dikwijls kleuren waargenomen. Het meest bekend zijn deze bij den circumzenithaalboog, de bijzonnen en de raakbogen, maar ook de groote kring van 46° is vaak gekleurd, en eindelijk treden duidelijke kleuren op bij den gewonen kring van 22°.

Met dezen laatsten kring zullen we ons in het onderstaande voornamelijk bezighouden. Volgens de gewone brekingstheorie, zooals die bijvoorbeeld in het bekende werk van Pernter [1]) wordt ontwikkeld, zou het rood aan de binnenzijde van den kring nog duidelijk zichtbaar moeten zijn, terwijl het groen en het blauw reeds zeer bleek zouden wezen. Nu leeren echter de waarnemingen, dat de kleuren dikwijls zoo goed als niet zichtbaar zijn, terwijl anderzijds de kleuren somtijds zeer helder optreden, en hetzelfde geldt voor de andere genoemde halo-verschijnselen. Deze sterke kleuren worden door Pernter voor de bijzonnen en de raakbogen verklaard door de aanwezigheid van een zeer groot aantal ijskristallen, waardoor de lichtsterkte vergroot en de kleur zichtbaar zou worden [2]). Maar als er alleen wit of ten naastebij wit is, dan kan er door meerdere lichtsterkte niets anders voor den dag komen dan méér wit: de kleurverdeeling kan door grootere lichtsterkte geen verandering ondergaan.

Hoe weinig de kleuren in de theorie passen, blijkt duidelijk uit een opmerking van Pernter zelf [3]):

„Ik vind overigens in de beschrijving van het verschijnsel, 4 September 1900 te Aken door Sieberg waargenomen, de volgende opgave van de kleuren van den kleinen kring: Daarbij was hij van binnen naar buiten duidelijk rood, geel, groen en blauw gekleurd. Daar deze waarneming alle andere zou tegenspreken, als ze betrekking had op den geheelen kring, neem ik aan, dat de kleuren daar gezien werden, waar de bijzonnen zich op den kring bevonden, bij welke deze kleuren ook door anderen werden waargenomen".

---

[1]) J. M. Pernter en F. M. Exner, Meteorologische Optik, Wien 1910, pag. 319.

[2]) Pernter. l.c. p. 318, 320, 321.

[3]) Pernter, l.c. p. 228.

Maar de kleuren van de bijzonnen zijn evenmin in overeenstemming met de theorie, en overigens is de waarneming van SIEBERG geenszins in tegenspraak met die van anderen. Dit alles zal straks nader worden aangetoond.

In het volgende wordt een poging gedaan, om door een wijziging van de theorie, waarbij de buiging van het licht in aanmerking wordt genomen, de waargenomen kleurverschijnselen te verklaren. Vooraf gaat een opgave van eenige waargenomen kleurverschijnselen, grootendeels ontleend aan de uitgave van het Koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut: Onweders, Optische Verschijnselen, enz. in Nederland naar vrijwillige waarnemingen 1901—1914. Dan volgt een beschouwing over de zuivere brekingstheorie voor ijskristallen met een brekenden hoek van 60°, om te geraken tot de kleuren, die bij den gewonen kring zouden kunnen optreden. Daarna zal een buigingstheorie worden opgesteld, en zullen ten slotte voor een bijzonder goed ontwikkelden halo van 22° de kleuren worden berekend, die goed met de waarnemingen zullen blijken overeen te stemmen.

II. *Overzicht van eenige bij halo's waargenomen kleuren.*

Ik beperk me tot die opgaven, waarbij kleuren genoemd worden. Lyrische ontboezemingen als „schitterend-, zeer intensief-, fel-, prachtig gekleurd", vooral bij de bijzonnen menigvuldig, zijn niet te gebruiken. In de veertien jaargangen „Onweders", die ik nakeek, worden van slechts vijf bijzonnen de kleuren genoemd!

Over den circumzenithaalboog zegt BESSON het volgende [1]):

Les couleurs sont souvent remarquablement pures: on distingue en bas le rouge, puis le jaune en passant par l'orangé, puis le vert, puis mais pas toujours le bleu et le violet. Cette dernière couleur est fréquemment absente, mais il n'est pas rare, qu'elle soit visible très nettement. Fait important à noter: le violet, quand il existe, est très pur, il n'est pas surmonté ou mêlé de blanc, comme dans les arcs tangents au halo de 22°. La coloration offre une intensité des plus variables: faible parfois au point d'être à peine perceptible, elle est d'autres fois aussi éclatante que celle du plus bel arc-en-ciel.

Deze opgaven, hoe onvolledig ook, zijn voldoende, om de groote kleurverschillen in de halo-verschijnselen aan te toonen. Belangrijk zijn vooral in dit opzicht die gevallen, waarin verschillende waarnemers dezelfde kleuren vermelden.

---

[1]) L. BESSON, Sur la Théorie des Halo's, Paris 1909, p. 53.

CZB = circumzenithaalboog ; BRB = bovenraakboog ; O.H. = omgeschreven halo ; Kr. 22° = kring van 22° ; Kr. 46° = kring van 46° ; B = bijzon (bijmaan).

	Datum	Kleuren	Begeleidende Halo's	Plaats	Citaat
	a. Kring van 22°.				
1	1903, Apr. 17	sterk gekleurd	CZB bruin, blauw; BRB ; B	Vrijenban	Onw.
2	Sep. 23	bruinrood, violet		Zoutkamp	"
3	1904, Apr. 2	goudbruin, geel, groen, violet	BRB, ongekleurd; B, gekleurd	Nijmegen	"
4	Aug. 14	zwak oranje	zijdelingsche raakbogen, ongekleurd	Valkenburg	"
5	1905, Mrt 28	rood overwegend	BRB, rood overwegend ; Kr 46°, groen overwegend	Zutfen	"
6a	Oct. 7	geel, violet	Kr 46°, rood, groen	Zutfen	"
b	"	rood, geel, groen, violet	B ; zwakke BRB	Nijmegen	"
7	1906, Feb. 12	rood overwegend	BRB, zeer levendig gekleurd; Kr 46°, alle kleuren	Zutfen	"
8	1914, Apr. 11	oranje, donkergroen, wit (maan)	B, zwak, wit	Renesse	"
9a	1886, Mei 3	zeer schitterend, regenboogtinten, behalve groen	RB, zelfde kleuren, zwakker	Boulogne s. Seine	La Nature 14, p. 379, 1886
b	"	sterk gekleurd	O.H; Kr 46°, rood, blauw, zwak	Angers	"
c	"	rood, geel, groen, blauw, violet, binnen in violet	O.H. in zelfde kleuren	Argentan	"
10a	1887, Jan. 28	rood, oranje, geel, groen, blauw, indigo, violet	Kr 46°, CZB, BRB	Pithiviers	La Nature 15, p. 161, 1887
b	"	prachtige regenboog	B ; dubbele benedenraakboog	Souppes	"
c	"	prismakleuren	Kr 46°, prismakleuren; B, levendig rose ; CZB	Fontainebleau	"
d	"	spectrumkleuren	BRB ; B	Orleans	"
	b. Bijzonnen aan den kring van 22°.				
11	1901, Jan. 29	rood, oranje, geel-wit	twee boven elkaar	Zutfen	Onw.

	Datum	Kleuren	Begeleidende Halo's	Plaats	Citaat
12	1904, Sep. 28	wit	Kr 22° bruinrood; Kr 46° rood, blauw	Zoutkamp	Onw.
13	1905, Sep. 19	ongekleurd	BRB rood, geel blauw (breed), violet (smal)	Nijmegen	„
14	1910, Sep. 7	rood bijzonder helder, verdere kleuren zeer levendig, blauw en violet, mede te onderscheiden	Kr 22°; CZB; boog van LOWITZ	Zutfen	„
15	1911, Nov. 3	rood oranje, lichtgroen	Kr 22°, Kr 46°; BRB en CZB in zelfde kleuren	Renesse	„
	Zie ook 10c.				
	c. Bovenraakboog.				
16	1903, Mei 5	rood tot violet	Kr 22°; O.H.	Zutfen	„
17a	1904, Apr. 26	goudbruin, groen, blauw	B; Kr 22°; Kr 46°	Vrijenban	„
b	„	bruinrood, geel, groen, violet		Delft	„
18	Oct. 6	rood, groen, een weinig blauw		Zutfen	„
19	1905, Nov. 2	goudbruin, helwit, blauw	Kr 22°; Kr 46°; B	Vrijenban, Delft	„
20	1907, Oct. 3	rood, violet	Kr46° rood, groen; Kr 22; B zwak; CZB	Verschillenden	„
21	1910, Jan. 30	roodoranje, lichtgroen	Kr 22°; Kr 46°	Renesse	„
22	Feb. 8	rood tot violet	Kr 46° bleekrood	Groningen	„
23	Mei 18	bruinrood, violet (maan)	Kr 22°, krans	Zutfen	„
	Zie ook N⁰. 3, 5, 7, 9, 13, 15, 25.				
	d. Benedenraakboog.				
24	1904, Mei 21	rood-oranje, geel, groen, blauw, violet	Kr 22°; parhel. ring	Zoutkamp	„
25	1909, Apr. 22	geel overwegend	BRB zeer levendig gekleurd; Kr 22°	Zutfen	„
	e. Kring van 46°.				
26	1901, Mrt 22	rood, geel, groen		Munnikeburen	„

	Datum	Kleuren	Begeleidende Halo's	Plaats	Citaat
27	1906, Oct. 8	opvallend levendig gekleurd	Kr 22°	Zutfen	Onw.
28	1911, Mrt 8	flauw rood	Kr 22°	Renesse	„
29	Oct. 1	rood		de Bilt	„
30	1914, Dec. 29	rood	CZB rood, blauw; B; zuil	de Bilt	„
31	1890, Mrt 3	alle kleuren v. d. regenboog	Kr 22°; B; CZB regenboogkl.	Parc Saint Maur	La Nature, 18, p. 238, 1890
	Zie ook: N°. 5, 6a, 7, 9b, 12, 20, 22.				
	f. Circumzenithaalboog.				
32	1911, Oct. 1	alle kleuren tot violet	BRB	Zutfen	Onw.
33	Nov. 15	rood, geel, groen	Kr 22°	Munnikeburen	„
	Zie ook: 1, 15, 30, 31.				

III. *De Breking van het Licht in IJskristallen met een brekenden hoek van* 60°.

We kunnen ons beperken tot het verschijnsel in één vlak door oog en zon gebracht. Door wenteling van dit vlak om de lijn oog-zon ontstaat dan het cirkelvormige brekingsverschijnsel. Ook is het geoorloofd uitsluitend die kristallen te beschouwen, waarvan de brekende ribben loodrecht op het gekozen vlak staan, omdat toch de kleuren alleen kunnen optreden aan de binnenzijde van de halo, waar voornamelijk het loodrecht op de as der kristallen doorvallende licht medewerkt tot de vorming van een kring.

Om de kleur te leeren kennen, die in een zekere richting gezien zal worden, is het noodig, de lichtsterkten van verschillende spectrumkleuren in deze richting te bepalen: hieruit kan de gevraagde kleur berekend worden.

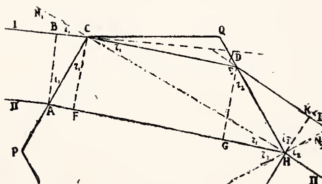


Fig. 1.

Bij een invalshoek i_1 wordt in het zeszijdige prisma $PCQH$ (fig. 1; geteekend zijn alleen de voor afleiding noodige zijvlakken) de doorvallende bundel begrensd door de stralen I en II. In de richting van een bepaalden afwijkingshoek D loopen twee bundels met breed-

ten AB en HK. De som der lichtsterkten dezer uittredende bundels bepaalt de lichtsterkte in hun richting. Deze twee lichtsterkten kunnen worden vervangen door die der intredende bundels HK en AB. Wel gaat er door terugkaatsing licht verloren, maar men zal niet ver van de waarheid af zijn, als men aanneemt, dat — althans aan de binnenzijde — alle kleuren bij benadering in gelijke verhouding door de terugkaatsingen worden verzwakt. Op de waar te nemen kleur zijn deze verliezen zonder invloed. Alleen de totale lichtsterkte wordt verminderd. De intensiteiten nu van de invallende bundels mogen evenredig worden gesteld met hun breedten, en, omdat het tenslotte neerkomt op de verhouding, mag de lichtsterkte gelijkgesteld worden aan de som der breedten $AB + HK$ zelve.

Stel de breedte van de zijde van het prisma a, de invals- en de brekingshoeken i_1, r_1 en i_2, r_2 (zie fig.), dan is

$$AB + HK = \left(\frac{\cos i_1}{\cos r_1} + \frac{\cos i_2}{\cos r_2}\right) \sin r_1 \,.\, a \sqrt{3}.$$

$$\left[HK = EH \cos i_2 = EG \frac{\cos i_2}{\cos r_2} = CF \frac{\cos i_2}{\cos r_2} = CH \sin r_1 \frac{\cos i_2}{\cos r_2} = \right.$$

$$\left. = \sin r_1 \frac{\cos i_2}{\cos r_2} . a\sqrt{3};\ AB = AC \cos i_1 = CH\, tg\, r_1 \cos i_1 = \sin r_1 \frac{\cos i_1}{\cos r_1} . a \sqrt{3} \right].$$

Voor een bepaalde waarde van a mag nu ook de lichtsterkte L onder weglating van een constanten factor gelijk gesteld worden aan:

$$L = \left(\frac{\cos i_1}{\cos r_1} + \frac{\cos i_2}{\cos r_2}\right) \sin r_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)^{1}).$$

Deze functie is voor alle waarden van i en n te berekenen. Zoeken we voor een bepaalde i_1 de afwijking D, dan vinden we de lichtsterkte voor de richting, die door D bepaald is, door die waarde van i_1 en de daarbij behoorende waarden van r_1, i_2 en r_2 in (1) te substitueeren.

De noodige brekingsaanwijzers n voor ijs heb ik door grafische interpolatie afgeleid uit bepalingen van PULFRICH [2]) (met een kleine extrapolatie, gebruik makende van een opmerking van PULFRICH, dat de dispersie van ijs gelijk is aan die van water), waarbij ik voor n heb genomen het gemiddelde van de waarden voor de gewone en de buitengewone breking (voor het geheele spectrum bedraagt het verschil in kleinste afwijking tusschen beiden 6′).

---

[1]) Voor invalshoeken, grooter dan die van symmetrischen doorval, verwisselen de indices 1 en 2.

[2]) C. PULFRICH, Wied. Ann. 34, p. 336, 1888.

De voor mijn doel noodige waarden zijn de volgende (P duidt op een meting van PULFRICH; D_0 kleinste afwijkingshoek)

	λ	n	D_0		λ	n	D_0
B	0.687	1.3071(P)	21°37′	x	0.494	1.3136	22°7′
C	0.656	1.3079(P)	21°41′	F	0.486	1.3140(P)	22°8′
D	0.589	1.3098(P)	21°50′	y	0.449	1.3157	22°16′
E	0.527	1.3121(P)	22°0′	G	0.431	1.3168	22°21′

x en y zijn twee golflengten, die voor het onder volgende kleurenonderzoek van belang zijn.

Voor deze acht golflengten heb ik voor invalshoeken tusschen ongeveer 41° (passende bij de kleinste afwijking, verschillend voor de verschillende kleuren) en 62° de functie (1) berekend. Hierbij behooren de afwijkingen tot 25° toe. Grootere invalshoeken bleken niet noodig te zijn; trouwens, de terugkaatsing begint denkelijk al gauw een onzekeren invloed uit te oefenen.

De uitkomsten zijn in de volgende tabel vereenigd. Vóór de F-kromme, die uiterst weinig van de x-kromme afwijkt, heb ik geen afzonderlijke berekening uitgevoerd. Fig. 2 geeft het verloop van de lichtsterkte met de afwijking.

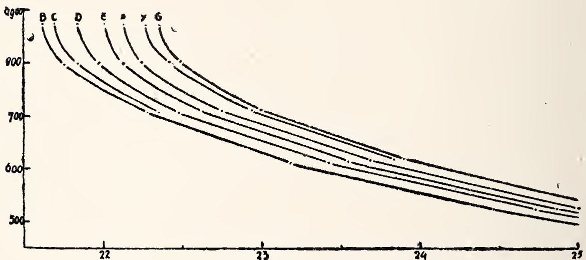


Fig. 2.

Deze uitkomsten heb ik grafisch voorgesteld, om daaruit de lichtsterkte te bepalen in richtingen, verkregen door van 21°30′ af met 15′ op te klimmen. Noodzakelijk is het hierbij, de uitgebreidheid van de zon in rekening te brengen. Ik heb dezelfde benadering toegepast als PERNTER voor den regenboog, wiens geheele methode van kleurberekening ik trouwens heb gevolgd[1]): de grafische voor-

[1]) PERNTER, l.c. pag. 529 e.v.

i	B		C		D		E		$x(F)$		y		G	
	L	D	L	D	L	D	L	D	L	D	L	D	L	D
ongev. 41°	0.875	21°37′	0.874	21°41′	0.873	21°50′	0.872	22° 0′	0.871	22° 7′	0.870	22°16′	0.870	22°21′
45° 0′	798	45	798	50	799	58	800	7	800	15	801	25	801	29
50 0	704	22 17	705	22 21	705	22 29	706	38	707	45	708	56	708	23 0
55 0	608	23 11	609	23 17	610	23 26	611	23 33	612	23 41	614	23 50	615	54
60 0	521	24 28	522	24 33	522	24 44	522	24 52	523	25 0	523	25 8	524	25 13
62 0	483	25 9	483	25 14	485	25 22								

stelling wordt met drie stappen van 5′ naar links en naar rechts verschoven en afgelezen. De zoo verkregen zeven getallen komen overeen met zeven punten van de zon met 5′ tusschenruimte en worden samengeteld. In de praktijk komt het hierop neer: de grafische voorstelling van 5′ tot 5′ af te lezen en telkens zeven aflezingen te vereenigen: de som stelt de lichtsterkte in het middelste punt voor.

De zoo verkregen sommen worden nu herleid tot de intensiteiten, waarmede de betrokken acht kleuren in het zonlicht voorkomen, door ieder met een bepaalden coëfficient te vermenigvuldigen.

De berekening van den kleurindruk volgens de methode van PERNTER, welke berust op de kleurenvergelijkingen van MAXWELL, geschiedt door de gevonden lichtsterkte voor ieder der acht kleuren te verdeelen over de grondkleuren rood, groen en violet (0.630 μ, 0.528 μ en 0.457 μ); hieruit worden dan de kleurenvergelijkingen afgeleid, die de kleuren zullen moeten opleveren, ieder met het percentage aan wit, waarmede ze gemengd zijn.

De gebruikte coëfficienten van PERNTER zijn de volgende:

	Z	R	G	V
B	23	1.000	0.000	0.000
C	94	0.904	0.011	0.085
D	262	0.557	0.446	—0.003
E	153	—0.006	0.993	0.013
x	118	—0.068	0.602	0.466
F	130	—0.061	0.346	0.715
y	152	0.020	0.007	0.973
G	68	0.000	—0.059	1.059
W		240	383	377

De kolom Z geeft de verhoudingsgetallen voor het zonlicht, R, G en V die voor de grondkleuren. De onderste rij geeft de verdeeling der grondkleuren in wit (W) aan.

De volgende tabel geeft de berekende kleursterkte voor eenige richtingen.

	B	C	D	E	x	F	y	G
21°30′	37.4	78	0	0	0	0	0	0
22°0′	121	505	1244	496	192	213	0	0
22°30′	110	454	1296	782	618	684	707	264
23°0′	101	418	1195	715	564	623	748	339
24°0′	89	367	1046	620	489	540	642	290
25°0′	79	327	928	551	433	479	567	257

De getallen voor F zijn verkregen uit die voor x door een verschuiving van 1′ (het verschil in beider kleinste afwijking.)

De ten slotte verkregen uitkomsten zijn de volgende:

D	L	W %	K %	G	Kleur
21°30′	12	1.7	98.3	29.5	rood (zwak)
21°45′	116	5.5	94.5	3.7	oranje
22°0′	279	29	71	4.7	geel
15′	424	69	31	5.9	groengeel
30′	491	96	4	8.4	groen } wit
45′	491	96	4	17.0	blauw } wit
23°0′	471	96	4	16.9	" } wit
30′	437	96	4	16.9	" } wit
24°0′	408	97	3	16.8	" } wit
25°0′	362	98	2	16.8	" } wit

In deze tabel hebben de letters de volgende beteekenis:

D afwijkingshoek; L lichtsterkte; W % en K % percentage aan wit en aan kleur; G het kleurgetal in den kleurendriehoek van Pernter (Maxwell), de laatste kolom geeft de hierbij behoorende kleur.

Fig. 3 geeft het verloop van L met D weer. Hieruit blijkt, dat de brekingstheorie een maximum oplevert op een afstand van ruim 22°30′. De waarnemingen leeren, dat dit maximum dichter bij de

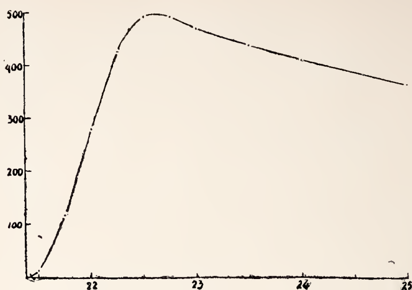


Fig. 3.

zon ligt. PERNTER[1]), het gemiddelde nemende van een groot aantal betrouwbare metingen, vindt 21°50′. Dit verschil van meer dan $^1/_2$° is veel te groot. Maar bovendien leert ons de Brekingstheorie, dat de binnenzijde van den kring rood-oranje, geel, groengeel zou moeten zijn en tevens, dat blauw zoo goed als niet en violet geheel niet kunnen voorkomen. Geen vergrooting van de lichtsterkte kan de zaak beter maken; het wit blijft altijd 24 maal intenser dan het blauw. Gerichte kristallen zijn geenszins in staat kleuren op te leveren, die er niet zijn. De gekleurde bijzonnen en raakbogen worden niet verklaard. Opmerking verdient nog, dat volgens de hier ten grondslag gelegde brekingstheorie de grootte der kristallen, die door a bepaald wordt, evenmin op den aard van het kleurverschijnsel invloed kan uitoefenen, daar de breedte der bundels voor alle kleuren in dezelfde verhouding met a verandert, en het licht evenwijdig is.

De conclusie is eenvoudig: De brekingstheorie is niet in staat, om de haloverschijnselen volledig te verklaren.

Voor kristallen met een brekenden hoek van 90° heb ik de berekening niet uitgevoerd, maar het feit, dat de minima hier verder uiteenliggen[2]), kan evenmin voldoende zijn, om de aanwezigheid van verschillend gekleurde kringen van 46° duidelijk te maken.

[1]) PERNTER, l.c. 230. PERNTER geeft geen afdoend bewijs voor de vorming van een kring op 21°50′. Hij toont feitelijk alleen aan, dat het gele licht een kleinste afwijking van die grootte heeft (pag. 313). De maximumlichtsterkte ligt verder: ongeveer op 22°21′ (min. dev. violet) + 16′ (zonstraal) = 22°37′. daar waar alle kleuren van het volledige spectrum zich ontwikkeld hebben, in overeenstemming met wat de bovenstaande uitvoerige berekening oplevert. De lichte kring zal tegen den donkeren achtergrond voor het oog nauwer schijnen. Het verschil tusschen waarneming en berekening wordt hierdoor kleiner, maar het is twijfelachtig, of deze werking het verschil geheel zou kunnen opheffen.

[2]) PERNTER, l.c. p. 354, 357.

IV. De Buigingstheorie.

We kunnen ons weer beperken tot het verschijnsel, zooals het zich in één vlak zon-kristal-oog voordoet, wanneer de brekende ribbe loodrecht staat op dit vlak. We zullen ons verder bepalen tot het bijzondere geval van even groote kristallen, dat als een voor kleurontwikkeling gunstig grensgeval moet worden beschouwd.

Bij de breking treedt een bundel van bepaalde breedte uit het kristal, zooals we gezien hebben. Maar deze bundel wordt begeleid door buigingsverschijnselen. Zeer vele, even groote, onregelmatig verspreide kristallen met evenwijdige brekende ribben leveren dergelijke lichtbundels, die interferentie-strepen doen ontstaan; we zien de lichtbron door een zeer groot aantal onregelmatig verspreide, rechthoekige openingen: spleten. Er worden buigingslijnen gevormd evenwijdig aan de brekende ribben der kristallen. Bij wenteling van het aangenomen vlak om de lijn oog-zon ontstaan dan buigingskringen om de zon.

De plaatsen der buigingsminima zijn gegeven door de vergelijking

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{a},$$

waarin θ de buigingshoek voor het minimum, m het ranggetal, λ de golflengte en a de wijdte der spleet.

Het eerste maximum vormt zich voor iedere kleur in het minimum van deviatie. Daarbuiten vertegenwoordigt iedere richting een maximum voor iedere kleur, aan beide zijden door buigingslijnen begeleid. De som-kleur kan daar dan niets anders zijn dan wit, en de eenige kleuren, die gezien kunnen worden, zullen te vinden zijn aan den binnenkant.

In iedere richting werken twee bundels AB en HK (fig. 1) van verschillende wijdte samen. Bedenken we, dat deze bundels hoe langer hoe meer aan elkaar gelijk worden, hoe dichter ze bij den hoek van kleinste afwijking gelegen zijn en dat de afwijking der stralen daar maar langzaam verandert met den invalshoek, dan volgt daaruit, dat de buigingslijnen in de buurt van de kleinste afwijking elkaar nagenoeg bedekken, en dat dan de kleuren daar sterker moeten spreken dan elders. Om het effect hiervan duidelijk te maken, heb ik de relatieve breedten der spleten AB en HK (form. 1) aan weerszijden van de kleinste afwijking voor invalshoeken tusschen 37° en 50° berekend voor $n = 1{,}310$ (geel), verder bij die hoeken de afwijking, die de plaats van het centrale maximum aangeeft, ten slotte de plaats van het eerste buigingsminimum aan weerszijden van het centrale maximum, daarbij aannemende, dat voor

de kleinste afwijking de afstand van maximum tot minimum 100′ is (een waarde, ongeveer gelijk aan die, welke gevonden is in de later te bespreken toepassing, en beantwoordende aan een absolute spleetwijdte a van 20,24 μ.)

i_1	i_2	a_1	a_2	max.—min.		D
				a_1	a_2	
40°55′	40°55′	0.4363	0.4363	100′	100′	21°50′
42 0	39 51	4228	4306	103	101	51
43 0	38 53	4104	4250	106	103	53
44 0	37 55	3980	4190	110	104	55
45 0	36 59	3856	4130	113	106	59
46 0	36 3	3734		117		22 3
47 0	35 8	3612		121		8
48 0	34 14	3490		125		14
49 0	33 22	3370		130		22
50 0	32 30	3250		134		30

De plaatsen, voor maxima en minima voor de D-lijn hieruit afgeleid zijn de volgende:

i	1e min.	1e max.	1e min.	i	1e min.	1e max.	1e min.
36°59′	20°13′	21°59′	23°43′	44°0′	20°5′	21°55′	23°44′
37 55	11	55	39	45 0	5	59	
38 53	9 50″	53	35	46 0	6	22 3	
39 51	9 38	51	32	47 0	8	8	
40 55	10 22	50	30	48 0	9	14	
42 0	8	51	34	49 0	12	22	
43 0	6	53	39	50 0	16	30	

Het eigenaardige verloop van het binnenminimum is het gevolg van de samenwerking van de verandering der kleinste afwijking en die van den buigingshoek van het minimum.

Hieruit blijkt, dat voor invalshoeken tussschen 39° en 48° de binnenminima niet meer dan 5′ van de kleinste waarde afwijken, dat dit ook het geval is voor de buitenminina tusschen 39° en 42°,

en voor het centrale maximum van 38° tot 44°. Wat voor het geel geldt, geldt voor de andere kleuren evenzeer.

Door het op elkaar vallen van deze maxima en minima zal de ontwikkeling van kleur zeer bevorderd worden op een wijze, zooals dat bij de gewone brekingstheorie onmogelijk is en door de aanwezigheid der buigingsminima wordt de kleurresultante ten eenen male gewijzigd. Dit geldt vooral voor het eerste minimum aan weerszijden van het centrale maximum. De theorie doet in het algemeen de mogelijkheid voorzien van de vorming van buigingskringen aan weerszijden van het centrale maximum; maar het laat zich zonder meer verwachten, dat deze kringen meer kans hebben, om zichtbaar te worden aan de lichtvrije binnenzijde van den halo dan aan de buitenzijde, die met niet-minimaal licht overdekt is.

De resulteerende kleuren en de lichtsterkte in iedere richting zullen weder gevonden moeten worden, door een dergelijke berekening, als boven bij de brekingstheorie werd toegepast.

Zooals de grondformule der buiging doet zien, hangt deze af van de spleetwijdte a, dus van de grootte der kristallen. Men zou voor allerlei willekeurig gekozen waarden van a het kleurverschijnsel kunnen berekenen, en zoo beproeven, de verschillende waarnemingen te reproduceeren. Wij zullen ons echter tot een bijzonder geval beperken, waar de waarnemingen zelve een aanwijzing geven omtrent de grootte der werkzame kristallen.

V. *De Halo's van* 19 *Mei* 1899 *en* 19 *September* 1905.

Door Hissink te Zutfen werden twee maal zeer merkwaardige halo's waargenomen, die in „Onweders enz." op de volgende wijze beschreven worden.

19 Mei 1899. „Om 10.10 v.m. werden de kleine kring en de volledige omgeschreven halo zichtbaar. Daarna verhinderde de bewolking gedurende eenigen tijd de waarneming, maar toen het opklaarde, verscheen de kring wederom volledig. Om 11.52 v.m. werd een eveneens cirkelvormige boog b hoofdzakelijk binnen de bovenste helft van den kring, en om 12.15 n.m. een tweede daarbinnen gelegen boog c waargenomen, terwijl zich om 12.2 n.m. een nog dichter bij de zon gelegen kring d vertoonde. De beide bogen b en c waren rood aan de zonzijde en vertoonden daaromheen een groen-geelachtige kleuring, omringd door violet. Van den kleinen kring d was de buitenrand evenals de bogen gekleurd, ook het rood aan de zijde der zon, maar de ruimte binnen den cirkel was donkerblauw met een vaalbruine tint".

Door schatting bepaalde Hissink (den gewonen kring op 22° stellende) hun stralen: $d = 7°,5$; $c = 17°,5$; $b = 19°,5$.

19 Sep. 1905. „Zeer zeldzaam was de halo, welke op dezen dag te Zutfen werd waargenomen. Zichtbaar werden *a* de groote kring, *b* de bovenraakboog, *c* de kleine kring, *d* een kring met een straal van ± 19°30′, *e* een kring met een straal van ± 18° en *f* de linkerbijzon.

Wat de kleur der onderdeelen betreft, valt voornamelijk te vermelden, dat de groote kring betrekkelijk helder was gekleurd, en het violet van den raakboog bij het raakpunt bijzonder opviel.

Het merkwaardigst zijn de bogen *d* en *e*, waarvan de heer Hissink de stralen bepaalde door met den octant dien van den kleinen kring te meten, hetgeen 22° opleverde, en daarna den afstand tusschen dezen en de bogen *d* en *e*. Hiervoor werd gevonden 2°32 en 4°2′, wat voor de stralen dezer bogen 19°28′ en 17°58′ zou geven. Directe meting van de stralen dezer bogen gaf resp. 19°32′ en 18°2′. Het gemiddelde 19°30′ en 18°0′ heeft dus een vrij groote zekerheid".

Dergelijke kringen zijn meer waargenomen. Burney zag 9 Juni 1831 een kring met een straal van 20° [1]). Hissink zelf zag er een met een straal geschat op 19° op 5 Sept. 1899. Volgens de gewone theorie worden al dergelijke kringen verklaard met behulp van bijzonder gevormde kristallen met brekende hoeken, die op den vereischten afstand een kring leveren. De volgende kristalvlakken komen voor Hissink's ringen in aanmerking [2]):

Brekende hoek		D_0(geel)
50°28′	2 pyramidevlakken aan 't zelfde einde van het kristal.	17°26′
53°50′	2 pyramidevlakken aan tegenoverliggende uiteinden van het kristal.	18°56′
54°44′	een basisvlak met een pyramidevlak van het andere uiteinde, of een prismavlak met een juist daartegenoverliggend pyramidevlak.	19°20′

De afstand der ringen wordt dan voor geel 2°30′, 2°54′ en 4°24′. De eerste stemt volkomen overeen met de metingen van Hissink, de laatste is te groot. De kleuren leveren moeilijkheden op, die hiermede niet zijn opgelost.

Uitgaande van de meening, dat de door Hissink beschreven kringen van 18° en 19°30′ niets anders zijn dan secundaire buigings-

[1]) Pernter, l. c. pag. 266.

[2]) Onweders enz. 26, pag. 83, 1905.

kringen, heb ik de kleurenberekening uitgevoerd op de volgende wijze.

Pernter geeft de plaatsen van maxima en minima en hun intensiteiten voor de buiging door spleetvormige openingen [1]).

		plaats	lichtsterkte
1e maximum		0.0000	1.000000
	1e minimum	1	0
2e maximum		1.4303	0.047191
	2e minimum	2	0
3e maximum		2.4590	0.016480.

Toegepast op Hissink's metingen in 1905

$$a = 21°50' \qquad b = 19°30' \qquad c = 18°0'$$
$$a - b = 2°20' \qquad a - c = 3°50'$$

volgt voor den buigingshoek θ van het eerste minimum:

berekend uit $a-b$ $\quad \frac{1}{1.43} \times 2.33 = 1.630° = 1°38'$

berekend uit $a-c$ $\quad \frac{1}{2.46} \times 3.83 = 1.557° = 1°34'$.

Het gemiddelde is 1°36′ met 2′ onzekerheid.

Deze overeenstemming schijnt mij een bevestiging van de gemaakte onderstelling omtrent het wezen dezer begeleidende kringen.

Aannemende, dat de maxima ontstaan onder invloed van het sterke gele licht, volgt hieruit de spleetwijdte a.

$$a = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{0.539}{\sin 1°36'} = 21{,}10\,\mu.$$

De zijde van het basisvlak wordt 0,0279 mM. een afmeting, die zeer wel mogelijk is [2]).

Met behulp van deze waarde van a kan nu het kleureffect als volgt worden afgeleid.

Voor de verkregen spleetwijdte wordt de functie $\frac{a \sin \theta}{\lambda}$ berekend met opklimming van 15′ voor de acht reeds vroeger gebruikte kleuren. De intensiteit als functie van $\frac{a \sin \theta}{\lambda}$ is door Schwerd berekend [3]) van $\frac{a \sin \theta}{\lambda} = 0$ tot $\frac{a \sin \theta}{\lambda} = 6$. Een grafische voorstelling verschaft deze lichtsterkten voor alle berekende waarden van de functie, welke waarden herleid worden tot de betrekkelijke kleursterkten in

1) Pernter, l. c. pag. 452.

2) Pernter l. c. pag. 287.

3) Pernter l. c. pag. 453.

het zonlicht. Deze worden nu voor de acht kleuren grafisch voorgesteld, waarbij als abscis wordt genomen de afstand tot de zon, waarop de buigingsstrepen zich vormen: het centrale maximum wordt dus geplaatst in het minimum van deviatie. Verder worden deze grafische voorstellingen bewerkt met het oog op de zonne-uitgebreidheid, zooals boven is aangegeven.

De uitkomsten zijn in de volgende tabel saamgevat.

	B	*C*	*D*	*E*	*x*	*F*	*y*	*G*
23° 0	17.84	77.5	224.2	169.7	171 4	191.3	302.1	160.4
22 45	41.10	179.0	561.7	408.2	377.7	422.8	605.9	308.2
30	71.90	315.5	990.8	691 0	606.9	680.6	887.4	422.7
15	105.3	457.0	1416	925.5	761.8	846.4	1003	435.4
0	135.3	573.0	1700	992.3	765.5	841.1	870.9	331.7
21 45	152.8	633.0	1743	926.7	617.3	665 5	575.9	212.6
30	154.2	614.0	1531	690.4	391 1	402.4	272.6	72.8
15	136.9	533.5	1140	407.9	181.3	174.7	74.60	15.31
0	109.6	349.0	700.5	167.9	52.4	46.5	16.62	10.43
20 45	72.95	248.5	329.7	41.18	10.53	13.10	30.13	17.64
30	42.65	124.0	103.9	9.92	20.57	25.78	41.67	16.23
15	19.40	44.50	20.88	26.97	33.30	37.13	29.87	7.19
0	5.56	9.15	30.88	44.16	29.25	29.33	10.92	2.27
19 45	0.91	6.35	67.90	38.71	14.14	12.32	4.94	3.95
30	2.33	17.60	79.71	19.27	4.21	3.70	11.11	6.39
15	5.19	27.10	61.30	5.68	5.05	6.62	14.79	5.16
0	7.09	27.40	28.85	4.56	10.17	12.26	10.34	2.01
18 45	6.64	19.30	8.20	11.37	10.83	11.97	3.82	0.93
30	4.28	9.10	6.60	15.51	7.60	6.37	2.46	2.36
15	1.97	2.45	17.35	12.36	2.91	2.00	5.67	3.44
0	0.56	1.85	26.32	5.71	1.85	2.51	6.40	2.50
17 45	0.42	4.90	25.50	1.72	4.13	5.48	4.83	0.99
30	1.23	8.80	15.98	1.76	6.03	6.42	1.71	0.44
15	2.14	9.75	6.01	3.03	5.28	4.34	1.75	1.06
0	2.25	6.95	1.35	8.40	2.60	1.54	3.65	1.87

De getallen in horizontale rijen samengesteld geven de betrekkelijke lichtsterkten voor de richtingen, in de eerste kolom aangegeven.

Fig. 4 geeft het verloop van de lichtsterkte.

Deze gegevens worden verder tot de kleurenvergelijkingen herleid, en hieruit worden ten slotte de kleurgetallen in den kleurendriehoek berekend en het percentage wit.

De uitkomsten zijn in de volgende tabel samengebracht, waarbij de letters dezelfde beteekenis hebben, als in de tabel bij de breking.

D	L	W %	K %	G	Kleur	Waarnemingen	
23° 0′	131	62	38	17.6	violet	violet	N
22 45	290	68	32	17.3	blauw—violet		
30	467	75	25	17.2	blauw	blauw	N
15	595	86	14	16.0	blauw		
0	621	62	38	4.3	geel		
21 45	553	77	23	5.1	geel	geel	N
30	414	56	44	4.7	geel		
15	266	22	78	4.7	geel		
0	150	17	83	2.8	rood		
20 45	76	30	70	2.1	rood	rood	N
30	38	54	46	29.3	rood		
15	22	83	17	26.3	purper	violet	Z
0	16.1	72	28	11.0	groenblauw		
19 45	14.9	45	55	6.7	groengeel	groengeel	Z
30	14.5	44	56	4.2	geel		
15	13.1	59	41	1.6	rood	rood	Z
0	10.3	73	27	29.9	rood	violet	Z
18 45	7.3	74	26	2.7	rood		
30	5.4	68	32	6.3	groengeel		
15	4.6	67	33	6.3	groengeel	groengeel	Z
0	4.8	62	38	5.2	geel		
17 45	4.8	68	32	2.8	rood		
30	4.2	64	36	2.8	rood	rood	Z
15	3.3	74	26	29.6	rood		
0	2.9	73	27	6.8	groengeel		

In de kolom „Waarnemingen" heeft Z betrekking op de kringen in 1899 te Zutfen door HISSINK waargenomen, N op de kleuren van een bovenraakboog te Nijmegen (N°. 13 van het Overzicht), op 19 September 1905, op denzelfden middag van HISSINK's tweede waarneming. De toepassing van de berekening op den bovenraakboog is geoorloofd, althans in de buurt van het raakpunt, omdat hier de lichtbreking op geheel dezelfde wijze plaats heeft als bij den gewonen kring; de kleuren mogen dus gerekend worden te behooren bij dien kring.

De overeenstemming met de kleuropgaven uit Nijmegen en Zutfen is bijna volkomen: alleen het tweede violet ontbreekt in de berekening.

De waarnemer te Nijmegen meldt: rood, geel, blauw (breed) violet (smal). Kleurberekeningen bij 22°10′ en 22°5′ leveren op groenblauw (kleurgetallen 13,1 en 13,2) zeer dicht bij het blauw. Het groen ontbreekt en het blauw heeft een breedte van 40′. Het violet is bij 23°0′ bijna uitgeput, en wordt niet veel breeder dan 15′. Deze kleurovereenstemming geeft een sterken steun aan de opgestelde buigingstheorie.

Een kring en een raakboog zonder groen worden ook gemeld uit Boulogne sur Seine (N°. $9a$).

Wat de overeenstemming met de kringen van HISSINK betreft: de door mij opgegeven kleuren zijn die van den 19en Mei 1899, en deze behoeven niet noodzakelijk gelijk te zijn aan die van 1905. Want dit is het karakteristieke van buigingskringen: hun afstand is veranderlijk, omdat deze afhangt van de afmetingen van het brekende kristal. Hieraan zijn misschien de overblijvende verschillen met de berekende uitkomsten toe te schrijven. Tusschengelegen berekeningen leverden op:

20°10′	G 13,2	groenblauw
20°5′	12,7	groenblauw
18°40′	4,2	geel
18°35′	5,7	geel

De lichtsterkten der maxima zijn klein en de maxima komen weinig uit. Ze zullen voornamelijk door de kleurverschillen zichtbaar moeten worden, en alleen bij zeer groote lichtsterkte van den hoofdkring.

Op een verzoek aan Prof. Dr. E. VAN EVERDINGEN om inlichtingen kreeg ik ten antwoord:

„dat bij de waarneming te Zutfen, zoowel in 1899 als 1905, de kleuren van den kleinen kring als *zeer levendig* werden beschreven,

evenals die van den omhullenden (omgeschreven) halo of bovenraakboog."

Dat de kringen van HISSINK als buigingskringen zijn op te vatten, is hiermede wel zeer waarschijnlijk gemaakt. Maar dan zijn ook andere dergelijke kringen buigingskringen (vgl. de twee opgaven op blz. 1342).

Het is niet onmogelijk, dat dergelijke buigingskringen ook buiten den kring voorkomen. PERNTER geeft twee waarnemingen [1]), maar deze zijn te onvolledig, om hierop een berekening te baseeren. Belangrijk is in dit opzicht de waarneming te Souppes (N°. 10 van het Overzicht): beschreven worden twee concentrische bogen, waarvan de wijdste de benedenraakboog is. De andere is, dunkt me, als een buitenste buigingsboog van dezen raakboog te beschouwen.

Wat eindelijk het hoofdmaximum betreft: bij dezen kring komt het te liggen op 22°0′ in overeenstemming met de waarnemingen, die 21°50′ als gemiddelde leveren.

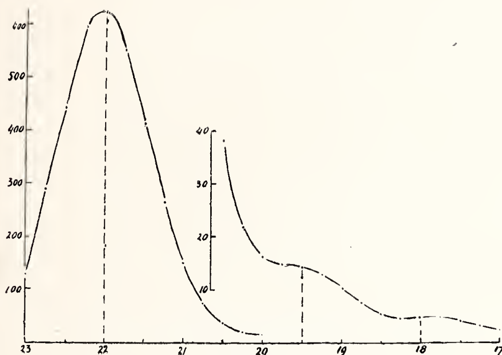


Fig. 4.

Het is zeer waarschijnlijk, dat door berekening van het kleurenbeeld voor andere waarden van de spleetwijdte a de overige waarnemingen eveneens kunnen worden weergegeven. In dit verband verdient opmerking het feit, dat in de verschillende opgaven sommige kleurcombinaties herhaaldelijk voorkomen en dus waarschijnlijk aan even groote kristallen zullen moeten worden toegeschreven. Hier volgen eenige voorbeelden:

---

[1]) PERNTER, l.c. p. 266. Halo van GRESHOW 20 Oct. 1747, straal 26°; en een waarneming van WHISTON, straal 29°.

„Regenboogkleuren":	Kring van 22°:	N°. 9 en 10
	Kring van 46°:	N°. 7 en 31
	Bijzon	N°. 14
Rood, geel, groen, violet:	Kring van 22°:	N°. 3 en 6
	Bovenraakboog	N°. 17*b*
Rood, violet:	Kring van 22°:	N°. 2
	Bovenraakboog	N°. 20 en 23
Rood, blauw:	Kring van 46°:	N°. 9*b*
	Circumzenithaalboog	N°. 1 en 30
Rood, groen:	Kring van 46°:	N°. 6*a* en 23
	Bovenraakboog	N°. 21

Het geval rood, geel, blauw, violet (Kring van 22°, N°. 9*a* en Bovenraakboog N°. 13) is boven behandeld.

Van de voor deze bevestiging zeer tijdroovende berekeningen is voorloopig afgezien, en we willen ons hier tot een aantal algemeene opmerkingen beperken.

1. In de kleuren hebben we een middel om, evenals bij den regenboog, de grootte der brekende deeltjes te bepalen. Om b.v. een goed ontwikkeld violet te kunnen zien, is het noodig, dat de grootste lichtsterkte van violet ongeveer samenvalt met de uitdooving van rood en groen. Een zeer ruwe benadering van de afmetingen in dit geval is de volgende.

Onderstellen we, dat de kleuren B, C, D en E alle hun eerste minimum hebben daar, waar het centrale maximum van G ligt. De daarbij behoorende buigingshoeken zijn dan de volgende (zie de tabel op pag. 1335).

$$B\ 44' \quad C\ 40' \quad D\ 31' \quad E\ 21'$$

en de hieruit afgeleide spleetwijdten

$$B\ 53{,}7\,\mu, \quad C\ 56{,}4\,\mu, \quad D\ 65{,}2\,\mu, \quad E\ 86{,}1\,\mu.$$

De gemiddelde spleetwijdte 65,4 μ mag worden aangenomen als de meest waarschijnlijke. Voor de breedte van het zijvlak wordt hieruit gevonden 0,075 m.M., voor de diagonaal van het grondvlak 0,15 m.M.

Zeer kleine kristallen zullen zeer breede maxima opleveren, ten opzichte waarvan 44′ — het verschil tusschen de maxima van rood en violet — als klein beschouwd mag worden, zoodat de maxima der verschillende kleuren elkaar zullen bedekken, en alleen wit zichtbaar zal worden met een rooden binnenrand.

2. Het is nuttig op de overeenkomst met den regenboog te wijzen. Groote droppels geven hier smalle buigingsmaxima en duidelijke kleuren, kleine droppels breede maxima, vervloeiende kleuren en

den zeldzamen witten regenboog. Ook bij den halo: hoe grooter ijskristallen, des te duidelijker sprekend spectrum. Evenwel zijn de „witte halo's" verreweg de meest gewone.

Toch bestaan er diepgaande verschillen tusschen regenboog en halo. Terwijl bij gene het golffront gebogen wordt, blijft het bij deze vlak. Terwijl bij den regenboog de maxima sterk, maar eenzijdig ontwikkeld zijn, waardoor de zeer veel voorkomende secundaire bogen aan den kant van het violet gevormd worden, zullen deze maxima bij den halo zwak zijn, en aan beide zijden van het maximum mogelijk zijn. Ze zullen de meeste kans hebben gezien te worden in het donkere gedeelte binnen het rood, maar in het wit aan de buitenzijde zich slechts uiterst zelden tot zichtbaarheid verheffen.

3. Van belang is de vorm van het kristal in verband met de halokleuren. Denken we ons een plaatje met breed zijvlak maar geringe hoogte. De breedte van het zijvlak bepaalt de spleetwijdte bij de vorming van den gewonen kring, de hoogte bepaalt de spleetwijdte voor den kring van 46°, omdat immers deze halo gevormd wordt door een brekenden hoek van 90°. Een dergelijk plaatje is uiterst geschikt voor de kleurvorming in den gewonen kring, maar zeer ongeschikt hiertoe in den grooten kring. Bij een zuiltje wordt de kleurvorming in den kring van 22° weer bepaald door de breedte van het zijvlak, maar voor den kring van 46° is nu de kleurbepalende grootheid de korte diagonaal in het grondvlak, die $\sqrt{3}$ maal of 1,7 maal zoo groot is als de breedte van het zijvlak. Een zuiltje is dus juist geschikter om kleur op te leveren in den kring van 46° dan in dien van 22°. Inderdaad vertoonen een aantal van de halo's in het Overzicht merkwaardige kleurverschillen in de twee kringen: de eerste soort 9*b*; de tweede soort 7, 12, 27, 31.

4. Een gewichtige gevolgtrekking lijkt me gewettigd, al heb ik deze niet tot in bijzonderheden nagegaan.

We hebben gevonden (pag. 1340), dat we in de buurt van de kleinste afwijking den invallenden bundel, of, wat op hetzelfde neerkomt het kristal, over een vrij grooten hoek mogen draaien, voordat dit invloed heeft op de buigingslijnen. Maar dan vervalt hiermee de moeielijkheid, die gelegen is in de noodzakelijke aanname van een standvastige, vertikale as bij de tot nu toe gehuldigde verklaring b.v. van den circumzenithaalboog [1]).

De „opmerkelijk zuivere kleuren", het „pure violet", waarvan

---

[1]) Zie o.a. L. Besson l.c.

Besson spreekt, zijn een gevolg van de buiging, maar niet van de standvastige richting der brekende ribbe.

5. We vonden ook (boven pag. 1340), dat in het buitenminimum slechts een geringe speling (3°) toe te laten was. Dit doet zich ook gelden in het volgende maximum: een reden te meer dus, om te verwachten, dat buigingskringen buiten den gewonen kring tot de grootste uitzonderingen zullen behooren.

6. Bij den grooten kring van 46° is het verschil in kleinste afwijking tusschen rood en violet 2°6′ [1]). Het spectrum wordt over een driemaal zoo grooten boog uitgespreid als bij den kring van 22°. Maar de spleet wordt smaller in de verhouding $\frac{\cos i_{46^0}}{\cos i_{22^0}} = \frac{\cos 67°51'}{\cos 40°55'} = \frac{1}{2}$.

Het kleureffect wordt dus vergroot in de verhouding $\frac{3}{2}$. Werkt een geschikte kristalvorm mede, dan kan dit nog 1,7 maal vergroot worden, en komen we tot $2\frac{1}{2}$ maal zoo gunstige voorwaarden, wat kleurvorming in den kring van 46° betreft.

Daarmede stemt overeen, dat bij dezen kring fraaie kleuren betrekkelijk dikwijls zijn gezien.

7. Bij de vorming van die halo's, waarbij het licht niet meer loodrecht op de brekende ribbe doorgaat, wat neerkomt op een verbreeding van den bundel, komt de buigingsfiguur overeen met die van een grooter kristal met lichtdoorval loodrecht op de brekende ribbe. De kans op kleur wordt vergroot.

Hiermede in overeenstemming vertoonen ook de raakbogen aan de kringen van 22° en van 46° (circumzenithaalboog) vrij vaak kleuren.

8. De buiging leert ons de grootte der kristallen en daarmede misschien iets over de temperatuur, waarbij ze zich gevormd hebben: „met dalende temperatuur neemt ook de grootte der kristallen af." [2]) Langs dien weg kunnen de tot nog toe zoo verwaarloosde halokleuren wellicht medewerken tot vermeerdering van onze kennis der hoogere luchtlagen.

VI. Conclusies.

Aan het einde van het onderzoek gekomen, meen ik, dat de volgende gevolgtrekkingen gerechtvaardigd zijn:

1. De eenvoudige brekingstheorie kan de haloverschijnselen niet volledig, met name wat de kleurenverscheidenheid betreft, beschrijven.

[1]) Pernter, l. c. p. 354.

[2]) Pernter, l.c. p. 289.

2. De buigingstheorie geeft een eenvoudige verklaring van de optredende kleuren en leert ons bijzonderheden betreffende den invloed van de grootte en den vorm der kristallen.

Zij alleen ook geeft den gewonen kring zijn juiste plaats op 22°.

3. De kringen, in de nabijheid van den kring van 22° waargenomen, zijn secundaire buigingskringen. Hun stralen zijn niet standvastig.

4. De buigingstheorie zal waarschijnlijk een beter inzicht kunnen verschaffen in de vorming van den circumzenithaalboog.

5. Nauwkeurige vermelding van de kleuren door iederen waarnemer is noodzakelijk, om de verdere toetsing der theorie mogelijk te maken, en den oorsprong van het waargenomen verschijnsel volledig af te leiden.

Wiskunde. — De Heer Brouwer biedt een mededeeling aan van den Heer H. B. A. Bockwinkel: *„Enige opmerkingen over de volledige transmutatie"*. (Zesde Mededeling).

(Mede aangeboden door den Heer H. A. Lorentz).

29. In de vorige mededeling hebben we gesproken over de rezultante T van twee volledige transmutaties T_1 en T_2. We hebben gezien dat deze insgelijks volledig is, iets kunnen vaststellen omtrent de afhankelikheid tussen gebieden die voor de bij T behorende reeks P met elkaar korresponderen, en eindelik bewezen dat de formule waarmee Bourlet die rezulterende reeks bepaalt, maar waarvan een geldigheidsgebied door hem niet wordt vastgesteld, inderdaad in een zeker sirkelvormig gebied van kracht is. We brengen in herinnering dat deze formule de zogenaamde operatieffunksie, die de rezulterende reeks P karakterizeert, uitdrukt in de operatieffunksies van de komponenten P_1 en P_2, en differentiaalquotienten daarvan. We hadden verder, bij de voorbeelden die we ter illustratie van het door ons opgestelde teorema van N°. 24 gaven, gelegenheid op te merken dat de metode met behulp van de formule van Bourlet, ter bepaling van de rezulterende reeks, in de praktijk vaak ingewikkelder is dan een meer rechtstreekse metode, waarbij men eerst de rezulterende funksies $\xi_m(x) = T_2 T_1 (x^m)$ bepaalt, en daaruit, met behulp van de simboliese formule (24)

$$a_m = (\xi - x)^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

de rezulterende koëffisienten $a^m(x)$. Bourlet heeft echter zijn formule met sukses bij kwesties van meer teoretiese aard kunnen gebruiken.

Intussen zijn we er door de genoemde voorbeelden toe gebracht,

ons de vraag te stellen, of 't niet mogelik zou zijn om, met behulp van de zo even genoemde, meer rechtstreekse metode, een *algemene* formule te vinden, waardoor de koëffisienten a_m van de rezulterende reeks P worden uitgedrukt in de koëffisienten λ_m en μ_m van de samenstellende reeksen. Het rezultaat is geweest een tamelik eenvoudige simboliese formule, waarmee we ook weer de volledigheid van P hebben kunnen aantonen, en met behulp waarvan we tot eenzelfde uitspraak omtrent korresponderende gebieden geraakt zijn, als in de vorige mededeling. Onderweg zijn we andere, eenvoudiger, simboliese formules tegengekomen, die we weer nodig hadden om verder te kunnen gaan, maar die ook op zichzelf interessant zijn. Eindelik was er gerede aanleiding, om aan het verkregen stel formules nog enige toe te voegen, die er een soort van afgesloten sisteem mee vormen. De ontwikkeling en bespreking van deze formules vormt het onderwerp van deze en een deel van de volgende mededeling.

30. In alle simboliese formules die we zullen behandelen moeten de gesloten uitdrukkingen, die er de rechterleden van uitmaken, naar machten van een of meer letters ontwikkeld worden, welke machten echter lettersimbolen zijn die niet op zichzelf betekenis hebben, maar dat krijgen zodra men de eksponenten door indeksen heeft vervangen. Daarbij zijn echter dikwels vooraf zekere herleidingen geoorloofd die ook zouden gelden, indien de bedoelde letters — al of niet tot bepaalde gebieden beperkte — *getallen* voorstelden. Zulke herleidingen zullen we *analitiese* herleidingen noemen. Een hoofdvoorwaarde om een uitdrukking met simboliese betekenis te kunnen herleiden, is daarbij dat *gelijke* simbolen die op verschillende plaatsen in die uitdrukking optreden, *identiese* betekenis hebben, evenals dit een grondvoorwaarde is wanneer de letters getallen voorstellen. Men heeft er zich in ieder spesiaal geval nauwkeurig rekenschap van te geven of aan die voorwaarde voldaan is.

Algemeen gesproken, is een analitiese herleiding met de simbolen geoorloofd, indien de remplaçant (eigenlike betekenis) van de uitkomst gelijk is aan de uitkomst van de remplaçanten (d.i. de uitkomst die men zou vinden, als men, vóór de bedoelde analitiese herleiding, de eigenlike betekenissen invoerde). We kunnen zo hebben een analitiese som van simbolen of een produkt. Bij de eerste zullen we herhaaldelik de regel hebben toe te passen dat in een som van simboliese machten van eenzelfde letter vóór de vervanging van eksponenten door indeksen, termen met gelijknamige machten van eenzelfde letter analities opgeteld mogen worden. Termen met een-

zelfde getal k als eksponent bij een letter a hebben nl., aangenomen dat aan de zo even genoemde hoofdvoorwaarde voldaan is, tot remplaçant termen met datzelfde getal k als indeks bij a, terwijl de koëffisienten van a^k in de simboliese termen stuk voor stuk gelijk zijn aan de koëffisienten van a_k in de korresponderende remplaçanten. De som van deze koëffisienten maal a^k is de analitiese som van de simbolen, en de som van diezelfde koëffisienten maal a_k is de som van de korresponderende eigenlike uitdrukkingen. De laatste som is dus inderdaad de remplaçant van de eerste.

Heeft men een produkt van simboliese machten van eenzelfde letter, dan is nauwkeurig vast te stellen, of men daarmee bedoelt het produkt van de eigenlike beteken̲issen of de eigenlike betekenis van het analities produkt, d.i. de enkele macht van diezelfde letter die men krijgt door de machten volgens de gewone regel met elkaar te vermenigvuldigen, en die tot eksponent heeft de som van de afzonderlike eksponenten. Want de remplaçant van het analities produkt van enige machten van eenzelfde letter is in 't algemeen niet gelijk aan het produkt van de remplaçanten van de faktoren.[1]) Wij zullen, waar het een produkt van machten van eenzelfde letter geldt, uitsluitend met het geval te doen krijgen dat dit altoos eerst tot een enkele macht van die letter herleid moet worden, en daarna de eksponent door een indeks vervangen. M.a.w. de *eigenlike* vormen zullen altoos *lineaire* funksies van indeksgrootheden met eenzelfde letter zijn.

Allereerst beginnen we met er opmerkzaam op te maken dat het funksionele teorema van MAC-LAURIN, behandeld in de 3e mededeling, aanleiding geeft tot een veralgemening van de simboliese formule (23)

$$\xi_m = T(x^m) = (x + a)^m , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

die de getransmuteerden ξ_m van de funksies x^m uitdrukt in de koëffisienten a_m van de reeks P die aan de normale transmutatie T beantwoordt. De formule (23) is geldig in ieder sirkelvormig gebied (α) waartoe alle funksies a_m en ξ_m behoren; dat er zodanige gebieden zijn, hebben we juist, in N°. 15, als een van de kenmerken beschouwd die een transmutatie normaal maken.

Is nu de reeks P tevens volledig in zo'n gebied (α), dan zegt het funksionele teorema van MAC-LAURIN dat men in dat gebied heeft

$$Tu = Pu = \sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{a_m \, u^{(m)}(x)}{m!},$$

voor funksies u die tot het met (α) korresponderende gebied (β) behoren.

[1]) Zie echter het voorbeeld in N°. 35.

Het rechterlid kan nu blijkbaar worden voorgesteld door het simbool $u(x+a)$, als we dit zó interpreteren: men vervange dat simbool door de machtreeks in de letter a die aan de funksie $u(x+a)$ beantwoordt, indien die letter een kompleks getal voorstelt. Deze machtreeks is uniek, aangezien x in het gebied (α) ligt, en u een funksie is die tot (β), dus zeker tot (α) behoort.[1] We krijgen dus de simboliese formule

$$T\,u(x) = u(x+a), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

geldig in (α), waarvan (23) een biezonder geval is.[2]

Ook voor de m^e afgeleide van Tu kunnen we een simboliese formule opschrijven. We hebben in de vierde mededeling gezien dat deze grootheid, die PINCHERLE *definieert* door formule (45), in het gebied (α) ook kan worden gevonden met behulp van formule (39):

$$T^{(m)}(u) = \sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{a_{m+k}\,u^{(k)}(x)}{k!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

natuurlik weer voor funksies u die tot (β) behoren. Hiervoor kan men simbolies schrijven

$$T^{(m)}(u) = a^m\,u(x+a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

van welke formule (67) het biezondere geval voor $m=0$ uitmaakt. Het is hier dat misschien aanleiding zou kunnen bestaan voor de fout, om in de faktor a^m de eksponent alvast maar door een indeks te vervangen, waarvoor men zich moet wachten; men moet de funksionele uitdrukking in het rechterlid *als geheel* naar machten

[1]) De unisiteitsoverweging kwam, wel beschouwd, al te pas, toen we, in de 3e mededeling, voor de formule

$$\xi_m = \sum_{0}^{m}{}_k\, m_k\, x^{m-k}\, a_k$$

de simboliese formule (23) in de plaats stelden; immers, als de ontwikkeling van $(x+a)^m$ in een machtreeks waar a niet uniek was, zou men er ekspres bij moeten zeggen dat juist de reeks $\sum_{0}^{m}{}_k\, m_k\, x^{m-k}\, a^k$ bedoeld wordt, en geen andere. Maar niemand denkt bij de ontwikkeling van een binomium meer aan unisiteit, en wij hebben dat, eerlik gezegd, ook niet gedaan, toen we de 3e mededeling redigeerden. Intussen leek het ons, in 't licht van deze *algemene* beschouwingen, waarin de unisiteit van de machtreeksontwikkeling van een funksie een *hoofdrol* speelt, van belang op het genoemde punt te wijzen.

[2]) Op te passen is dat in de eerste term van de ontwikkeling de faktor a^0 niet vergeten wordt, evenals dat gold voor (23), en m. m. in 't algemeen geldt van de simboliese machtreeksontwikkelingen, die wij zullen behandelen.

van a ontwikkelen en eerst daarna de eksponenten door indeksen vervangen.

We komen nu tot de simboliese voorstelling van het meer algemene funksionele teorema van TAYLOR, behandeld in de vierde mededeling. Passen we (67) toe op het produkt van de funksies v en u, beide behorende tot (β), dan komt er

$$T(v(x)u(x)) = v(x+a)\,u(x+a)\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

maar dit mag voorlopig niet anders worden opgevat dan dat men het rechterlid beschouwt als *geheel*, en het dus vervangt door de machtreeks in de letter a die aan de funksie $w(x+a) = v(x+a)u(x+a)$ beantwoordt, indien a een kompleks getal voorstelt. Deze machtreeks kan men *onder andere* ook krijgen, door de beide reeksen, die afzonderlik aan $v(x+a)$ en $u(x+a)$ beantwoorden, volgens de gebruikelike regel met elkaar te vermenigvuldigen (dus elke term van de ene reeks met elke term van de andere) en het komende aggregaat zo te groeperen dat termen met eenzelfde macht van a bijeenkomen. Neemt men nu echter in het genoemde aggregaat telkens samen alle termen die *dezelfde* van $u(x+a)$ afkomstige term

$$\frac{a^m u^{(m)}(x)}{m!}$$

bevatten, dan komt men tot de funksionele reeks van TAYLOR. Immers, de groep welke de hier neergeschreven term bevat, wordt simbolies voorgesteld door

$$\frac{a^m\, v\,(x+a)}{m!}\, u^{(m)}(x),$$

wat volgens (68) gelijk is aan

$$\frac{T^{(m)}(v)u^{(m)}(x)}{m!}$$

Maar dit is juist, indien we $v(x)$ als „beginpunt" en $u(x)$ als „aangroeiing" aannemen, de algemene term van de bedoelde reeks, waarvan we de geldigheid vroeger bewezen hebben. Dit bewijs[1]) komt natuurlik hierop neer dat we de aangegeven verandering in groepering van het bovengenoemde aggregaat als geoorloofd hebben aangewezen, door te doen zien dat het absoluut konvergent is. Het mag dus ook op willekeurige wijze gegroepeerd worden, zodat men de simboliese formule (69) aldus interpreteren kan: vervang beide funksies $v(x+a)$ en $u(x+a)$ door hun machtreeksen in a, vorm het

---

[1]) We willen hier de opmerking plaatsen dat het bedoelde bewijs eenvoudiger wordt, als men, evenals we in de vijfde mededeling gedaan hebben, van de majorantfunksies $\overline{a_m}$ van a_m gebruik maakt. Dan is echter ook nodig dat men vooraf de hulpstelling van No 23 bewezen heeft.

aggregaat dat ontstaat door de multiplikatoriese kombinatie van de reekstermen, en vervang daarin de eksponenten door indeksen. Groepeert men het zo verkregen aggregaat naar indeksen van a, dan krijgt men eenvoudig de funksionele reeks van MAC-LAURIN voor $Tw = T(vu)$; rangschikt men echter naar machten van Du, dan komt er de funksionele reeks van TAYLOR voor Tw op de plaats $w = v$; zou men echter rangschikken naar machten van Dv, dan kwam er de funksionele reeks van TAYLOR op de plaats $w = u$. De simboliese formule (69) bevat al deze gevallen in zich; alleen moeten we de opmerking maken dat, als we het rechterlid ontwikkelen naar machten van Du, de algemeene koëffisient in die ontwikkeling, die op de faktor $1 : m!$ na gelijk is aan

$$a^m \, v(x+a),$$

of ook gelijk aan $T^{(m)}(v)$, in *deze* vorm alleen betekenis heeft in gebieden (a) kleiner dan (r_1), als r_1 de a-waarde is waarmee als β-waarde de konvergentiestraal r van v korrespondeert; terwijl we in N°. 20 gezien hebben dat de andere vorm voor die koëffisienten, bepaald door (45), mogelikerwijs in gebieden groter dan (r_1) betekenis heeft.

31. We komen nu tot ons aanvankelik doel, een simboliese formule te konstrueren die de koëffisienten a_m van de reeks P, behorende bij de samengestelde transmutatie $T = T_2 T_1$, uitdrukt in de koëffisienten λ_m en μ_m van de samenstellende reeksen P_1 en P_2. Zoals gezegd is, bepalen we daartoe eerst de funksies

$$\xi_k = T_2 T_1 (x^k),$$

waarin T de gehele machten x^k transformeert, om daaruit met behulp van de, in 't begin van deze mededeling nog eens herhaalde formule (24) de funksies a_m af te leiden. Het verschil met de in N°. 24 van de vorige mededeling gevolgde gang bestaat dus hierin dat men $T_2 T_1$ voor de biezondere funksie x^k, in plaats van dadelik voor de willekeurige u, heeft te bepalen. Dit kan natuurlik slechts tot vereenvoudiging leiden.

We behouden geheel de notaties en onderstellingen van N°. 24, nemen dus met name aan dat er drie getallen α, γ, β, met de eigenschappen als daar vermeld, bestaan. Om te beginnen merken we weer op dat x^k tot de sirkel (β), dus $T_1(x^k)$ tot (γ), dus $T_2 T_1 (x^k)$ tot (α) behoort. M. a. w. ξ_k is een in het gesloten gebied (α) reguliere funksie en we voegen er maar dadelik aan toe dat hieruit, met behulp van (24), voor a_m hetzelfde volgt. Verder ontwikkelen we $T_1(x^k)$, als $T_1 u$ in N°. 24, in de reeks van MAC-LAURIN, die hier

echter eenvoudig in de *eindigende* reeks (23) overgaat (in het vorige nummer opnieuw neergeschreven). Hierop kan men dus zonder meer de transmutatie T_2 term voor term toepassen, wat in N°. 24 nog een nadere overweging vereiste, omdat daar de betreffende reeks uit oneindig veel termen bestond. We hebben dus, geschreven met eigenlike vormen, en geldig in (α),

$$\xi_k = \sum_0^k{}^i k_i T_2(x^{k-i}\lambda_i).$$

De grootheid $T_2(x^{k-i}\lambda_i)$ kan nu in dit gebied (α) met behulp van de simboliese formule (69) bepaald worden, omdat zowel $\lambda_i(x)$ als x^{k-i} tot (γ) behoren; dit geeft

$$T_2(x^{k-i}\lambda_i) = (x+\mu)^{k-i}\lambda_i(x+\mu)$$

We kunnen dit in de vorige formule substitueren, dan komt er

$$\xi_k = \sum_0^k{}^i k_i(x+\mu)^{k-i}\lambda_i(x+\mu), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

zonder dat daarbij iets te bewijzen is, mits we ieder van de $k+1$ termen van deze reeks *afzonderlik* door de eigenlike betekenis vervangen, en eerst daarna optellen. Die eigenlike betekenis is: substitueer voor de uitdrukkingen $(x+\mu)^{k-i}$ en $\lambda_i(x+\mu)$ hun machtreeksen in de letter μ; vermenigvuldig die reeksen term voor term, en vervang eindelik de eksponenten van μ door indeksen: dan konvergeert het zo verkregen aggregaat absoluut en uniform in (α). Maar hetzelfde geldt van elk nieuw aggregaat dat door de vereniging van een *eindig* aantal van dergelijke aggregaten ontstaat. Dus hoeft men de $k+1$ aggregaten, die aan het rechterlid van (70) beantwoorden, niet meer scherp gescheiden te houden.

Men kan het totale aggregaat nu bv. volgens indeksen van μ of, als men de eksponenten nog niet door indeksen vervangen denkt, volgens machten van μ groeperen, en dus het rechterlid van (70) zó interpreteren: vervang het door zijn machtreeks in μ en zet daarna indeksen in plaats van eksponenten. Dat aan dit rechterlid een volkomen bepaalde machtreeks beantwoordt, behoeft nauweliks vermelding, nu dit immers van ieder van de $k+1$ termen afzonderlik al vaststaat. De hier beschouwde wijze van groepering maakt evenwel weer volkomen duidelik dat men op het rechterlid van (70) alle voorkomende analitiese herleidingen mag toepassen, alvorens tot de interpretatie over te gaan, en dit altijd weer dank zij het feit dat aan een reguliere funksie, in de omgeving van een bepaald punt, maar één machtreeks beantwoordt. Van deze opmerking kan men partij trekken in *biezondere* gevallen, wanneer de λ's van verschil-

lende indeks op de een of andere manier met elkaar in verband staan, zodanig dat nadere herleiding van (70) mogelik wordt. Maar in 't algemeen gaat dit niet, aangezien in geen twee van de $k+1$ reekstermen λ's met dezelfde indeks voorkomen.

Intussen is verdere simbolizering van de formule voor ξ_k mogelik, indien men de indeks bij de letter λ door een eksponent vervangt; laten we tevens duidelikheidshalve de vorm $(x+\mu)$ even bij λ weg, dan kunnen we schrijven

$$\xi_k = \sum_0^k k_i (x+\mu)^{k-i} \lambda^i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70')$$

en als men dit zó opvat dat men, alvorens andere herleidingen uit te voeren, eerst de eksponent van λ door een indeks vervangt en $(x+\mu)$ toevoegt, dan komt men op de vorige simboliese formule terug en is dus verder niets aan te tonen. We komen nu evenwel een stap verder, als we niet ieder van de $k+1$ leden van de som (70') *als geheel* interpreteren, maar elk produkt $(x+\mu)^{k-i+1} \lambda^i$ waarin λ^i staat voor $\lambda_i(x+\mu)$, als de som van $k-i+1$ grootheden, waarvan men de simboliese voorstelling krijgt, door het binomium $(x+\mu)^{k-i+1}$ te ontwikkelen en iedere term van deze ontwikkeling met λ^i te vermenigvuldigen alsof λ en μ getallen waren [1]). Het totale, aldus met behulp van (70') gevormde simboliese aggregaat is een eindigende machtreeks in λ en μ. Deze is verkregen door het rechterlid van (70') alsof λ en μ getallen waren, op de zo even aangegeven *spesiale* manier te ontwikkelen. Maar omdat dit rechterlid een gehele rationele funksie van λ en μ is, voert *iedere* ontwikkeling daarvan tot *dezelfde* machtreeks, en kan men er ook analitiese herleidingen op toepassen. Daar het nu herleid kan worden tot $(\lambda+\mu+x)^k$ hebben we dus ten slotte de simboliese formule

$$\xi_k = (\lambda + \mu + x)^k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

waarvan de interpretatie in het voorgaande ligt opgesloten. We willen er, als kenschetsend hierbij, alleen de aandacht op vestigen dat de letters λ en μ volstrekt niet op gelijke voet behandeld moeten worden: eerst komt bij λ de vervanging van eksponent door indeks, daarna pas bij μ.

[1]) Dat deze interpretatie van dat produkt geoorloofd is, hebben we juist aan het slot van het vorige nummer aangewezen, en, zoals blijkt uit hetgeen daar uitgelegd is, komt de opvatting daarop neer dat men het produkt beschouwt als de simboliese voorstelling van de ontwikkeling in de funksionele reeks van TAYLOR van $T_2[x^{k-i}\lambda_i(x)]$, met $\lambda_i(x)$ als „beginpunt" en x^{k-i} als „aangroeiing". Dit is in tegenstelling met hetgeen, in N⁰. 24, tot de formule van BOURLET voerde, waar we $\lambda_i(x)$ juist als „aangroeiing" en $u_i(x)$ als „beginpunt" beschouwden.

Eindelik de laatste stap: de bepaling van a_m uit de grootheden ξ_k met behulp van de formule (24). Substitueren we hierin het rechterlid van (71), dan komt er

$$a_m = \sum_0^m {}_k m_k \, (-x)^{m-k} \, (\lambda + \mu + x)^k \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

en hierbij is niets te bewijzen, als men in ieder van de $m+1$ leden van deze som afzonderlik het trinomium $(\lambda+\mu+x)^k$ vervangt door zijn werkelike waarde. Om deze te krijgen, moet men beginnen het trinomium in zijn machtreeks naar λ en μ te ontwikkelen: ieder van de termen daarvan heeft dan zijn eigen, in het voorgaande aangegeven, werkelike waarde, en hetzelfde geldt derhalve van het produkt van zo'n term met de faktor $m_k\,(-x)^{m-k}$. We krijgen zo voor elk van de $m+1$ leden van (72) een aggregaat bestaande uit een eindig aantal elementen, ieder gekarakterizeerd door een bepaalde simboliese macht van λ en μ. Het totaal aantal elementen, van alle $m+1$ leden te zamen afkomstig, is dus eveneens eindig, zodat het een nieuw aggregaat vormt dat willekeurig gegroepeerd mag worden. Doet men dit zó dat termen met eenzelfde macht van λ en van μ bijeenkomen — deze mag men analities optellen, aangezien de betekenis van een produkt $\lambda^p \mu^q$ enkel afhangt van de eksponenten p en q, en niet van de herkomst, zodat gelijksoortige produkten, van verschillende leden van (72) afkomstig, dezelfde werkelike waarde hebben — dan krijgt men een machtreeks in λ en μ. Deze machtreeks is verkregen door het rechterlid van (72), alsof λ en μ getallen waren, op de zo even geschetste, *spesiale* manier te ontwikkelen. Maar *dezelfde* machtreeks beantwoordt blijkbaar weer aan *alle* vormen waartoe dat rechterlid analities herleid kan worden. Daar het nu b.v. analities gelijk is aan de uitdrukking $(\lambda+\mu)^m$, heeft men ten slotte

$$a_m = (\lambda + \mu)^m = (\{\lambda\}_{x+\mu} + \mu)^m \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

waarvan het laatste lid meer uitvoerig de betekenis aangeeft. Deze is: ontwikkel het binomium $(\lambda+\mu)^m$ analities in zijn machtreeks naar λ en μ, vervang bij λ de eksponent door een indeks en in $\lambda_i(x)$ de letter x door $x+\mu$; ontwikkel de dan verkregen funksionele uitdrukking analities in een machtreeks naar μ, en vervang de eksponent van μ door een indeks.

Dit is de simboliese formule waarop wij doelden, en die de koëffisienten a_m van de rezulterende reeks P uitdrukt in de koëffisienten λ_m en μ_m van de komponenten P_1 en P_2. Tevens hebben we onderweg een simboliese formule afgeleid, nl. (71), die de rezulterende grootheden ξ_m eveneens uitdrukt in λ_m en μ_m. Maar als het om

deze als *eind*rezultaat te doen is, schrijven we hem beter nog in de volgende, eenvoudiger vorm:

$$\xi_m = (\lambda + x)^m = \{(\lambda + x)^m\}_{x+\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

waarvan het laatste lid meer uitvoerig de betekenis aangeeft. Deze is: ontwikkel het binomium $(\lambda + x)^m$ analities in zijn machtreeks naar λ; vervang bij λ de eksponent door een indeks; vervang in de dan komende funksionele uitdrukking x door $x+\mu$; wat men nu gekregen heeft, stemt presies overeen met het rechterlid van formule (70), waaruit de juistheid van (74) blijkt en tevens de verdere interpretatie.

32. De formule (73), en ook (74), is geldig in het gebied (α), zoals in het voorgaande is aangetoond. Er blijft nu nog over, om aan de hand van deze formule te bewijzen dat de rezulterende reeks P volledig is in (α), met een korresponderend gebied dat hoogstens gelijk is aan (β), welke uitkomst we in de vorige mededeling langs andere weg vonden. Hierbij komt ons te pas de volgende stelling, waarvan we het bewijs achterwege laten, eensdeels, omdat het onmiddellik voor de hand ligt, anderdeels, omdat de stelling vermoedelik al wel ergens anders bewezen is:

De bovenste limiet, voor $m = \infty$,

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \left| P_m + Q_m \right|^{\frac{1}{m}},$$

van de m^e *wortel uit de modulus van de som van twee komplekse getallen* P_m *en* Q_m, *die beide in het ensemble van gehele, pozitieve waarden van* m *bepaald zijn, is gelijk aan de grootste van de twee bovenste limieten,*

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \left| P_m \right|^{\frac{1}{m}} \quad , \quad \overline{\lim_{m=\infty}} \left| Q_m \right|^{\frac{1}{m}}$$

van de m^e *wortels uit de moduli van die twee getallen afzonderlik. Zijn de beide laatstgenoemde limieten gelijk, dan is de eerste in elk geval niet groter.*

Een overeenkomstige stelling geldt, als gevolg hiervan, voor een som die uit een willekeurig eindig, niet van m afhankelik aantal termen bestaat.

We maken van deze stellingen gebruik, om de m^e wortel uit de modulus van de koëffisient $a_m(x)$ van de rezulterende reeks P te onderzoeken. Werken we (73) op de voorgeschreven manier uit, dan komt er

$$a_m = \sum_0^m{}_k\, m_k\, \mu^{m-k} \left[\lambda_k + \frac{\mu}{1} \lambda_k' + \frac{\mu^2}{2!} \lambda_k'' + \ldots \right]$$

$$= \sum_0^m{}_k \left[m_k \sum_0^\infty{}_i \frac{\mu_{m-k+i}\, \lambda_k^{(i)}}{i!} \right], \quad \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

welke laatste formule alleen eigenlike voorstellingen bevat. We onderstellen nu weer, evenals in de vorige mededeling, dat (γ) niet het maksimumgebied van volledigheid is voor de reeks P_1, zodat er een gebied is $(\gamma') > (\gamma)$, waarin P_1 volledig is; zij (β') het hiermee korresponderende gebied. We kunnen dan β' *willekeurig weinig* groter dan β' denken — mits maar γ' *genoegzaam weinig* groter dan γ gedacht wordt — indien we tevens, evenals in de vorige mededeling, weer onderstellen dat α en β *kontinu* met elkaar toe- en afnemen. Noemen we verder $L_k(\gamma')$ de maksimummodulus van λ_k op de omtrek van de sirkel (γ'). Er is nu, wegens de genoemde volledigheid van P_1 en van P_2, bij ieder gegeven, willekeurig klein getal ε, een geheel getal E, zodanig dat voor $n \geq E$

$$L_n(\gamma') \leq (\beta' - \gamma' + \varepsilon)^n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76)$$

en tevens

$$|\mu_n| \overline{<} (\gamma - \alpha + \varepsilon)^n; \quad \text{indien} \quad |x| \leq \alpha \quad \ldots \quad (77)$$

Verder heeft men in het gebied (α), voor iedere gehele, niet negatieve waarde van i en k

$$\left| \frac{\lambda_k^{(i)}}{i!} \right| < \frac{\alpha L_k(\gamma')}{(\gamma' - \alpha)^{i+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (78)$$

We denken nu m alvast groter dan E en splitsen in die onderstelling de dubbele som (75) in de volgende vier delen, die we ter bekorting alleen met hun grenzen aanduiden,

$$s_1 = \sum_E^{m-E}{}_k \sum_0^\infty{}_i \;, \quad s_2 = \sum_0^{E-1}{}_k \sum_0^\infty{}_i \;, \quad s_3 = \sum_{m-E+1}^m{}_k \sum_E^\infty{}_i \;, \quad s_4 = \sum_{m-E+1}^\infty{}_k \sum_0^{E-1}{}_i \,.$$

Verder denken we ε, ná (γ'), zó gekozen dat $\gamma + \varepsilon < \gamma'$, stel $\gamma' = \gamma + \varepsilon + \delta$. Dan vinden we de eerste drie sommen voor de ongelijkheden (77) en (78) met behulp van

$$|s_1| < \frac{\alpha}{\delta} \sum_E^{E-1}{}_k\, m_k\, L_k(\gamma')\, (\gamma - \alpha + \varepsilon)^{m-k}$$

$$|s_2| < \frac{\alpha}{\delta} \sum_0^{E-1}{}_k\, m_k\, L_k(\gamma')\, (\gamma - \alpha + \varepsilon)^{m-k}$$

$$|s_3| < \frac{\alpha}{\delta}\left(\frac{\gamma-\alpha+\varepsilon}{\gamma'-\alpha}\right)^E \sum_{m-E+1}^{m} {}_k\, m_k\, L_k(\gamma')\,(\gamma-\alpha+\varepsilon)^{m-k}.$$

In de eerste en de derde som kan men voorts nog de ongelijkheid (76) toepassen, en voor s_1 bv. achtereenvolgens herleiden

$$|s_1| < \frac{\alpha}{\delta} \sum_{E}^{m-E} {}_k\, m_k\,(\beta'-\gamma'+\varepsilon)^k(\gamma-\alpha+\varepsilon)^{m-k} < \frac{\alpha}{\delta}\sum_{0}^{m} {}_k - $$

$$< \frac{\alpha}{\delta}(\beta'-\gamma'+\gamma-\alpha+2\varepsilon)^m < \frac{\alpha}{\delta}(\beta'-\alpha+2\varepsilon)^m$$

Voor s_3 vinden we door een analoge herleiding

$$|s_3| < \frac{\alpha}{\delta}\left(\frac{\gamma-\alpha+\varepsilon}{\gamma'-\alpha}\right)^E (\beta'-\alpha+2\varepsilon)^m$$

Hieruit kan men afleiden

$$\overline{lim}_{m=\infty} |s_1|^{\frac{1}{m}} \leq \beta-\alpha \quad , \quad \overline{lim}_{m=\infty} |s_3|^{\frac{1}{m}} \leq \beta-\alpha$$

daar ε willekeurig klein gedacht kan worden, en β' willekeurig weinig groter dan β.

Wat s_2 betreft, hierin kunnen we voor $L_k(\gamma')$ geen bepaalde majorantwaarde aangeven. Maar het aantal termen is hier eindig en onafhankelik van m. Dus hebben we, volgens de stelling van 't begin van dit nummer, de gezochte grenswaarde maar voor iedere term afzonderlik te berekenen en dan is voor het geheel de limiet in elk geval niet groter. In geen enkele term hangt daarbij de faktor $L_k(\gamma')$ van m af, zodat deze faktor voor de bedoelde limiet de bijdrage 1 (als faktor) oplevert.

Bedenkt men verder dat voor een gegeven niet van m afhankelike waarde k ook $m_k^{\frac{1}{m}} = 1$ is, en houdt men eindelik weer in 't oog dat ε willekeurig klein te kiezen is, dan komt men tot het besluit dat

$$\overline{lim}_{m=\infty} |s_2|^{\frac{1}{m}} \leq \gamma-\alpha.$$

Om ten slotte te zien, hoe het met s_4 gesteld is, substitueren we vooreerst $k = m-k'$ (en laten daarna het aksent bij de k maar weer weg); er komt dan

$$s_4 = \sum_{0}^{E-1} {}_k\, m_k \sum_{0}^{E-1} {}_i \frac{\mu_{k+i}\,\lambda_{m-k}^{(i)}}{i\,!}$$

Deze dubbele som vertegenwoordigt een eindig, niet van m afhan-

kelik aantal termen, waarvan ieder geidentifiseerd kan worden door een vaste, eveneens van m onafhankelike waarde van i en van k; het is dus voor ons doel weer voldoende de afzonderlike termen te beschouwen. Op zo'n term kunnen de ongelijkheden (76) en (78) toegepast worden, waardoor er komt

$$\left|\frac{m_k \mu_{k+i} \lambda^{(i)}_{m-k}}{i\,!}\right| < \frac{\alpha |\mu_{k+i}| m_k (\beta' - \gamma' + \varepsilon)^{m-k}}{(\gamma' - \alpha)^{i+1}}$$

Door analoge overwegingen als bij de vorige som besluit men hieruit

$$\overline{\lim_{m=\infty}} |s_4|^{\frac{1}{m}} \leq \beta - \gamma$$

Geen van de vier limieten is dus groter dan $\beta - \alpha$, daar γ minstens gelijk is aan α, en hoogstens gelijk aan β. Derhalve is ook voor de hele som (75) de limiet niet groter dan $\beta - \alpha$. Het getal dat voor de rezulterende reeks P met α korrespondeert is dus hoogstens gelijk aan $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$, en het gevraagde is daarmee aangetoond.

33. We kunnen zeggen dat we hiermee ons oorspronkelik doel bereikt hebben: een simboliese formule te vinden, die de koëffisienten van de rezultante van twee volledige reeksen uitdrukt in de koëffisienten van deze beide; het geldigheidsgebied van deze formule vast te stellen; en eindelik er uit af te leiden, dat de rezultante insgelijks volledig is, waarbij we tevens aangaande de afhankelikheid van daarbij met elkaar korresponderende gebieden tot eenzelfde uitkomst kwamen, als bij de afleiding van de formule van Bourlet.

Wij willen echter de beschouwingen niet eindigen, alvorens op nog een paar andere formules gewezen te hebben, die met de nu gevondene een soort van afgesloten geheel vormen. In de eerste plaats denken wij dan aan de veralgemening van de in N°. 31 gevonden formules voor meer dan twee transmutaties. Het zal blijken voldoende te zijn, als we er drie beschouwen, gereprezenteerd door de reeksen P_1, P_2 en P_3. We onderstellen dat we daarbij vier getallen kunnen aangeven: α_3, α_2, α_1, α_0, zódanig dat P_1 volledig is in een sirkelvormig gebied (α_1), met korresponderend gebied (α_0), P_2 in een gebied (α_2) met korresponderend gebied (α_1), P_3 in een gebied (α_3) met korresponderend gebied (α_2). De koëffisienten van de reeksen duiden we resp. aan door $a_{1,m}(x)$, $a_{2,m}(x)$, $a_{3,m}(x)$, die van de rezultante P_{II} van P_1 en P_2 door $a_{1,m}(x)$, en die van de totale rezultante P_{III} door $a_{III,m}(x)$. We hebben dan

$$a_{II,m} = (\{a_1\}_{x+a_2} + a_2)^m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

geldig in (α_2); en, daar de reeks P_{II} volledig is in (α_2), met een

korresponderend gebied dat hoogstens gelijk is aan (α_0), heeft men ook

$$a_{III,m} = (\{a_{II}\}_{x+a_3} + a_3)^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

geldig in (α_3), en is P_{III} volledig in (α_3), met korresponderend gebied dat niet groter is dan (α_0). Dit alles volgens formule (73) en hetgeen daarbij gezegd is. De uitspraak dat de rezultante P_{III} volledig is, en wel zodanig dat als volledigheidsgebied in aanmerking komt het gebied van de laatste komponent, terwijl daarmee, voor die rezultante, een gebied korrespondeert, dat hoogstens gelijk is aan datgene wat, voor de eerste komponent, korrespondeert met het gebied van die komponent, is dus niet moeilik te bewijzen, en de veralgemening er van, voor n komponenten, onmiddellik duidelik. We moeten alleen de beide voorgaande formules nog kombineren, zodat $a_{III,m}$ wordt uitgedrukt in de koëffisienten $a_{1,m}$, $a_{2,m}$ en $a_{3,m}$.

We werken daartoe het rechterlid van (80) uit volgens het voorschrift aan 't slot van N°. 31, waardoor we komen tot deze andere simboliese formule, die aan de vroegere vorm (70) van formule (73) beantwoordt,

$$a_{III,m} = \sum_{0}^{m}{}_k\, m_k\, a_3^{m-k}\, a_{II,k}\,(x+a_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80')$$

Het rechterlid hiervan moet analities naar machten van a_3 ontwikkeld worden; dat hierbij een geheel bepaalde machtreeks in 't spel is, volgt uit ons uitvoerig onderzoek in N°. 31, volgens hetwelk de funksie $a_{II,m}(x)$ regulier is in 't gebied (α_2) en dus zeker in (α_3). Verder moeten we de eksponenten van a_3 door indeksen vervangen; het zo verkregen aggregaat konvergeert volgens het genoemde onderzoek absoluut en uniform in het gebied (α_3), en hetzelfde geldt van ieder van de $m+1$ aggregaten die afzonderlik uit de leden van de laatste som kunnen worden afgeleid: dit laatste beantwoordt trouwens juist aan een *vroeger* stadium van de interpretatie van formule (70). Hierbij is altijd nog de funksie $a_{II,m}(x)$ als *een en ondeelbaar gegeven* beschouwd. Maar nu moeten we hem bepaald denken met behulp van (79), die de vorige formule doet overgaan in

$$a_{III,m} = \sum_{0}^{m}{}_k\, m_k\, a_3^{m-k} \{(\{a_1\}_{x+a_2} + a_2)^k\}_{x+a_3} \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

waarvan de betekenis nog geheel dezelfde is, mits de akkoladefaktor *als geheel* geïnterpreteerd wordt zoals het voorschrift voor het rechterlid van (79) dat aangeeft (met, *aan 't eind*, vervanging van x door $x+a_3$)[1]). Eenvoudiger, maar met volkomen dezelfde betekenis kunnen we nu weer schrijven

[1]) Met de woorden „aan 't eind" bedoelen we: „als de funksie $a_{II}(x)$ *als geheel*

$$a_{III,m} = \sum_{0}^{m} {}_k\, m_k a_3^{m-k}(a_1 + a_2)^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81')$$

Maar *deze* vorm suggereert het idee dat men tenslotte ook zal hebben

$$a_{III,m} = (a_1 + a_2 + a_3)^m = [\{(a_1)_{x+a_2} + a_2\}_{x+a_3} + a_3]^m \,, \quad . \quad . \quad (82)$$

waarvan het laatste lid uitvoeriger de betekenis aangeeft. Deze is: ontwikkel het trinomium $(a_1 + a_2 + a_3)^m$, alsof a_1, a_2, a_3, getallen waren; vervang in elke willekeurige term van die ontwikkeling,

$$C a_1^g a_2^h a_3^i \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

waarin C een geheel getal is dat enkel van de eksponenten g, h, i, afhangt, de eksponent g door een indeks en in $a_{1,g}$ (x) de letter x door $x + a_2$; ontwikkel daarna iedere uitdrukking $a_2^h\, a_{1,g}\,(x + a_2)$ in een machtreeks naar a_2 en vervang de eksponenten bij de letter a_2 door indeksen; vervang in de funksie die door het nu verkregen aggregaat wordt voorgesteld, of in dat aggregaat zelf (zie de noot op de vorige pagina) de letter x door $x + a_3$; ontwikkel het produkt van de nu verkregen uitdrukking met a_3^i in een machtreeks naar a_3 en vervang de eksponenten van a_3 door indeksen; dan krijgt men een aggregaat dat te zamen met de aggregaten waartoe de andere termen (83) van het trinomium aanleiding geven de gezochte funksie $a_{\mathrm{III},m}$ in het gebied (a_3) voorstelt.

We kunnen gemakkelik inzien dat de overgang van (81) op (82) geoorloofd is. Gaat men 't goed na, dan blijkt n.l. dat men de interpretatie van (81) uit die van (82) kan krijgen, door hierin alleen deze wijziging aan te brengen dat men, in de ontwikkeling van het trinomium $(a_1 + a_2 + a_3)^m$ de termen met eenzelfde macht van a_3 als een en ondeelbaar geheel opvat en vertaalt. *Het spreekt niet vanzelf* dat dit op hetzelfde neerkomt, en niet eens dat het aggregaat dat aan ieder van de genoemde termen afzonderlik beantwoordt in het gebied (a_3) *konvergeert.* Maar we kunnen weer alles herhalen met de natuurlike majoranten $\bar{a}_1\, \bar{a}_3, \bar{a}_3$ van de funksies a_1, a_2, a_3, en die overweging voert tot het besluit dat de bedoelde splitsing geoorloofd is.

---

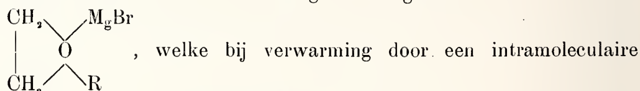
gekonstrueerd is". Formule (81) zou niet hetzelfde *zeggen* als (80'), indien we hem zó opvatten dat in ieder element van het oneindige aggregaat, als hoedanig formule (79) $a_{II,k}$ in 't algemeen oplevert, x door $x + a_3$ vervangen moest worden. Intussen willen we opmerken dat deze manier wel degelik zou mogen worden toegepast, wat men inziet, als men bedenkt, dat al het voorgaande nog van kracht blijft, indien men de funksies a_1, a_2, a_3 door hun natuurlike majoranten vervangt. Bij teoretiese kwesties kan deze opmerking misschien wel eens te pas komen.

Scheikunde. — De Heer P. v. ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van den Heer C. F. VAN DUIN chem. docts., over de „*Inwerking van organomagnesiumverbindingen op, en reductie van cineol*".

(Mede aangeboden door den Heer ERNST COHEN).

De eerste mededeeling in de literatuur over inwerking van organomagnesiumverbindingen op inwendige oxyden is van BLAISE[1]), die vond, dat bij inwerking van RM_gBr op aethyleenoxyde zoowel een primaire alcohol als het broomhydrine van glycol gevormd worden. De vorming van deze beide producten leidde hem er toe, aan te nemen, dat aan een deel van het oxyde de organomagnesiumverbinding wordt geaddeerd volgens de vergelijking $RM_gBr + (CH_2)_2O = RCH_2 - - CH_2OM_gBr$ (I) en aan een ander deel volgens het reactieschema: $RM_gBr + (CH_2)_2O = CH_2Br - CH_2OM_gR$ (II).

Terecht wees echter GRIGNARD[2]) er op, dat volgens het door BLAISE gegeven reactieschema II de organomagnesiumverbinding zich bij haar additie splitst in RM_g en halogeen; een geval dat tot nog toe nooit was geconstateerd; vervolgens bewees hij, dat daarbij allereerst een oxoniumverbinding wordt gevormd van de formule



, welke bij verwarming door een intramoleculaire omzetting overgaat in CH_2OM_gBr | CH_2R. Het optreden van het broomhydrine van het glycol kan dan tevens verklaard worden door inwerking van HBr (gevormd bij de hydrolyse van het M_gBr_2) op niet in reactie getreden en daarna weer afgesplitst oxyde. Het mechanisme der reactie was daarmede tot klaarheid gebracht. HENRY bestudeerde de inwerking van organomagnesiumverbinding op isobutyleenoxyde[3]), symm. butyleenoxyde[4]) en propyleenoxyde[5]); het eerste reageert daarbij als het isomere isobutylaldehyde, het tweede als methylaethylketon, terwijl bij propyleenoxyde de reactie verloopt als bij aethyleenoxyde.

---

[1]) BLAISE. C. r. d. l'Acad. des sciences **134**, 551 (1902).

[2]) GRIGNARD c. r. d. l'Acad. des sciences **136**, 1260 (1903), Bull. Soc. chim. (3) **29**, 944 (1903).

[3]) HENRY C. r. de l'Acad. des sciences **145**, 21 (1907); zie ook ibid. **145**, 154 (1907).

[4]) Ibid. **145**, 406 (1907).

[5]) Ibid. **145**, 453 (1907).

Talrijk zijn de onderzoekingen met epichloorhydrine; Josítsch [1]) kreeg bij inwerking van $C_2H_5M_gBr$ een gechloorden amylalcohol, terwijl Kling [2]) met $C_2H_5\ M_gJ$ quantitatief het chloorjoodhydrine verkreeg; Iositsch [3]), zijn proeven daarop herhalend, kreeg nu zoowel het chloorbroomhydrine als een gechloorden amylalcohol. Fourneau en Tiffeneau [4]) vonden daarop, dat met aliphatische organomagnesiumbromiden alleen het chloorbroomhydrine ontstaat, terwijl met aromatische organomagnesium-verbindingen gechloorde propanolen met de constitutie $RCH_2 - C \frac{OH}{H} CH_2Cl$ ontstaan, waarvoor vroeger [5]) de formule $CH_2Cl\,C \frac{H}{R} CH_2OH$ was aangenomen.

Ten slotte zij nog vermeld, dat Fourneau en Tiffeneau [6]) uit hun studie over de inwerking van organomagnesiumverbindingen op monogesubstitueerde en asymmetrisch digesubstitueerde aethyleenoxyden de conclusie trokken, dat bij de eerstgenoemde het algemeen reactieverloop is: $RC \overset{H}{\underset{O}{<}} CH_2 + R'M_gBr \rightarrow RC \overset{H}{\underset{OH}{<}} CH_2R'$, terwijl bij de in de tweede plaats genoemde een voorafgegane isomerisatie tot het isomere aldehyde moet worden aangenomen.

Neemt men het algemeen resultaat der bovengenoemde onderzoekingen in aanmerking, dan zou men bij de inwerking van een organomagnesiumverbinding op cineol de primaire vorming van een additieproduct verwachten; dat dit inderdaad zoo is bij inwerking van CH_3M_gJ toonde Grignard [7]) reeds aan; hij nam tevens waar, dat bij verhitting van dit additieproduct een heftige reactie optreedt. Deze reactie bestaat echter uit meer dan alleen uit een intramoleculaire omzetting; de bij ongeveer 160° optredende reactie is zeer heftig; de temperatuur stijgt daarbij tot ongeveer 260°, terwijl onder een stormachtige gasontwikkeling een door vrij jodium bruin gekleurde vloeistof overdistilleert. De reactie is niet altijd even heftig; in verband daarmede varieert de hoeveelheid gas die ontwijkt en de hoeveelheid vloeistof die overdistilleert. Men kan deze laatste

---

[1]) Iositsch, Journ. russ. phys. chem. Ges. **34**, 96. (1902).

[2]) Kling, Bull Soc. chim. (3), **31**, 14 (1904) C. r. d. l'Acad. des sciences **137**, 756 (1903).

[3]) Iositsch, Journ. russ. phys. chim. Ges. **36**, 6 (1904).

[4]) Fourneau en Tiffeneau, Bull Soc. chim. (4) **1**, 1227 (1907).

[5]) J. D. Riedel, Akt. Ges. D. R. P. 183361; Ch. C. 1907 1, 1607.

[6]) Fourneau en Tiffeneau, C. r. d. l'Acad. des sciences **145**, 437 (1907).

[7]) Grignard, Bull Soc. chim. (3) **29**, 944 (1903).

het best verkrijgen door bij een aetherische suspensie van 56 gram CH_3MgJ, verkregen uit 8 gram Mg en 48 gram CH_3J, 52 gram cineol te voegen; men verhit de geheele massa daarop een paar uur en laat deze dan 3 à 4 dagen staan.

Vervolgens distilleert men den aether af, waarbij slechts zeer weinig cineol overgaat, verhit het residu op een zandbad tot ± 160°, zet op de kolf een zeer wijde afvoerbuis en laat de reactie zonder verdere warmtetoevoer verloopen, Aldus verkrijgt men 30—40 gram distillaat en 4—5 L. gas. Er blijft in de kolf echter nog steeds wat vloeistof achter; deze verkrijgt men, wanneer men het residu op de gebruikelijke wijze verder behandelt; de aldus verkregen vloeistof is dezelfde als die, welke overdistilleert. Deze laatste wascht men eerst met een thiosulfaatoplossing en fractioneert vervolgens in vacuo, waarbij alles, wat bij 21 mM. tot 85° overgaat, samen wordt opgevangen; de distillatie wordt dan gestaakt, omdat het residu dan onder jodiumafscheiding begint te ontleden. Hetgeen overgedistilleerd is, wordt ter verwijdering van onveranderd cineol, dat in vrij groote hoeveelheid aanwezig is, eenige malen met een 50 % resorcine-oplossing geschud; op chloorcalcium gedroogd en ten slotte over metallisch natrium gedistilleerd. Men krijgt dan een vloeistof van kpt. 170°—178° bij 759 mM., bestaande uit een mengsel van koolwaterstoffen $C_{10}H_{16}$. Immers de elementairanalyse gaf: (verbrand met loodchromaat in gesloten buis): C = 87, 84 %; H = 12.00 % (berekend voor $C_{10}H_{16}$: C = 88.15 %; H = 11.85 %), terwijl de bepaling van de physische constanten der bij herhaald fractioneeren verkregen fractie's gaf:

fractie Kpt. 170°—172 : 5;	SG_{16^0} =	0.841
	n_{D16^0} =	1.4679
	M R =	44.99
fractie Kpt. 172° 5—175°:	SG_{16} =	0.846
	n_{D16^0} =	1.4706
	M R =	44.94
fractie Kpt. 175°—178°	SG_{16^0} =	0·853
	n_{D16^0} =	1.4752
	M R =	44.95
Berekend voor $C_{10}H_{16}$ 2 ⌈ :	M R =	45.25.

Bovendien wijst het feit, dat op geen enkele wijze een kristallijn product uit een dezer fracties's kan worden verkregen, op de aanwezigheid van een mengsel. Ik probeerde de bereiding van het tetrabromide volgens WALLACH[1]) in alcohol-aether, in zwavelkoolstof

[1]) WALLACH, Annalen **227**, 280 (1885).

en in methylalcohol, van een nitrosochloride en een chloorhydraat, doch kon nergens een kristallijn product verkrijgen. Evenmin leidde oxydatie met kaliumpermanganaat volgens WAGNER [1]) tot een resultaat; de eenige te identificeeren producten waren aceton en oxaalzuur, en ik moet derhalve met de mededeeling dat onder methaanontwikkeling een mengsel van koolwaterstoffen $C_{10}H_{16}$ ontstaat, volstaan.

Met C_2H_5 MgBr verloopt de reactie veel minder heftig en er distilleert hoofdzakelijk onveranderd cineol over; de vermindering van het soortelijk gewicht, alsmede de reductie van een ammoniakale zilveroxyde-oplossing wezen echter op de aanwezigheid van koolwaterstoffen $C_{10}H_{16}$.

De inwerking van C_6H_5 MgBr verloopt geheel anders: ook hier vormt zich weliswaar een additieproduct, maar bij verhitting, zelfs tot op 200° blijft dit onveranderd, zoodat men bij het verwerken daarvan het cineol terug krijgt, benevens eenig diphenyl. Misschien, dat men hier bij langdurige inwerking in de koude wel een intramoleculaire omzetting krijgt, want dan scheiden zich uit de aetherische oplossing van cineol en C_6H_5 MgBr kristallen af; verwerkt men deze afzonderlijk, dan krijgt men een weinig (3 Gram uit 42 Gr. C_6H_5 MgBr en 36 Gr. cineol na 3 maanden staan) eener tusschen 80° en 90° bij 21 mM overgaande vloeistof, welke met phenylisocyanaat geen kristallijn urethaan gaf. De van de kristallen afgegoten vloeistof leverde niets dan cineol.

Wat de reductie van inwendige oxyden volgens de methode van SABATIER en SENDERENS betreft, daarvan bestaat in de literatuur slechts één voorbeeld n.l. de reductie van cyclohexeenoxyde tot cyclohexanol [2]), waarbij de opbrengst zelfs quantitatief was. Bovendien sprak SABATIER [3]) de meening uit, dat alle aethyleenoxyden volgens zijn methode gehydreerd konden worden.

Bij cineol kon ik op deze wijze geen reductie krijgen; wanneer deze stof tweemaal met een overmaat van waterstof bij 170° door een 40 cM. lange buis, gevuld met puimsteennikkel, werd gevoerd, was het S.G. niet in het minst veranderd.

Deze onderzoekingen, zoowel met cineol als met andere oxyden, worden voortgezet.

Utrecht. *Org. Chem. Lab. der Rijks-Universiteit.*

---

[1]) WAGNER, B. B. **23**, 2315 (1896).

[2]) BRUNEL, Ann. Chem. Phys. (8) **6**, 237 (1905).

[3]) SABATIER, Die Katalyse in der organischen Chemie Leipzig 1917, pag. 80.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt eene mededeeling aan van den Heer E. H. BÜCHNER en Mej. A. PRINS: „*Dampspanningen in het stelsel: zwavelkoolstof-methylalkohol.*"

(Mede aangeboden door den Heer F. M. JAEGER).

In de meeste leerboeken treft men omtrent den damp van gedeeltelijk mengbare vloeistoffen de volgende beschouwing aan voor het geval, dat de samenstelling van den damp tusschen die der beide vloeibare phasen ligt. Indien door verandering van temperatuur de beide vloeistoffen elkander in samenstelling naderen en zij ten slotte in een kritisch mengpunt identiek worden, dan moet, zoo redeneert men, ook de damp bij die temperatuur dezelfde samenstelling hebben. Hierbij wordt echter stilzwijgend aangenomen, dat de damp, die bij eenige lage temperatuur tusschen de vloeistoffen L_1 en L_2 ligt, ook bij alle andere temperaturen tusschen beide liggen blijft. Dat dit geenszins het geval is, dat integendeel de damp bij het kritisch punt een ander gehalte hebben moet, is jaren geleden reeds door KUENEN[1]), met behulp van de theorie van VAN DER WAALS, langs analytischen weg bewezen.

Men kan echter ook uit eene algemeene beschouwing terstond inzien, dat een binnen het gebied der beide vloeistoffen liggende damp naar buiten komen moet, voordat het kritisch punt bereikt wordt. Was dit namelijk niet het geval, dan zou men een punt hebben, waar drie phasen gelijk van samenstelling zouden zijn. Nu is het al een bijzonderheid, wanneer in een binair systeem twee phasen dezelfde samenstelling bezitten, en dit komt slechts voor, wanneer de beide componenten aan bepaalde voorwaarden voldoen. Dat een derde phase ook nog dezelfde samenstelling bezit, zal aan nog meer bijzondere condities gebonden zijn, die wel zelden of nooit verwezenlijkt zullen zijn. Zonder dus de absolute onmogelijkheid van zulk een punt te kunnen bewijzen, ziet men toch zonder meer in, dat het hoogst onwaarschijnlijk is, en in elk geval, in het algemeen niet kan optreden.

Daar tot nog toe geen enkel voorbeeld experimenteel onderzocht is, leek het ons van belang, aan een of ander systeem de juistheid der bovenstaande overwegingen te bewijzen. Wij kozen het stelsel zwavelkoolstof-methylalkohol.

Het komt er op aan om aan te toonen, dat in de t,x-figuur de lijn, die de dampsamenstelling aangeeft, den loop heeft, welke in fig. 1 geteekend is. Wij hebben dan voor ons de verandering in

[1]) Deze Verslagen **12**, 468, 1903.

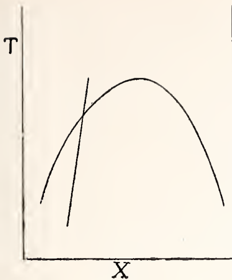


Fig. 1.

samenstelling, die de drie phasen door temperatuurverhooging ondergaan, daarbij steeds met elkander in evenwicht blijvend; wij hebben hier m. a. w. de tx-projectie der driephasenkromme geteekend. Is de volgorde der phasen bij lage temperatuur L_1GL_2, bij een bepaalde temperatuur worden G en L_1 gelijk, en daarna is de volgorde GL_1L_2; bij die bijzondere temperatuur snijdt dus de G-lijn de L_1-lijn.

Dit brengt een andere eigenaardigheid met zich mede, die wij eveneens als kenmerk dezer systemen kunnen beschouwen. De p,x-figuur moet voor de lage temperaturen, waar de volgorde L_1GL_2 is, den vorm van fig. 2, voor de hoogere dien van fig. 3 aannemen, zooals men

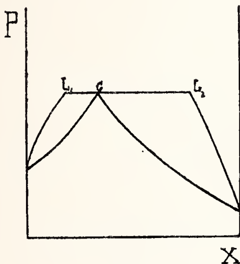


Fig. 2.

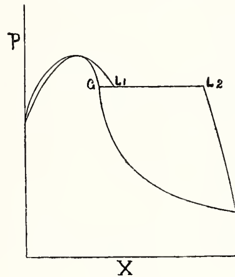


Fig. 3.

grafisch gemakkelijk inziet. Daartusschen ligt een bijzondere overgangsfiguur, in welke G en L_1 juist bij den driephasendruk samenvallen, en het maximum — raakpunt der beide damp-vloeistof-krommen — ook bij den driephasendruk valt. Beide figuren hebben wij bij het gekozen systeem onderzocht.

In de eerste plaats hebben wij de p,x-diagrammen voor verschillende temperaturen bestudeerd. Daartoe bepaalden wij in een tensimeter de spanningen van verschillende mengsels bij een reeks temperaturen. Zoolang men dan drie phasen bij elkaar heeft, vindt men natuurlijk steeds den driephasendruk; zoodra echter een der beide vloeistoffen verdwenen is, verlaat men de tripelkromme, en vertoont elk mengsel zijn eigen druk. Uit de aldus gevonden p,t-lijnen interpoleerden wij voor bepaalde temperaturen de spanningen, en construeerden daaruit de p,x-lijnen. De tensimetrische methode heeft

het groote voordeel, dat de mengsels met geen enkele andere stof behalve kwik in aanraking komen, daar het toestel na vulling dichtgesmolten wordt. Veel voorbereidende arbeid heeft ons het belang hiervan geleerd; caoutchoucstoppen worden door zwavelkoolstof aangetast, kurken zijn onbruikbaar, omdat de methylalkohol er water aan onttrekt; bij ingeslepen stoppen of kranen ondervindt men moeite met de smeermiddelen.

TABEL I.

CS_2		CH_3OH		Tripelkromme	
t	*p*	*t*	*p*	*t*	*p*
21.4°	307 mm	33.4°	188 mm	0°.	154 mm
24.3	344	36.2	210	8.6	227
25.0	357	42.3	280	9.6	239
26.5	376	45.3	319	10.1	245
28.9	414	48.0	370	12.8	272
29.5	420	50.8	410	13.0	280
32.4	467	53.5	463	14.8	303
33.3	480	56.1	529	13.8	313
36.0	530	58.6	590	18.3	345
37.2	550	60.0	627	19.6	372
38.3	573	64.6	760	20.8	389
40.4	616			21.4	403
43.2	676			22.0	410
43.6	685			26.0	484
44.8	715			26.3	491
46.5	761			28.2	523
				29.0	550
				29.4	556
				31.0	588
				33.6	654
				34.1	668
				34.5	679
				36.4	725
				36.6	734

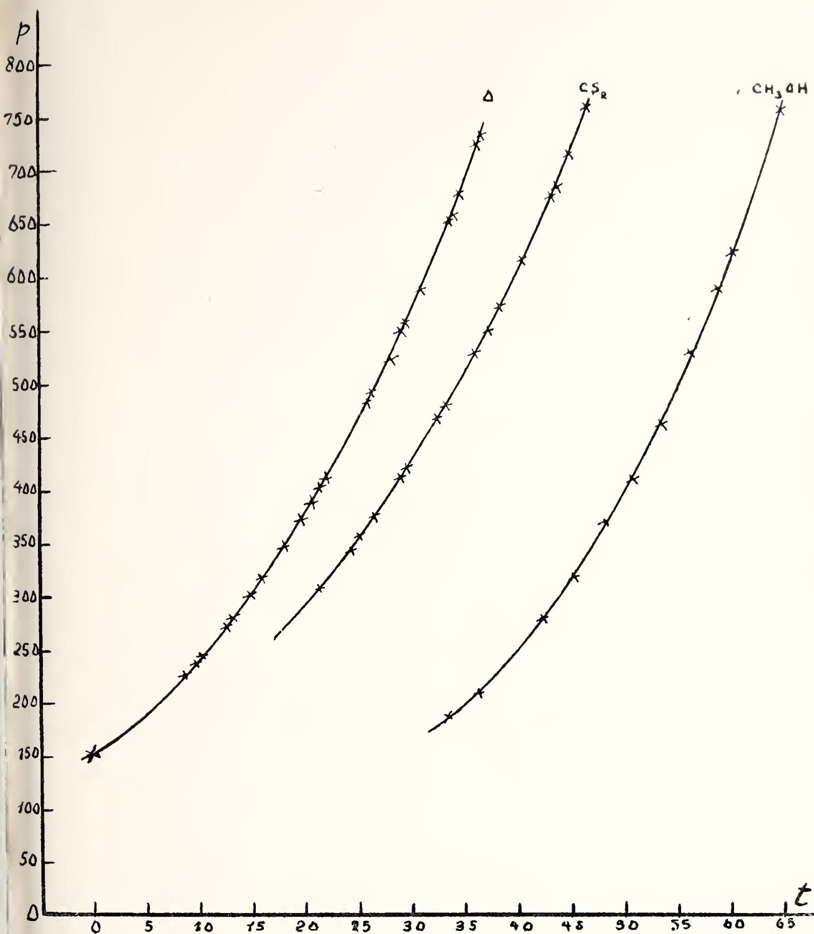


Fig. 4.

De gebruikte stoffen werden zorgvuldig gereinigd. De zuiverste zwavelkoolstof uit den handel werd met kwik geschud, op ongebluschte kalk gezet en hiervan afgedistilleerd. Daarna werd zij nog

eens gedistilleerd, welke operaties wij bij rood licht uitvoerden. Ook werd zij steeds in donker bewaard. Haar kookpunt was 46,4° bij 760 mm.; zij bleef niet meer aan den koeler hangen, en had bijna geen, in ieder geval slechts een niet-onaangenamen, etherischen geur.

TABEL 2. Concentratie in mol.proc. methylalkohol.

4.66 %		11.72 %		19.43 %		26.4 %		30.66 %		52.9 %		72.17 %		90.3 %	
t	*p*	*t*	*p*	*t*	*p*	*t*	*p*	*t*	*p*	*t*	*p*	*t*	*p*	*t*	*p*
17.8°	339 mm	34.4°	669 mm	39.9°	828 mm	40.2°	841 mm	39.8°	826 mm	37.7°	759 mm	17.2°	333 mm	0°	128 mm
21.0	388	38.2	767	43.2	936	41.0	865	41.2	877	38.6	792	22.6	416	14.3	240
23.1	422	41.5	874	46.8	1072	43.4	944	42.5	915	38.8	799	27.4	507	18.6	289
23.9	438	41.9	883	50.0	1193	45.8	1031	44.0	966	40.0	835	32.8	626	19.0	291
28.8	536	46.1	1033			48.3	1128	46.0	1037	42.0	896	39.2	790	19.4	296
34.8	672	50.2	1190			49.6	1178	46.8	1073	43.2	943	44.9	975	27.2	405
38.1	767							47.4	1090	43.6	954	45.1	979	27.8	416
44.4	959							47.9	1106	45.0	1001	50.0	1168	34.0	526
48.2	1092							49.6	1179	47.0	1075			39.2	639
50.4	1176									50.0	1196			45.4	798
52.4	1259													51.3	976
														54.6	1097
														58.3	1238

De methylalkohol, eveneens het zuiverste handelspreparaat, werd met jodium en natron behandeld, daarna met ongebluschte kalk gekookt, eenigen tijd op natrium gezet, en dan afgedistilleerd. Ten slotte werd hij gefractioneerd, en de fractie, die tusschen 64.5° en 64.6° (760 mm.) overging, afzonderlijk opgevangen. Hij was volkomen watervrij, zooals uit de bekende reactie met anhydrisch kopersulfaat bleek. Het zout zelf bleef geheel wit, terwijl een gedeelte ervan langzaam met lichtgroene kleur in oplossing ging.

In tabel 1 (p. 1372) en fig. 4 (p. 1373) zijn de resultaten, wat betreft de enkele componenten en de driephasenkromme weergegeven. De punten der laatste zijn met verschillende mengsels bepaald; zij passen, zooals men ziet, alle zeer goed in de lijn.

De metingen, die op de verschillende mengsels boven hun mengpunt betrekking hebben, zijn in tabel 2 (p. 1374) vereenigd. Het blijkt, dat de spanningen der meeste mengsels bijna gelijk zijn, en de dampdruklijnen zoo dicht bij elkaar liggen, dat wij ervan moesten afzien, ze samen in een figuur weer te geven. In plaats daarvan hebben wij voor een aantal temperaturen de p,x diagrammen geconstrueerd, doordat wij op de verschillende krommen de bij die temperaturen behoorende drukwaarden interpoleerden.

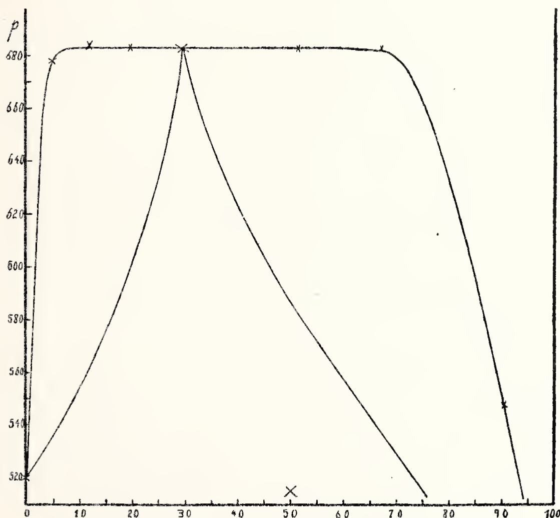


Fig. 5.

De uitkomst toonde aan, dat het bij het gekozen stelsel niet mogelijk is, den gezochten overgang te realiseeren. Tot even onder het kritisch punt toe, dat wij bij 37,4° vonden, behoudt de p,x-kromme de gedaante van fig. 2 met den driephasendruk als hoogsten (fig. 5, (p. 1375) die als voorbeeld voor 35° gegeven wordt). Wel is de vorm zeer merkwaardig, en gaan de vloeistoftakken bijna vloeiend in de horizontale lijn over, zooals trouwens voor andere stelsels met beperkte mengbaarheid bekend is, doch een maximum is niet met eenige zekerheid te constateeren.

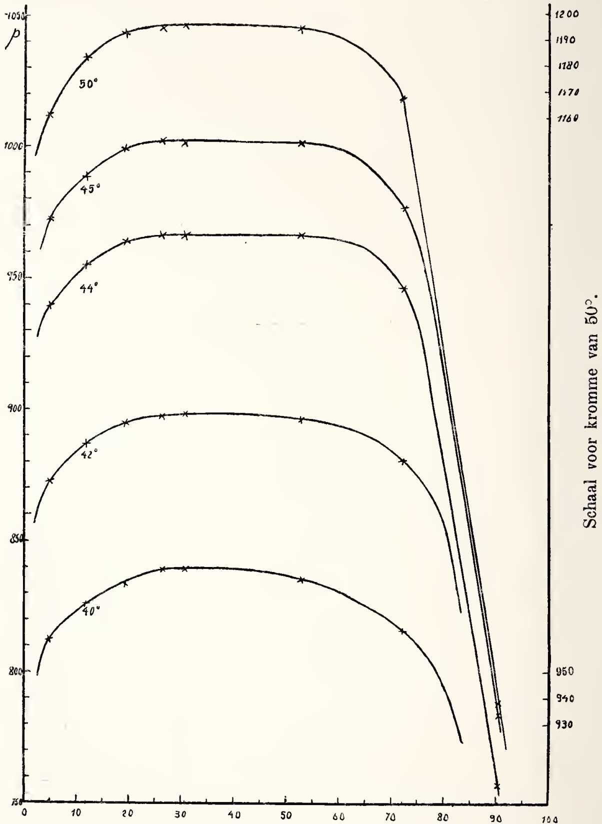


Fig. 6.

Het kon zijn, dat de krommen voor temperaturen boven het kritisch punt nog uitsluitsel gaven. Was er een duidelijke overgang van de kromme van fig. 2 in die van fig. 3 geweest, dan had men boven het kritisch punt een kromme moeten vinden met een maximum en een buigpunt. Evenwel bleken de krommen over een groote breedte zeer vlak te loopen (fig. 6 p. 1376), zoodat het onmogelijk vast te stellen is, waar het maximum ligt, terwijl het buigpunt reeds dadelijk boven het kritisch punt verdwenen is [1].

Er bleef ons nu nog over na te gaan, of met behulp van bepalingen van de dampsamenstelling een bevredigender resultaat te verkrijgen was. Daartoe brachten wij een tweelagensysteem aan den kook, distilleerden een deel van den damp af, en bepaalden ten einde de concentratie hiervan te weten te komen, het mengpunt van het distillaat.

Allereerst was een bepaling van de geheele ontmengingslijn noodig, die wij op de bekende synthetische methode in dicht gesmolten buisjes uitvoerden. Onze resultaten (tabel 3 en fig. 7) wijken van de vroeger door ROTHMUND verkregene nog al af; het kritisch punt ligt bij ons 2.5° lager. Het is niet twijfelachtig, dat dit verschil

TABEL 3.

Conc. mol.proc.	*t* mengpunt	
8.1	21.8	
14.1	30.8	
21.2	35.9	
24.4	37.4	
29.4	37.1	
34.6	37.2	Het kritisch punt ligt tusschen deze twee concentraties.
42.4	37.4	
50.8	35.3	
52.9	34.7	
61.0	28.7	
72.8	11.2	
81.0	—15	

[1]) Verg. het door SCHREINEMAKERS onderzochte stelsel phenol-water, Zeitschr. phys. Chem. **35**, 459, 1900.

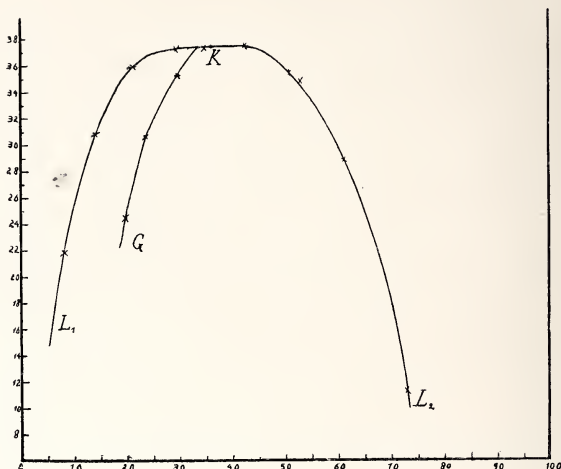


Fig. 7.

aan verschil in zuiverheid der stoffen toe te schrijven is, waarbij wij in de eerste plaats aan sporen water denken [1]).

Ook wij hebben in onze eerste proeven wel kritische punten van 40° of zelfs hooger gevonden. Het is van voldoende bekendheid, dat kleine verontreinigingen een reusachtigen invloed speciaal op het kritisch punt uitoefenen, dit bijv. 100 keer zoo sterk kunnen verhoogen als het kookpunt. Vandaar dan ook, dat de tripelkromme voor eenige onzuiverheid lang niet zoo gevoelig is, en zoowel onze oudere bepalingen met stoffen, die het kritisch punt 39,5° gaven, als de nieuwere volkomen in één lijn passen.

Wij gebruikten voor de kookproeven een toestel, dat eenigen tijd geleden door Prof. Smits geconstrueerd is. Oorspronkelijk hadden wij de vloeistoffen door electrische verhitting aan den kook gebracht door middel van een platinadraadje in de vloeistof. Het bleek echter, dat hierbij een ontleding optrad, direct merkbaar door een abnormaal hoog mengpunt van het distillaat. Prof. Smits wees ons toen op het hiernevens afgebeelde toestel. In den platten bodem van een glazen buis ter lengte van 20 c.m. en met een doorsnee van 2 c.m. is een nauw verlengstukje *A*, 2 c.m. lang, ingesmolten, hetwelk met een laagje asbestpapier en nickelindraad omwik-

[1]) Wij overtuigden ons, dat $1^0/_{00}$ H_2O het mengpunt 0.7° verhoogt.

keld wordt. Hierdoor wordt de vloeistof in dit korte buisje zoo sterk verwarmd, dat zij al spoedig de geheele massa aan het koken brengt. Toch was bij de proeven onder lageren druk het inbrengen van kookbuisjes gewenscht, daar de stoffen in zeer hooge mate aan kookvertraging lijden. Het geheele apparaat werd in een asbestmantel met watten ingepakt. Het is voorzien van een ingeslepen stop, waaraan een thermometer (Anschütz) hangt en van twee zijbuizen: *B*, die naar een terugvloeikoeler voert, en *C*, die — met een nickelindraad omwikkeld en tijdens de proef voldoende verwarmd — den damp naar den ontvanger leidt. Deze bestond uit een wijde glazen buis, afgekoeld door koolzuur en alkohol, in welke zich een of twee kleine, van een vernauwing voorziene buisjes bevonden, die ongeveer 1 c.c. vloeistof konden bevatten. Is het oogenblik van opvangen van het distillaat aangebroken, dan wordt de wijde buis zoo gedraaid, dat een der nauwe buisjes onder het uiteinde van *C* komt. Is dit voldoende gevuld, dan wordt de proef afgebroken, en het buisje dichtgesmolten. Door nu het mengpunt te bepalen, kenden wij bij de bepaalde kooktemperatuur de samenstelling van den damp, terwijl die van de beide vloeistoffen uit de ontmenglijn gevonden werd. Bij een drietal drukken deden wij deze proef met de resultaten, die in tabel 4 vermeld en in fig. 7 geteekend zijn.

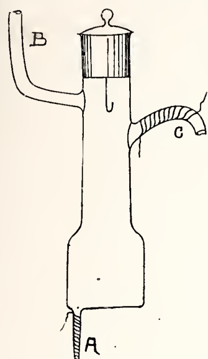


Fig. 8.

TABEL 4.

p	t	x_G
444 mm	24.4°	19%
600	31.5	24
688	35.2	30

Terwijl de beide eerste bepalingen geen moeite opleveren, stuit men bij de derde op een gewichtig bezwaar, dat ons van verdere bepalingen boven 35,2° deed afzien. Het mengpunt van dit laatste distillaat valt n.l. bij 37,2°, dus op het bijna horizontale deel der ontmenglijn. Daardoor wordt de bepaling der concentratie op deze

manier onnauwkeurig, wat bij de hoogere temperaturen nog veel erger worden zou. Wij hebben haar voor dit distillaat gecontroleerd door er een gewogen hoeveelheid zwavelkoolstof aan toe te voegen, aldus samenstelling en mengpunt zóó wijzigend, dat zij op een beter te bepalen stuk van de ontmenglijn kwamen te liggen. Een belangrijk verschil werd hierbij niet gevonden.

Intusschen blijkt uit de genomen proeven voldoende, dat dit systeem geen duidelijk bewijs van de theorie levert. Wel ziet men, dat de damplijn bij extrapolatie de ontmenglijn bij 32 molproc. snijdt, terwijl het kritisch punt bij 36 °/₀ ligt, doch de temperaturen van snij- en kritisch punt zijn niet te onderscheiden. Waar de ligging der krommen zoo ongunstig voor ons doel was, besloten wij met dit stelsel geen verdere proeven te doen. Onze uitkomst is in zooverre merkwaardig, dat, al leert de theorie, dat de damplijn het ontmenggebied niet in het kritisch punt verlaat, de vroeger geuite meening, dat dit wèl het geval moet zijn, toch niet heel ver bezijden de waarheid was.

Anorg. Chem. Laboratorium
Universiteit van Amsterdam.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan: „*Over* EINSTEIN's *theorie der zwaartekracht.*" IV.

(Aangeboden in de vergadering van 28 October 1916).

§ 53. De in mijne vorige mededeeling gevonden uitdrukkingen voor de spannings-energiecomponenten van het gravitatieveld geven nog tot eenige opmerkingen aanleiding. Verstaat men onder δ_h^e een grootheid die de waarde 1 heeft voor $e=h$ en 0 is voor $e\neq h$, dan kunnen die uitdrukkingen geschreven worden in den vorm (zie de verg. (52) en (78))

$$t_h^e=\frac{1}{2\varkappa}\left\{-\delta_h^e\,Q+\Sigma\,(ab)\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\,g_{ab,h}+\Sigma\,(abf)\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\,g_{ab,fh}-\right.$$
$$\left.-\Sigma\,(abf)\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,ef}}\right)g_{ab,h}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(88)$$

Zij bevatten dus eerste en tweede afgeleiden der grootheden g_{ab}. Daarentegen heeft EINSTEIN waarden voor de spannings-energiecomponenten aangegeven, die slechts de eerste afgeleiden bevatten en dientengevolge in menig opzicht bruikbaarder zijn.

Ik zal nu vooreerst aantoonen dat men ook van (88) uitgaande tot formules zonder de tweede afgeleiden kan geraken.

§ 54. Te dien einde beschouwen wij het complex $\mathfrak{u}$, dat bepaald wordt door

$$\mathfrak{u}_h^e = \frac{1}{2\varkappa}\left\{ \delta_h^e\, Q - \Sigma\,(abf)\,\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\, g_{ab,f}\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

en zoeken de divergentie daarvan.

Men heeft

$$(div\ \mathfrak{u})_h = \Sigma\,(e)\,\frac{\partial\, \mathfrak{u}_h^e}{\partial x_e} = \frac{1}{2\varkappa}\left\{\frac{\partial Q}{\partial x_h} - \Sigma\,(abfe)\,\frac{\partial^2}{\partial x_e \partial x_h}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\, g_{ab,f}\right)\right\}$$

of wel

$$(div\ \mathfrak{u})_h = \frac{1}{2\varkappa}\frac{\partial R}{\partial x_h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

als wij stellen

$$R = Q - \Sigma\,(abfe)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\, g_{ab,f}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

Nu kunnen wij $Q = \sqrt{-g}\ G$ splitsen in twee deelen waarvan het eerste Q_1 alleen eerste differentiaalquotienten der grootheden g_{ab} bevat, en het tweede Q_2 een homogene lineaire functie van de tweede afgeleiden dier grootheden is. Uit dit laatste volgt dat, wanneer men, met ontwikkeling van den laatsten term, (91) vervangt door

$$R = Q_1 + Q_2 - \Sigma\,(abfe)\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\, g_{ab,fe}\right) - \Sigma\,(abfe)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\right) g_{ab,f}.$$

de tweede en de derde term elkaar opheffen. Dus:

$$R = Q_1 - \Sigma\,(abfe)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\right) g_{ab,f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

Bepalen wij nu een complex $\mathfrak{v}$ door de vergelijking

$$\mathfrak{v}_h^e = -\frac{1}{2\varkappa}\,\delta_h^e\, R, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

dan is

$$(div\ \mathfrak{v})_h = -\frac{1}{2\varkappa}\frac{\partial R}{\partial x_h}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

Stelt men eindelijk

$$\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} + \mathfrak{u} + \mathfrak{v},$$

dan volgt uit (90) en (94)

$$div\ \mathfrak{t}' = div\ \mathfrak{t}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

en uit (88), (89), (93) en (92)

$$\mathfrak{t}'^h_h = \frac{1}{2\varkappa}\left\{ - Q_1 + \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,h}}\, g_{ab,h} - \Sigma\,(abf)\,\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fh}}\right) g_{ab,f} - \right.$$

$$-\Sigma(abf)\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,hf}}\right)g_{ab,h}+\Sigma(abfe)\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\right)g_{ab,f}\Big\} \quad (96)$$

en, voor $e \neq h$,

$$t'^{e}_{h}=\frac{1}{2\varkappa}\Big\{\Sigma(ab)\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}g_{ab,h}-\Sigma(abf)\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\right)g_{ab,f}-$$

$$-\Sigma(abf)\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,ef}}\right)g_{ab,h}\Big\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

Aan (95) ziet men dat de grootheden t'^{e}_{h} evengoed als de componenten t^{e}_{h} voor de spannings-energiecomponenten kunnen genomen worden, en aan (96) en (97) dat deze nieuwe uitdrukkingen slechts de eerste differentiaalquotienten der coëfficienten g_{ab} bevatten; zij zijn homogene quadratische functiën van die differentiaalquotienten. Men ziet dit in als men bedenkt dat Q_1 een functie van dezen aard is, dat alleen Q_1 iets voor den tweeden term in (96) en den eersten term in (97) oplevert, en dat de differentiaalquotienten van Q die in de volgende termen voorkomen, slechts de grootheden g_{ab}, maar geene afgeleiden daarvan bevatten.

§ 55. De door Einstein gevonden spannings-energiecomponenten hebben een geheel anderen vorm dan den bovenstaanden. Zij zijn nl.

$$t^{e}_{(E)h}=\frac{1}{2\varkappa}\delta^{e}_{h}\,\Sigma(abcf)\,g^{ab}\,\Gamma_{ac}^{f}\,\Gamma_{bf}^{c}-\frac{1}{\varkappa}\,\Sigma(abc)\,g^{ab}\,\Gamma_{ac}^{e}\,\Gamma_{bh}^{c},$$

waarbij ter vereenvoudiging is aangenomen dat $\sqrt{-g}=1$ is. Verder is

$$\Gamma_{ab}^{c}=-\left\{\begin{matrix}ab\\c\end{matrix}\right\}=-\Sigma(e)\,g^{ce}\begin{bmatrix}ab\\e\end{bmatrix}.$$

De vraag rijst of, wanneer wij de onderstelling $\sqrt{-g}=1$ ook in (96) en (97) invoeren (zoodat $Q=G$ wordt) t' met $t_{(E)}$ overeenstemt. Ik heb mij daarvan overtuigd voor het bijzondere geval dat overal voor $a \neq b$ $g_{ab}=0$ is, en acht het dus wel waarschijnlijk dat de overeenstemming in het algemeen zal bestaan.

In mijne vorige mededeeling werd er reeds op gewezen dat de spannings-energiecomponenten t^{e}_{h} geen „tensor" vormen, maar wat ik een „complex" noemde. Evenzoo kan men bij de door (96) en (97) bepaalde grootheden t'^{e}_{h} en bij de door Einstein aangegeven uitdrukkingen alleen van een complex spreken. Verlangt men voor het gravitatieveld een spannings-energie*tensor*, dan blijven niet anders over dan de door (86) en (57) bepaalde grootheden e_{vh}, waarvan de waarden steeds gelijk en tegengesteld zijn aan de overeenkomstige spannings-energiecomponenten $\mathfrak{T}^{e}_{h}$ voor de materie of het electromagnetisch veld.

Wij merken hierbij op dat de vier vergelijkingen

$$\Sigma\,(e)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\,(\mathfrak{T}_h^{\,e} + \mathfrak{T}^e{}_{(g)h}\,) = 0$$

steeds op hetzelfde neerkomen, onverschillig welke der vier uitdrukkingen $\mathfrak{t}^e{}_{0h}$, $t_h{}^e$, $\mathfrak{t}'{}_h{}^e$, $\mathfrak{t}^e{}_{(E)h}$ men voor de spannings-energiecomponenten $\mathfrak{T}^e{}_{(g)h}$ van het gravitatieveld neemt. Wil men echter in een concreet geval van de vergelijkingen gebruik maken om te berekenen hoe de hoeveelheid van beweging en de energie van de materie en het electromagnetisch veld door de gravitatiewerkingen veranderen, dan verdient het de voorkeur met $\mathfrak{t}'{}_h{}^e$ of $\mathfrak{t}^e{}_{(E)h}$ te werken, en wel juist omdat deze grootheden homogene quadratische functiën van de afgeleiden $g_{ab,c}$ zijn.

De ervaring leert nl. dat men de in werkelijkheid voorkomende gravitatievelden in dien zin als zwak kan beschouwen, dat de waarden der g_{ab}'s weinig verschillen van die, welke men zou mogen aannemen als er geen gravitatieveld was. Voor deze laatste, die ik de „normale" waarden zal noemen, kan men bij gebruik van rechthoekige coördinaten stellen

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = c^2, \quad g_{ab} = 0, \quad \text{voor } a \neq b. \qquad (98)$$

Voor het gravitatieveld kunnen nu de afwijkingen van deze waarden bij eerste, en in de meeste gevallen voldoende benadering evenredig met de gravitatieconstante $\varkappa$ gesteld worden. Deze komt dan ook als factor in de differentiaalquotienten $g_{ab,c}$ voor en wegens den genoemden aard der functiën $\mathfrak{t}'{}_h{}^e$ (die bovendien den factor $\frac{1}{\varkappa}$ bevatten) worden deze evenredig met $\varkappa$, zoodat zij in een zwak gravitatieveld kleine waarden aannemen.

§ 56. Wegens den ingewikkelden vorm der vergelijkingen (96) en (97) zullen wij ons er toe bepalen, de waarde van $\mathfrak{t}'{}_4{}^4$, d.w.z. van de energie per volume-eenheid voor enkele gevallen te berekenen. Wij verkrijgen daarbij een aanmerkelijke vereenvoudiging als wij ons tot stationaire velden bepalen. Dan verdwijnen alle differentiaalquotienten naar x_4, zoodat uit (96) volgt

$$\mathfrak{t}'{}_4{}^4 = \frac{1}{2\varkappa}\left\{ -\,Q_1 + \Sigma\,(abfe)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,\,fe}}\right) g_{ab,f} \right\} \quad . \quad . \qquad (99)$$

Wij zullen de berekening hiervan uitvoeren vooreerst voor een veld zonder gravitatie en ten tweede voor het geval van een bolvormig aantrekkend lichaam, waarin de materie symmetrisch rondom het middelpunt verdeeld is.

Bestaat er geen gravitatieveld, dan kunnen wij voor de groot-

heden g_{ab} de „normale" waarden nemen en wel zijn deze, als wij met rechthoekige coördinaten werken, in (98) gegeven.

Daaraan beantwoorden voor het geval dat men met de in § 48 genoemde poolcoördinaten wil werken, de formules

$$\left.\begin{array}{c} g_{11} = -\frac{r^2}{1-x_1^{\,2}},\quad g_{22} = -r^2(1-x_1^{\,2}),\quad g_{33} = -1,\quad g_{44} = c^2, \\ g_{ab} = 0, \quad \text{voor } a \neq b. \end{array}\right\} \quad (100)$$

Hebben wij met een aantrekkenden bol te doen, en kiezen wij het middelpunt daarvan tot oorsprong, dan kunnen wij, met poolcoördinaten werkende, stellen

$$g_{11} = -\frac{u}{1-x_1^{\,2}},\quad g_{22} = -(1-x_1^{\,2})\,u,\quad g_{33} = -v,\quad g_{44} = w. \quad (101)$$

waarin u, v, w functiën van r zijn. In diezelfde functiën kan men ook de g_{ab}'s die in een rechthoekig coördinatenstelsel gelden, uitdrukken.

Deze zijn

$$g_{11} = -\frac{u}{r^2} + \frac{x_1^{\,2}}{r^2}\left(\frac{u}{r^2} - v\right),\ enz.$$

$$g_{12} = \frac{x_1 x_2}{r^2}\left(\frac{u}{r^2} - v\right),\ enz.$$

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0. \qquad g_{44} = w.$$

Met „enz" is hier bedoeld dat voor g_{22}, g_{33} dergelijke uitdrukkingen gelden als voor g_{11}, en voor g_{23}, g_{31} dergelijke als voor g_{12}.

§ 57. Om de differentiaalvergelijkingen waardoor u, v, w bepaald worden, af te leiden, kunnen wij naar willekeur van rechthoekige coördinaten of van poolcoördinaten gebruik maken; dit laatste is echter het eenvoudigst. Uit (40) en (101) volgt, als wij differentiaties naar r door accenten aanduiden,

$$G_{11} = \frac{1}{1-x_1^{\,2}}\left(-1 + \frac{u''}{2v} - \frac{u'v'}{4v^2} + \frac{u'w'}{4vw}\right),$$

$$G_{22} = (1-x_1^{\,2})\left(-1 + \frac{u''}{2v} - \frac{u'v'}{4v^2} + \frac{u'w'}{4vw}\right),$$

$$G_{33} = \frac{u''}{u} - \frac{u'^2}{2u^2} - \frac{u'v'}{2uv} - \frac{v'w'}{4vw} + \frac{w''}{2w} - \frac{w'^2}{4w^2},$$

$$G_{44} = -\frac{u'w'}{2uv} + \frac{v'w'}{4v^2} - \frac{w''}{2v} + \frac{w'^2}{4vw},$$

$$G_{ab} = 0,\ voor\ a \neq b.$$

Hiermede zijn de eerste leden der veldvergelijkingen (65) gevonden. Vóór wij echter die vergelijkingen nader beschouwen, zullen wij de

vereenvoudiging invoeren, dat de g_{ab}'s zeer weinig van de normale waarden (100) afwijken. Deze laatste beantwoorden aan

$$u = r^2 \quad , \quad v = 1 \quad , \quad w = c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

en wij stellen dus nu

$$u = r^2 (1 + \lambda) \quad , \quad v = 1 + \mu \quad , \quad w = c^2 (1 + \nu) \quad . \quad . \quad (103)$$

Wij beschouwen de van r afhankelijke grootheden λ, μ, ν, evenals hunne differentiaalquotienten als oneindig klein van de eerste orde en verwaarloozen in de veldvergelijkingen grootheden van tweede en hoogere orde. Dientengevolge mogen wij voor G_{11} enz. schrijven

$$G_{11} = \frac{1}{1-x_1^2}(\lambda + 2r\lambda' + \tfrac{1}{2}r^2\lambda'' - \mu - \tfrac{1}{2}r\mu' + \tfrac{1}{2}r\nu'),$$

$$G_{22} = (1-x_1^2)(\lambda + 2r\lambda' + \tfrac{1}{2}r^2\lambda'' - \mu - \tfrac{1}{2}r\mu' + \tfrac{1}{2}r\nu'),$$

$$G_{33} = \frac{2}{r}\lambda' + \lambda'' - \frac{1}{r}\mu' + \tfrac{1}{2}\nu'',$$

$$G_{44} = -c^2\left(\frac{1}{r}\nu' + \tfrac{1}{2}\nu''\right).$$

In de tweede leden der veldvergelijkingen (65) kunnen wij voor g_{ab} de normale waarde stellen; bovendien zullen wij voor T_{ab} en T de waarden nemen, die voor een stelsel incohaerente stoffelijke punten gelden. Dit laatste is geoorloofd als wij geene andere inwendige spanningen onderstellen dan die welke uit de onderlinge aantrekking voortvloeien en bij den gekozen graad van benadering verwaarloosd mogen worden.

Daar wij de aantrekkende materie in rust onderstellen is volgens (10), (16) en (15) (1915) $w_1 = w_2 = w_3 = 0$, $w_4 = \varrho$, $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $u_4 = c^2\varrho$, $P = c\varrho$.

Verder is volgens (23) (1915) in de nu gebruikte notatie

$$\mathfrak{T}e_h = \frac{u_h w_e}{P},$$

zoodat van de spannings-energiecomponenten der materie

$$\mathfrak{T}_4^{\,4} = c\varrho$$

de eenige van nul verschillende is. Uit (66) volgt dan verder dat ook van de grootheden T_{ab} slechts één, nl. T_{44} niet nul is, en wel is, (daar $\sqrt{-g} = c\,r^2$ mag worden gesteld),

$$T_{44} = \frac{c^2}{r^2}\varrho, \quad T = \frac{1}{r^2}\varrho.$$

Ten slotte krijgt men de drie differentiaalvergelijkingen

$$\lambda + 2\,r\,\lambda' + \tfrac{1}{2}\,r^2\,\lambda'' - \mu - \tfrac{1}{2}\,r\,\mu' + \tfrac{1}{2}\,r\,\nu' = -\tfrac{1}{2}\,\varkappa\,\varrho, \quad . \quad (104)$$

$$2\,r\,\lambda' + r^2\,\lambda'' - r\,\mu' + \tfrac{1}{2}\,r^2\,\nu'' = -\tfrac{1}{2}\,\varkappa\,\varrho, \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

$$r\,\nu' + \tfrac{1}{2}\,r^2\,\nu'' = \tfrac{1}{2}\,\varkappa\,\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

Wij merken op dat $\varrho dx_1 dx_2 dx_3$ de „massa" voorstelt, die in het volume-element $dx_1 dx_2 dx_3$ gelegen is. Uit de beteekenis van x_1, x_2, x_3 (§ 48) volgt dat men de massa in de schil tusschen bollen met de stralen r en $r + dr$ verkrijgt als men $\varrho dx_1 dx_2 dx_3$ naar x_1 tusschen de grenzen -1 en $+1$ en naar x_2 tusschen 0 en 2π integreert. Daar ϱ alleen van r afhangt, wordt de laatstgenoemde massa $4\pi\varrho dr$, waaruit volgt dat ϱ met de „dichtheid" in den gewonen zin van het woord, die wij $\overline{\varrho}$ zullen noemen, verbonden is door de betrekking

$$\varrho = r^2 \overline{\varrho}.$$

De differentiaalvergelijkingen gelden ook buiten den bol als men daar $\varrho = 0$ stelt. Men kan zich eerst voorstellen dat nabij het oppervlak ϱ geleidelijk in 0 overgaat en dan eene scherpe begrenzing als een grensgeval behandelen. Daar bij al de voorgaande beschouwingen stilzwijgend ondersteld is dat de tweede differentiaalquotienten der grootheden g_{ab} overal eindige waarden hebben, zullen ook bij een scherpe begrenzing ν en ν' aan het oppervlak doorloopend zijn.

§ 58. Uit (106) volgt

$$\nu' = \frac{\varkappa}{r^2} \int_0^r \varrho \, dr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

waarbij de integratieconstante bepaald is door de overweging dat voor $r = 0$ alle grootheden g_{ab} en hunne afgeleiden eindig moeten zijn, zoodat voor $r = 0$ het product $r^2 \nu'$ nul moet worden. Verder vindt men, daar het aannemelijk is dat op oneindigen afstand ν verdwijnt,

$$\nu = \varkappa \int_\infty^r \frac{dr}{r^2} \int_0^r \varrho dr \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Daarentegen worden λ en μ niet geheel door de differentiaalvergelijkingen bepaald. Telt men n.l. bij (104) de vergelijkingen (105) en (106) op, na ze resp. met $-\frac{1}{2}$ en $+\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd te hebben, dan komt er

$$\lambda + r\lambda' - \mu + r\nu' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

en men ziet gemakkelijk dat, zoodra deze voorwaarde en (106) vervuld zijn, aan (104) en (105) voldaan is. Wij hebben dus alleen met (108) en (109) te doen. De aldus in λ en μ overblijvende onbepaaldheid is een noodzakelijk gevolg van de covariantie der veldvergelijkingen; zij geeft tot geenerlei bezwaar aanleiding.

Uit (107) volgt dat dicht bij het middelpunt

$$\nu' = \tfrac{1}{3}\,\varkappa\varrho_0 r$$

is, als ϱ_0 de dichtheid in het middelpunt is, terwijl voor ν zelf uit (108) een eindige waarde wordt gevonden. Op deze wijze wordt bevestigd wat boven omtrent de waarden in het middelpunt gezegd werd. Wij zullen ons voorstellen dat in dat punt ook λ, μ en hunne differentiaalquotienten eindig zijn. Evenzoo nemen wij aan, en wij mogen dat met het oog op (109) doen, dat aan het oppervlak van den bol ook λ, μ, λ' en μ' doorloopend zijn.

Voor een uitwendig punt vindt men uit (108), als a de straal van den bol is,

$$\nu = -\frac{\varkappa}{r}\int\limits_0^a \varrho\, dr.$$

Zonder met (109) in strijd te komen kunnen wij aannemen dat op grooten afstand van den bol ook λ en μ evenredig met $\frac{1}{r}$, en dus λ' en μ' evenredig met $\frac{1}{r^2}$ afnemen.

§ 59. Wij kunnen nu de berekening van $t'^{\,4}_{4}$ (§ 56) voortzetten. De waarden (101) in (99) substitueerende vind ik bij gebruik van poolcoördinaten

$$t'^{\,4}_{4} = -\frac{1}{2\varkappa}\,u\sqrt{\frac{w}{v}}\left(\tfrac{1}{2}\frac{u'^2}{u^2} + \frac{u'w'}{uw}\right),$$

waaruit door substitutie van (102) voor een veld zonder gravitatie volgt

$$t'^{\,4}_{4} = -\frac{c}{\varkappa}.$$

Volgens deze uitkomst zou men dus, met poolcoördinaten werkende, aan een veld zonder gravitatie zekere negatieve energiewaarde moeten toeschrijven, en wel zou (verg. § 57) de energie in de schil tusschen twee bollen, met de stralen r en $r + dr$ om den oorsprong beschreven

$$-\frac{4\pi c}{\varkappa}\,dr$$

worden. De dichtheid der energie in den gewonen zin van het woord zou omgekeerd evenredig met r^2 worden, en dus in den oorsprong zelf oneindig groot zijn.

Het behoeft nauwelijks gezegd te worden dat men, voor hetzelfde geval van een veld zonder gravitatie, voor de energie nul vindt, als

men zich van rechthoekige coördinaten bedient; de normale waarden van g_{ab} zijn dan constanten en hunne differentiaalquotienten verdwijnen.

§ 60. Wij zullen nu, van rechthoekige coördinaten gebruik makende, de waarde van $t'^{\,4}_{4}$ in het veld van een bolvormig lichaam aangeven, en wel met de in § 57 ingevoerde benadering. Wij stellen dus

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= -(1+\lambda) + \frac{x_1^2}{r^2}(\lambda-\mu), \ enz. \\ g_{12} &= \frac{x_1 x_2}{r^2}(\lambda-\mu), \ enz. \\ g_{14} &= g_{24} = g_{34} = 0 \quad , \quad g_{44} = c^2(1+\nu). \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (110)$$

Hiermede vind ik, van de betrekking (109) gebruik makende, [1])

$$t'^{\,4}_{4} = \frac{c}{4\varkappa}\left\{\nu'^2 + \frac{1}{r}(\lambda-\mu)\left[\frac{1}{r}(\lambda-\mu) + 2(\lambda'-\mu')\right]\right\} \quad . \ . \ (111)$$

Hieruit blijkt (verg. § 58) dat op een afstand van den aantrekkenden bol $t'^{\,4}_{4}$ evenredig met $\frac{1}{r^4}$ afneemt. Verder verdient het de aandacht dat, wegens de in § 58 aangewezen onbepaaldheid, wat de verdeeling der energie over de ruimte betreft, eenige onzekerheid blijft bestaan, maar dat de totale energie van het gravitatieveld

$$E = 4\pi \int_0^\infty t'^{\,4}_{4}\, r^2\, dr$$

een geheel bepaalde grootte heeft.

---

[1]) Van de lange berekening moge hier alleen vermeld worden dat het aanbeveling verdient, de waarden (110) te schrijven in den vorm

$$g_{11} = -1 + \alpha + \frac{\partial^2\beta}{\partial x_1^2}, \ enz.$$

$$g_{12} = \frac{\partial^2\beta}{\partial x_1 \partial x_2}, \ enz.$$

waarbij α en β oneindig kleine functiën van r zijn. Men vindt dan

$$t'^{\,4}_{4} = \frac{c}{2\varkappa}\left\{-\tfrac{1}{2}\Sigma(a)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_a}\right)^2 + \Sigma(a)\frac{\partial\nu}{\partial x_a}\frac{\partial\alpha}{\partial x_a} + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{4}\Sigma(a\,i\,k)\left[\frac{\partial^3\beta}{\partial x_a \partial x_i^2}\,\frac{\partial^3\beta}{\partial x_a \partial x_k^2} - \left(\frac{\partial^3\beta}{\partial x_a \partial x_i \partial x_k}\right)^2\right]\right\}$$

$$(a, i, k = 1, 2, 3)$$

wat in (111) overgaat als men de betrekkingen tusschen α, β en λ, μ, n.l.

$$\alpha + \frac{1}{r}\beta' = -\lambda \quad , \quad -\frac{1}{r}\beta' + \beta'' = \lambda-\mu$$

en de hiermede uit (109) voortvloeiende gelijkheid $\alpha' = \nu'$ in aanmerking neemt.

Bij de integratie valt nl. de laatste term van (111) weg. Immers, na vermenigvuldiging met r^2 wordt die term

$$(\lambda-\mu)^2+2r(\lambda-\mu)(\lambda'-\mu')=\frac{d}{dr}\left[r(\lambda-\mu)^2\right].$$

De integraal hiervan is 0 omdat (verg. §§ 57 en 58) $r(\lambda-\mu)^2$ aan het oppervlak van den bol doorloopend is, en zoowel voor $r=0$ als voor $r=\infty$ verdwijnt.

Wij hebben dus

$$E=\frac{\pi c}{\varkappa}\int_0^\infty \nu'^2 r^2 dr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

waarin voor ν' de waarde (107) kan worden gesubstitueerd. Is b.v. de dichtheid $\bar{\varrho}$ overal binnen den bol dezelfde, dan wordt in een inwendig punt

$$\nu'=\tfrac{1}{3}\varkappa\bar{\varrho}\,r$$

en in een uitwendig punt

$$\nu'=\tfrac{1}{3}\varkappa\bar{\varrho}\frac{a^3}{r^2}.$$

Daaruit volgt

$$E=\tfrac{2}{15}\pi c\varkappa\bar{\varrho}^2 a^5 .$$

§ 61. De algemeene voor $t'_4{}^4$ gevonden vergelijking (99) laat eene voor de hand liggende herleiding toe. Men heeft nl.

$$\Sigma(abfe)\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\right)g_{ab,f}=\Sigma(abfe)\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}g_{ab,f}\right)-$$
$$-\Sigma(abfe)\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}g_{ab,fe}$$

en kan hier voor den laatsten term schrijven $-Q_2$ (§ 54). Dan wordt

$$t'_4{}^4=\frac{1}{2\varkappa}\left\{-Q+\Sigma(abfe)\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}g_{ab,f}\right)\right\}, \quad . \quad . \quad (113)$$

in welke formule aan e en f de waarden 1, 2, 3 moeten worden gegeven.

De binnen een gesloten oppervlak σ liggende gravitatie-energie bestaat dus uit twee deelen E_1 en E_2, waarvan het eerste is

$$E_1=-\frac{1}{2\varkappa}\int Q\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

terwijl het andere door oppervlakte-integralen kan worden voorgesteld. Nl., als q_1, q_2, q_3 de richtingsconstanten der naar buiten getrokken normaal zijn

$$E_2 = \frac{1}{2\varkappa} \Sigma\,(abfe) \int \frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\, g_{ab,f}\, q_e\, d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

In het geval van een oneindig zwak, door λ, μ, ν (§ 57) bepaald gravitatieveld bevatten beide uitdrukkingen E_1 en E_2 grootheden van de eerste orde, maar wij kunnen gemakkelijk verifieeren dat deze elkaar in de som opheffen, zoodat de geheele energie, zooals wij reeds weten, van de tweede orde is.

Uit $Q = \sqrt{-g}\, G$ en de vergelijkingen van § 32 volgt nl.

$$\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}} = \tfrac{1}{2} \sqrt{-g}\, (2 g^{ab} g^{fe} - g^{bf} g^{ae} - g^{af} g^{be}), \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

zoodat wij kunnen schrijven

$$E_2 = \frac{1}{4\varkappa} \int \sqrt{-g}\; \Sigma\,(abfe)\, (2 g^{ab} g^{fe} - g^{bf} g^{ae} - g^{af} g^{be})\, g_{ab,f}\, q_e\, d\sigma.$$

Bepalen wij ons hier tot de grootheden van de eerste orde, dan kunnen wij, daar $g_{ab,f}$ van die orde is, voor alle andere grootheden de normale waarden nemen. Vele daarvan zijn 0 en men vindt

$$E_2 = -\frac{c}{2\varkappa} \Sigma(ae) \int g^{aa}\, (g_{aa,e} - g_{ae,a})\, q_e\, d\sigma. \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Wij moeten hier $a = 1, 2, 3, 4$; $e = 1, 2, 3$ stellen, terwijl wij opmerken dat voor $a = e$ de uitdrukking tusschen haakjes verdwijnt. Voor $a = 4$ wordt de integraal $\int \frac{\partial \nu}{\partial x_e} q_e\, d\sigma$, wat, naar e gesommeerd, geeft

$$\int \frac{\partial \nu}{\partial n}\, d\sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

als n de normaal aan het oppervlak voorstelt. Zijn a en e van elkaar verschillend en geen van beide 4, dan kan men uit (110) en (109) afleiden

$$g_{aa,e} - g_{ae,a} = \frac{\partial \nu}{\partial x_e}.$$

Aangezien elke waarde van e tweemaal voorkomt, n.l. gecombineerd met de twee van e verschillende waarden die a kan aannemen, komt nu bij (118) nog

$$-2 \int \frac{\partial \nu}{\partial n}\, d\sigma,$$

en gaat (117) over in

$$E_2 = \frac{c}{2\varkappa} \int \frac{\partial \nu}{\partial n}\, d\sigma.$$

Daar nu buiten den bol

$$v = -\frac{\varkappa}{r}\int_0^a \varrho \, dr$$

is, is voor elk gesloten oppervlak dat den bol niet omringt, $E_2 = 0$, maar voor elk oppervlak waarmede dit wel het geval is

$$E_2 = 2\pi c \int_0^a \varrho \, dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Wat E_1 betreft, merken wij op dat substitutie van (65) in (41), met inachtneming van (64) leidt tot

$$G = \varkappa T \quad , \quad Q = \varkappa \sqrt{-g}\, T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

Daaruit volgt dat E_1 nul is als zich binnen het oppervlak σ geen materie bevindt. Is dat wel het geval, dan kunnen wij, om G te bepalen, daar deze grootheid onafhankelijk van de coördinatenkeus is, de in § 56 aangegeven waarde van T gebruiken, hetgeen voldoende is om ook E_1 tot in termen van de eerste orde te berekenen. Wij hebben dus

$$G = \frac{\varkappa}{r^2}\,\varrho$$

en, als wij, nu verder rechthoekige coördinaten gebruikende, voor $\sqrt{-g}$ de normale waarde c stellen,

$$Q = \frac{c\varkappa}{r^2}\,\varrho \, .$$

Daaruit volgt door substitutie in (114) voor het geval dat het gesloten oppervlak σ den bol omringt,

$$E_1 = -2\pi c \int_0^a \varrho \, dr \, .$$

Hieruit, in verband met (119), blijkt dat inderdaad in (113), over de geheele ruimte geïntegreerd, de termen van de eerste orde elkander opheffen. Wilde men die van de tweede orde berekenen en dus uit (113) de uitkomst (112) afleiden, dan zou men, wat E_1 betreft, de grootheid T (verg. (120) tot in de orde $\varkappa$ nauwkeurig moeten bepalen en ook de oppervlakte-integralen in (115) nader moeten beschouwen. Wij zullen dit echter laten rusten.

§ 62. De in (113) gegeven uitdrukking voor t'^{4}_{4} en de daaruit afgeleide waarde

$$E = E_1 + E_2$$

der energie van het gravitatieveld zijn geschikt om te doen zien dat, al is t' geen tensor, toch aan het coördinatenstelsel waarin wij de verschijnselen beschrijven, veel kan worden veranderd zonder dat dit op de totale energie invloed heeft. Stel nl. dat wij, x_4 onveranderd latende, in plaats van de tot nog toe gebezigde rechthoekige coördinaten x_1, x_2, x_3 andere grootheden x'_1, x'_2, x'_3 invoeren, die deze of gene doorloopende functiën van x_1, x_2, x_3 zijn, onder dien verstande dat buiten zeker de aantrekkende massa op genoegzamen afstand omringend oppervlak $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$ is. Bij het gebruik dezer nieuwe coördinaten zullen wij in plaats van de grootheden g_{ab} andere, g'_{ab} hebben in te voeren, maar daar buiten het genoemde oppervlak in de g_{ab}'s en hunne differentiaalquotienten geen verandering komt, zal de waarde van E_2, als men het oppervlak σ waarvoor zij berekend wordt zich tot in het oneindige laat verwijderen, tot dezelfde limiet naderen als toen wij de coördinaten x_1, x_2, x_3 gebruikten. Ook de waarde die wij na de coördinatentransformatie voor E_1 vinden zal dezelfde zijn die eerst gold. Noemt men nl. $d\tau$ een in x_1, x_2, x_3-maat uitgedrukt volume-element, en $d\tau'$ hetzelfde volume-element, uitgedrukt in x'_1, x'_2, x'_3-maat, dan is, als Q' de nieuwe waarde van Q is,

$$Q d\tau = Q' d\tau'.$$

Natuurlijk zal men tot het onveranderd blijven der totale energie ook nog kunnen besluiten als x'_1, x'_2, x'_3 overal van x_1, x_2, x_3 afwijken, maar die afwijkingen bij steeds toenemenden afstand tot het aantrekkende lichaam zoo snel afnemen dat zij geen invloed hebben op de bovengenoemde limiet van de uitdrukking (115).

Overigens kan de verkregen uitkomst nog op andere wijze worden ingekleed. Bij de eerst gevolgde beschrijvingswijze, toen wij x_1, x_2, x_3 gebruikten, zijn ϱ [1]) en g_{ab} zekere functiën van x_1, x_2, x_3; bij de nieuwe beschrijvingswijze zijn ϱ', g'_{ab} zekere andere functiën van x_1', x_2', x_3'.

Kennen wij nu, zonder het coördinatenstelsel x_1, x_2, x_3 te verlaten, aan de dichtheid en de zwaartekrachtspotentialen waarden toe, die van x_1, x_2, x_3 op dezelfde wijze afhangen als zooeven ϱ', g'_{ab} van x_1', x_2', x'_3 afhingen, dan hebben wij een nieuw stelsel (bestaande uit aantrekkend lichaam en gravitatieveld) verkregen, dat van het oorspronkelijke stelsel wel is waar verschillend is omdat er nu andere functiën van de coördinaten in voorkomen, maar dat toch door geene waarneming van het oorspronkelijke onderscheiden kan worden. Men heeft n.l.

---

[1]) Hier is met ϱ bedoeld wat in § 56 ϱ genoemd werd.

hier weder met de onbepaaldheid te doen, die een noodzakelijk gevolg is van de covariantie der veldvergelijkingen.

Uit het bovengezegde blijkt nu dat de totale gravitatie-energie in dit nieuwe stelsel even groot zal zijn als in het oorspronkelijke, zooals wij reeds met de beperkingen die wij toen hadden aangenomen, in § 60 vonden.

§ 63. Indien t′ een tensor was, zouden daarvoor, voor willekeurige substituties de transformatieformules gelden, die aan het slot van § 40 werden medegedeeld. Dit is nu in werkelijkheid niet het geval, maar wel kan men uit (96) en (97) afleiden dat die formules voor *lineaire* transformaties doorgaan. Daar zij ook op de spanningsenergiecomponenten van de materie of van een electromagnetisch stelsel kunnen worden toegepast, heeft men, als men onder $\mathfrak{T}_a^b$ de *totale* spannings-energiecomponenten verstaat, d. w. z. grootheden waarin de overeenkomstige componenten voor het gravitatieveld, de materie en het electromagnetisch veld zijn samengevat, voor willekeurige lineaire transformaties de formule

$$\frac{1}{\sqrt{-g'}}\mathfrak{T}'^{\,b}_c = \frac{1}{\sqrt{-g}}\Sigma\,(kl)\,p_{kc}\,\pi_{lb}\,\mathfrak{T}_k^l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

Wij zullen dit toepassen in het geval van eene relativiteitstransformatie die wij kunnen voorstellen door

$$x'_1 = ax_1 + bcx_4, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = ax_4 + \frac{b}{c}x_1, \quad (122)$$

met de betrekking

$$a^2 - b^2 = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

en wel zullen wij aannemen dat, beschreven in de rechthoekige coördinaten x_1, x_2, x_3 en den tijd x_4, het stelsel in een stationairen toestand verkeert en in rust is.

Dan volgt uit (97) [1])

---

[1]) Men heeft $g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0$, terwijl alle andere grootheden g_{ab} onafhankelijk van x_4 zijn. Men kan dus zeggen dat de grootheden g_{ab} en $g_{ab,c}$ nul zijn, zoodra onder de indices waarmede zij voorzien zijn, het cijfer 4 een oneven aantal malen voorkomt. Hetzelfde geldt van g^{ab}, $g^{ab,c}$, $\frac{\partial Q}{\partial g_{ab\;cd}}$ (blijkens (116)), $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,cd}}\right)$ en ook van producten van twee of meer dergelijke grootheden. Daar in de laatste twee termen van (97) de indices a, b en f tweemaal voorkomen, zullen zij verdwijnen zoodra slechts een der indices e en h de waarde 4 heeft.

Wat den eersten term van (97) betreft, wijzen wij er op dat, zooals uit de formules van § 32 volgt, in het differentiaalquotient van Q naar $g_{ab,e}$ elk der indices a, b en e nog slechts eenmaal voorkomt, terwijl andere zich herhalen. Ook van den eersten term van (97) geldt dus wat het aantal malen betreft, dat

$$t'^{\,4}_{1} = t'^{\,4}_{2} = t'^{\,4}_{3} = 0 ; \qquad t'^{\,1}_{4} = t'^{\,2}_{4} = t'^{\,3}_{4} = 0,$$

l. w. z. er bestaan in het systeem (x_1, x_2, x_3, x_4) in het gravitatieveld noch hoeveelheden van beweging noch energiestroomen.

Hetzelfde mogen wij wat de materie betreft aannemen, en wij stellen dus voor de totale spannings-energiecomponenten in het systeem (x_1, x_2, x_3, x_4)

$$\mathfrak{T}_1^{\,4} = \mathfrak{T}_2^{\,4} = \mathfrak{T}_3^{\,4} = 0 ; \quad \mathfrak{T}_4^{\,1} = \mathfrak{T}_4^{\,2} = \mathfrak{T}_4^{\,3} = 0.$$

Vestigen wij nu in het bijzonder de aandacht op de componenten $\mathfrak{T}'^{\,4}_1$, $\mathfrak{T}'^{\,1}_4$ en $\mathfrak{T}'^{\,4}_4$ in het systeem (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4). Men vindt daarvoor uit (121) en (122)

$$\mathfrak{T}'^{\,4}_1 = \frac{ab}{c}\,\mathfrak{T}_1^{\,1} - \frac{ab}{c}\,\mathfrak{T}_4^{\,4} ; \quad \mathfrak{T}'^{\,1}_4 = -\,abc\,\mathfrak{T}_1^{\,1} + abc\,\mathfrak{T}_4^{\,4} \quad . \quad (124)$$

$$\mathfrak{T}'^{\,4}_4 = -\,b^2\,\mathfrak{T}_1^{\,1} + a^2\,\mathfrak{T}_4^{\,4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (125)$$

Het blijkt vooreerst dat tusschen de hoeveelheid van beweging in de richting der x-as ($-\mathfrak{T}'^{\,4}_1$) en den energiestroom in die richting ($\mathfrak{T}'^{\,1}_4$) de uit de relativiteitstheorie bekende betrekking

$$\mathfrak{T}'^{\,1}_4 = -\,c^2\,\mathfrak{T}'^{\,4}_1$$

bestaat.

Verder hebben wij voor de geheele energie in het systeem (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)

$$E' = \int \mathfrak{T}'^{\,4}_4\, dx'_1\, dx'_2\, dx'_3,$$

waarbij de integratie voor een bepaalde waarde van x'_4 moet worden uitgevoerd. Wegens (122) kan men daarvoor schrijven

$$E' = \frac{1}{a} \int \mathfrak{T}'^{\,4}_4\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

bij welke integraal wij een bepaalde waarde van den tijd x_4 in het oog vatten.

Substitueert men hierin de waarde (125) en bedenkt men dat, aangezien de toestand in het systeem (x_1, x_2, x_3, x_4) stationair is,

$$\int \mathfrak{T}_1^{\,1}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0$$

is, dan komt er

$$E' = aE,$$

als E de energie is, die men in het systeem (x_1, x_2, x_3, x_4) aan het stelsel toeschrijft. Op dezelfde wijze vindt men door integratie van

---

e, h en de andere indices voorkomen, hetzelfde als van de andere termen; ook de eerste term is dus 0, als slechts een der twee indices e en h de waarde 4 heeft.

Overigens ziet men onmiddellijk aan (97) dat $t'^{\,e}_4$ verdwijnt voor $e \neq 4$.

de eerste der uitdrukkingen (124) voor de totale hoeveelheid van beweging in de richting van x_1

$$G' = \frac{b}{c} E .$$

§ 64. Uit (122) blijkt dat het stelsel in het systeem (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) een translatiesnelheid $\frac{bc}{a}$ in de richting van x'_1 heeft. Stelt men deze door v voor, dan is ten gevolge van (123)

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Stelt men dus

$$M = \frac{E}{c^2},$$

dan wordt

$$E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad G' = \frac{Mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

Aan het geheele stelsel kan men dus, nu het zich beweegt, een energie en eene hoeveelheid van beweging toekennen, die op de uit de relativiteitstheorie bekende wijze van de translatiesnelheid afhangen. De grootheid M, waartoe ook de energie van het gravitatieveld een bijdrage levert, kan men de „massa" van het stelsel noemen. Uit het in § 62 gezegde volgt, dat zij tot op zekere hoogte onafhankelijk is van de wijze waarop men het stelsel en het gravitatieveld beschrijft.

Het verdient ten slotte de aandacht dat wij, zoo wij voor het gravitatieveld den spannings-energietensor t_0 (§ 52) hadden aangenomen, de *totale* energie van het stelsel, ook als het zich beweegt, nul zou zijn. Hetzelfde zou van de *totale* hoeveelheid van beweging gelden en wij zouden $M = 0$ moeten stellen.

Op het eerste gezicht klinkt het vreemd dat men aan het zich verplaatsende stelsel naar willekeur de door (126) bepaalde hoeveelheid van beweging of wel een hoeveelheid van beweging nul mag toekennen; men is geneigd te denken dat, als het coördinatenstelsel gekozen is, de hoeveelheid van beweging een bepaalde waarde moet hebben, die men zou kunnen bepalen door na te gaan hoe door uitwendige krachten het stelsel in rust kan worden gebracht. Men moet echter niet uit het oog verliezen (verg. § 52) dat men in de gravitatietheorie geen „uitwendige" krachten mag toelaten zonder op het

materieele stelsel S' te letten, waarvan zij uitgaan. Dit stelsel S' zal met het beschouwde stelsel S één systeem vormen, met een gravitatieveld dat voor een deel aan S' (en voor een deel ook aan het gelijktijdig bestaan van S en S') te danken is, en het lijdt geen twijfel dat op het *geheele* systeem (S, S') de verschillende mogelijke opvattingen aangaande de spannings-energiecomponenten die wij leerden kennen, zullen kunnen worden toegepast, zonder dat men met eenige ervaring in strijd komt.

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt door den Heer W. Kapteyn aangeboden, namens den Heer B. P. Moors, het manuscript van diens verhandeling: „Suite à l'étude sur les formules servant à calculer des valeurs approximatives d'une intégrale définie."

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren W. Kapteyn en J. C. Kluyver met verzoek daarover in een volgende vergadering te rapporteeren.

Voor de bibliotheek der Akademie worden ten geschenke aangeboden:

1. door den Heer P. Zeeman, namens Mej. Auda Snethlage, een exemplaar van hare dissertatie: „Moleculair-kinetische verschijnselen in gassen, inzonderheid de Brownsche beweging";

2. door den Heer W. H. Julius, namens den Heer J. Spykerboer, een exemplaar van diens dissertatie: „Verstrooiïng van licht en intensiteitsverdeeling over de zonneschijf".

Wegens het houden der vereenigde vergadering van de beide Afdeelingen der Akademie op Zaterdag 28 April wordt, op voorstel van den Voorzitter, besloten de volgende vergadering der Afdeeling vast te stellen op **Vrijdag** 27 April a.s.

De vergadering wordt gesloten.

(31 Mei, 1917)

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN VRIJDAG 27 APRIL 1917.

DEEL XXV.

N°. 10.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren W. DE SITTER, ERNST COHEN en F. A. H. SCHREINEMAKERS, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van zijne Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken, d.d. 25 April j.l., met bericht dat door H. M. de Koningin zijn bekrachtigd de benoemingen van de Heeren H. A. LORENTZ tot Voorzitter, D. J. KORTEWEG tot Onder-Voorzitter en P. ZEEMAN tot Secretaris der Wis- en Natuurkundige Afdeeling.

Aangenomen voor kennisgeving.

3°. Missive van denzelfden Minister, dd. 21 April j.l., berichtende dat bij Zijner Excellentie's beschikking van dien datum N°. 954[1] Afd. K. W., aan Mej. LA RIVIÈRE te Leiden voor hare uitzending naar het Botanisch Station te Buitenzorg ook over het jaar 1917 eene Rijkstoelage van *f* 700.— is toegekend, welke haar eerlang zal worden uitbetaald.

Aangenomen voor kennisgeving.

4°. Bericht van de Heeren Prof. Dr. A. SMITS en Dr. E. H. BÜCHNER, dat zij de benoeming tot leden van de Commissie voor het VAN 'T HOFF-fonds aannemen.

Aangenomen voor kennisgeving.

Wiskunde. — De Heer W. KAPTEYN brengt, mede namens den Heer J. C. KLUYVER, het volgende rapport uit:

De verhandeling van den Heer B. P. MOORS over de benadering van bepaalde integralen die door den Voorzitter in onze handen werd gesteld, is een vervolg op een verhandeling van denzelfden schrijver voorkomende in de Werken van de Akademie, 1e Reeks, Dl. XI, N°. 6.

Aan die eerste verhandeling zijn twee tafels toegevoegd waarvan de laatste alleen voor een oneven aantal ordinaten berekend is. In deze nieuwe verhandeling wordt deze tafel uitgebreid voor een even aantal ordinaten en tevens wordt eene kleine verandering in de keuze der abscissen aangebracht. Van de abscissen van GAUSS namelijk wordt nu één tot op één decimaal afgerond en de overigen tot op twee decimalen. Verder wordt bepaald wat aan de abscis die slechts één decimaal bevat, moet worden toegevoegd, opdat de eerste correctieterm verdwijnt en daarna wordt ook deze abscis tot twee decimalen afgerond. Door beurtelings elke abscis als uitgangs-

punt te nemen, krijgt men evenveel groepen abscissen in twee decimalen als er abscissen zijn. Van deze wordt eindelijk die groep uitgekozen waarvoor de eerste correctieterm de kleinste waarde verkrijgt. Met deze nieuwe abscissen wordt dan een tafel C berekend zoowel voor een even als voor een oneven aantal abscissen.

Het komt ons voor dat de hier aangebrachte wijziging een verbetering is en daardoor het bezwaar wordt opgeheven waarop wij in ons rapport over de oorspronkelijke verhandeling wezen, n.l. dat bij den toen gevolgden weg voor de bepaling der abscissen iets afhankelijk bleef van eene gelukkige keuze.

Met het oog hierop adviseeren wij deze nieuwe verhandeling, die evenals de vorige in de Fransche taal geschreven is, in de werken van de Akademie op te nemen.

(Get.) W. Kapteyn.
„ J. C. Kluyver.

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusie van het rapport.

Physiologie. De Heer I. K. A. Wertheim Salomonson doet een mededeeling: „*Photographie van den oogachtergrond.*"

Sedert door Helmholtz' uitvinding van den oogspiegel de oogachtergrond voor het visueele onderzoek toegankelijk is geworden, hebben tallooze onderzoekers getracht het netvliesbeeld op de photographische plaat te fixeeren. Het is echter gebleken dat deze taak op buitengewone moeilijkheden afstuit. Men vond dat de voornaamste moeilijkheid wel gelegen was in de aanwezigheid der reflexen uitgaande van het hoornvlies alsmede van de voorzijde en achtervlakte van de lens. Op zeer verschillende wijze is getracht deze reflexen onschadelijk te maken, en nadat Bagnéris, Guilloz en Gerloff daarin gedeeltelijk geslaagd zijn, gelukte het aan Dimmer, aan Wolff, en aan Thorner om eenigszins meer bevredigende beelden van den fundus oculi vast te leggen. Vooral Dimmer heeft hierin uitstekende resultaten verkregen, die aan hooge eischen voldoen en in enkele gevallen zelfs onberispelijk mogen genoemd worden. De resultaten van Wolff zoowel als die van Thorner zijn minder bevredigend.

Waar het alleen oogen van dieren gold, kon ook Nicolaew goede uitkomsten toonen. Het is echter oneindig veel moeilijker om bij den levenden mensch den fundus te photographeeren dan dat bij een levend dier het geval is.

Voor praktische doeleinden komt tot dusverre alleen de methode van DIMMER in aanmerking, die echter een uiterst omvangrijk, saamgesteld, kostbaar instrumentarium vereischt en die, voor zoover mij bekend is, bijna niet buiten diens eigen kliniek gebruikt wordt.

De methoden die voor het verkrijgen van een reflexloos beeld van den achtergrond gebruikt worden, zijn eindelijk nog door GULLSTRAND kritisch besproken en door hem zijn de algemeene voorwaarden ter verkrijging van een reflexvrij beeld van den achtergrond scherp omlijnd. De resultaten van zijn onderzoek hebben ten slotte gevoerd tot de constructie van den demonstratie-ophthalmoscoop van GULLSTRAND-ZEISS waarmede wel niet gephotografeerd kan worden, doch waarmede men beter dan met eenig ander instrument den oogachtergrond kan onderzoeken.

Het scheen mij toe dat dit instrument geschikt gemaakt kon worden voor photographie van den fundus. Daartoe moest het echter minstens 10 tot 20 maal lichtsterker gemaakt worden. Het bleek mij bij een onderzoek ter voorloopige oriënteering dat dit mogelijk moest zijn. Ik heb ten slotte een instrument laten bouwen en ben ook onmiddellijk geslaagd daarmede photographieën te verkrijgen.

De veranderingen die hierdoor aangebracht moesten worden bestonden daarin, dat vooreerst gezorgd werd, dat van het licht van de lichtbron een grooter deel in het oog indrong dan bij het instrument van ZEISS geschiedt, en ten tweede door de lichtbron — een Nernstlamp — te vervangen door een van grootere intrinsieke lichtsterkte.

Bij den grooten demonstratie-ophthalmoscoop wordt het beeld van het Nernstlamp-filament op een spleet en vervolgens met een tweede condensorsysteem in de pupil van het oog geprojecteerd. In den weg van de lichtstralen is voorbij den tweeden condensor een glasplaat onder een hoek van 45° geplaatst, die door spiegeling het beeld in de pupil werpt. Het afbeeldingssysteem kijkt door die glasplaat. Bij deze inrichting wordt niet meer dan 8.5 % van het beschikbare licht in het oog geworpen, terwijl van het door het netvlies teruggekaatste licht slechts 91.5 % in het afbeeldingssysteem indringt. Ik heb vooreerst den lichtinval vergroot tot op 65° waardoor 21 % licht in het oog viel en 79 % teruggekaatst werd. Hiermede werd de lichtsterkte iets meer dan verdubbeld.

De Nernstlamp bezit een intrinsieke lichtsterkte die bij meeting ongeveer 3.1 H.K. per mm² bleek te bedragen. Door het gebruik van een halfwattlampje van bijzondere constructie verkreeg ik een lichtbron die bij eenige overbelasting ongeveer 27 tot 29 H.K. per mm² uitstraalde. Nadat nu de toestel van een passende camera was

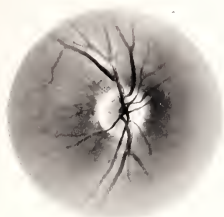


Fig. 1.
Normale fundus.

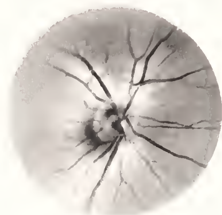


Fig. 2.
Normale fundus.

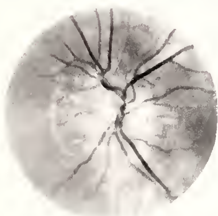


Fig. 3.
Normale fundus met choreoidaal vaten.

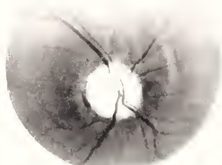


Fig. 4.
Secundaire atrophia nervi optici.

a

HELIOTYPIE ... LEEI

voorzien kon ik onmiddellijk bruikbare negatieven verkrijgen van 26 tot 30 mm doorsnee, waarop de achtergrond in een uitbreiding van $4^1/_2$ pupildoorsnede overeenkomend met een hoek van 27° afgebeeld werd. De benoodigde expositietijd bedraagt hierbij ongeveer 0.4 à 0.5 seconde. De verkregen beelden zijn soms zeer goed, doch niet altijd, hetgeen wel aan den betrekkelijk langen expositietijd moet worden toegeschreven. Bij wijze van proef heb ik nog de halfwattlamp door een kleine booglamp van 4 à 5 ampère vervangen, doch daarmede was de winst zeer gering: wel was de intrinsieke lichtsterkte drie maal grooter, doch het beeldvlakje was te klein. Alleen met een geheele nieuwe constructie en met een booglamp van 20 à 25 ampère zou ik kunnen verwachten dat de expositietijd tot ongeveer een achtste seconde zou kunnen teruggebracht worden. Daar bovendien het beeldveld wat te beperkt was, hetgeen ook alleen door ingrijpende veranderingen zou kunnen gewijzigd worden, heb ik getracht op geheel anderen weg een verbetering te krijgen. Daarin meen ik op de volgende wijze geslaagd te zijn.

Bij de gewone ophtalmoscopie in het omgekeerde beeld is het mogelijk de cornea en lens-reflexen geheel wèg te krijgen, indien men slechts de voorschriften volgt die GULLSTRAND daarvoor gegeven heeft. Hierbij blijven echter steeds twee reflexen zichtbaar nl. die welke op de ophthalmoscooplens ontstaan. Terwijl deze bij het visueele onderzoek niet hinderen, daar ze klein zijn en doorverplaatsingen van de ophthalmoscooplens en draaiïng voor het oog steeds op een plaats gebracht kunnen worden, waar ze weinig hinderlijk zijn, vormt hunne aanwezigheid een onoverkomelijk bezwaar bij de photographie. Ze geven namelijk aanleiding tot het ontstaan van lichtvlekken op het negatief waarvan de grootte alleen bijna de helft en veelal de centrale helft van het geheele netvliesbeeld bedragen kan, terwijl de intensiteit vele honderden malen die van het netvliesbeeld overtreft. Het bleek mij, dat het mogelijk was door het aanbrengen van kleine lichtschermpjes deze reflexen volkomen onschadelijk te maken.

Werkende volgens dit beginsel heb ik nu een tweede toestel ontworpen en laten uitvoeren. Hierbij is de beeldgrootte tot 40 mm. vermeerderd, waarbij onder een hoek van 32.5 graden het netvlies afgebeeld is, zoodat juist $5^1/_2$ pupildoorsneden-breedte verkregen wordt. Voor de verlichting wordt een klein booglampje voor 4 à 5 ampère gebruikt. De expositieduur bedraagt in den regel precies $^1/_{14}$ seconde. Het is gebleken dat ook met $^1/_{20}$ seconde nog bruikbare opnamen verkregen kunnen worden; doch deze snellere opnamen bieden niet het minste voordeel aan boven die welke 0.072 seconden geëxpo-

seerd zijn, daar de reflextijd in ieder geval belangrijk grooter is. De hoeveelheid licht is echter volstrekt niet hinderlijk en de meeste patienten kunnen gemakkelijk de reflex geheel onderdrukken. En zelfs in een geval van nystagmus kreeg ik met $^1/_{14}$ seconde een bevredigend beeld.

Wat ten slotte de hoedanigheid der beelden betreft, zoo schijnen mij deze aan alle billijke eischen te voldoen. Zij vertoonen een voldoende scherpte van teekening. De negatieven zijn in den regel in het midden iets beter doorgewerkt dan aan de randen, zooals te verwachten is; doch laten in het algemeen toe dat directe afdrukken of vergrootingen gemaakt worden zonder eenige retouche, zooals bij de beelden van DIMMER noodig is.

De toestel zelf biedt het voordeel aan van te kunnen gebruikt worden voor linker- of voor rechteroog zonder eenige verandering dan de scherpstelling. Het is eindelijk zoo beknopt dat het nauwelijks meer ruimte inneemt dan de groote demonstratie-ophthalmoscoop van GULLSTRAND. De techniek is niet veel moeilijker dan die van het maken van een gewone photographie met een atelier-camera.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN doet eene mededeeling over: *„De dichloorphenolen en eenige hunner derivaten."*

(Deze mededeeling zal niet in dit Verslag worden opgenomen.)

Scheikunde. — De heer SCHREINEMAKERS biedt eene mededeeling aan over: *„In-, mono- en divariante evenwichten"*. XVII.

Evenwichten van n komponenten in n phasen.

Wij zullen thans het evenwicht:

$$E = F_1 + F_2 + \ldots + F_n \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

dat wij reeds in de vorige mededeeling besproken hebben, nader beschouwen. Wij stellen de samenstelling van:

$$F_1 \text{ door } x_1\, y_1\, z_1 \ldots 1 - x_1 - y_1 - z_1 \ldots$$
$$F_2 \quad ,, \quad x_2\, y_2\, z_2 \ldots 1 - x_2 - y_2 - z_2 \ldots$$

enz. voor. De ζ, de entropie en het volume van F_1 noemen wij Z_1 H_1 en V_1; die van F_2 noemen wij Z_2 H_2 en V_2; enz.

Wij kunnen de evenwichtsvoorwaarden dan schrijven;

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 - x_1 \dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1} - y_1 \dfrac{\partial Z_1}{\partial y_1} \ldots . = K \\ Z_2 - x_2 \dfrac{\partial Z_2}{\partial x_2} - y_2 \dfrac{\partial Z_2}{\partial y_2} \ldots = K \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

n.l. n vergelijkingen (2), waarvan wij er slechts twee hebben opgeschreven. Verder heeft men:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial Z_2}{\partial x_2} = \ldots = \dfrac{\partial Z_n}{\partial x_n} = K_x \\ \dfrac{\partial Z_1}{\partial y_1} = \dfrac{\partial Z_2}{\partial y_2} = \ldots = \dfrac{\partial Z_n}{\partial y_n} = K_y \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bij (3) moeten nog de overeenkomstige vergelijkingen voor de veranderlijken $z_1 \; z_2 \ldots u_1 \; u_2 \ldots$ enz. worden gevoegd.

In (2) vindt men n, in (3) $n\,(n-1)$; dus in het geheel n^2 vergelijkingen. Behalve de $n\,(n-1)$ veranderlijken $x_1 \; y_1 \ldots x_2 \; y_2 \ldots$ enz., hebben wij nog de $n+2$ veranderlijken $T \; P \; K \; K_x \; K_y \ldots$ dus in het geheel n^2+2 veranderlijken. Het evenwicht E heeft dus 2 vrijheden en is dus bivariant.

Wij hebben in (2) en (3) het algemeene geval aangenomen dat alle phasen eene veranderlijke samenstelling hebben en dat elke phase alle komponenten bevat. Is dit niet het geval, dan kan men in (2) en (3) dadelijk de noodige veranderingen aanbrengen. Heeft b.v. F_1 eene constante samenstelling $x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$, enz., dan gaat de eerste vergelijking (2) over in:

$$Z_1 - \alpha \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} - \beta \frac{\partial Z_i}{\partial y_i} \ldots = K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin de index i dan betrekking heeft op eene phase F_i van veranderlijke samenstelling. Z_1 is dan alleen nog eene functie van P en T; in (3) vervallen dan $\dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial Z_1}{\partial y_1}$, enz.

Geeft men aan $P \; T \; x \; y \ldots$ de aangroeiingen $\Delta P \; \Delta T \; \Delta x \; \Delta y \ldots$ dan heeft men:

$$\Delta Z = VdP - HdT + \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Z}{\partial y} \Delta y + \ldots + \tfrac{1}{2} d^2 Z + \tfrac{1}{6} d^3 Z + \ldots$$

$$\Delta \left(x \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = \frac{\partial Z}{\partial x} \Delta x + (x + \Delta x) \left[d \frac{\partial Z}{\partial x} + \tfrac{1}{2} d^2 \frac{\partial Z}{\partial x} + \ldots \right]$$

$$\Delta \left(y \frac{\partial Z}{\partial y} \right) = \frac{\partial Z}{\partial y} \Delta y + (y + \Delta y) \left[d \frac{\partial Z}{\partial y} + \tfrac{1}{2} d^2 \frac{\partial Z}{\partial y} + \ldots \right]$$

Hierin geeft het teeken d aan, dat gedifferentieerd moet worden ten opzichte van alle veranderlijken, die de functie bevat. Verder is;

$$d^2Z = d\frac{\partial Z}{\partial P}.\Delta P + d\frac{\partial Z}{\partial T}.dT + d\frac{\partial Z}{\partial x}.\Delta x + d\frac{\partial Z}{\partial y}.\Delta y + \ldots$$

$$d^3Z = d^2\frac{\partial Z}{\partial P}.\Delta P + d^2\frac{\partial Z}{\partial T}.dT + d^2\frac{\partial Z}{\partial x}.\Delta x + d^2\frac{\partial Z}{\partial y}.\Delta y + \ldots$$

Verwaarloost men nu in d^2Z en d^3Z de termen die oneindig klein zijn ten opzichte van ΔP en ΔT, dan kan men schrijven:

$$d^2Z = d\frac{\partial Z}{\partial x}.\Delta x + d\frac{\partial Z}{\partial y}.\Delta y + \ldots$$

$$d^3Z = d^2\frac{\partial Z}{\partial x}.\Delta x + d^2\frac{\partial Z}{\partial y}.\Delta y + \ldots$$

Uit een vorm:

$$Z - x\frac{\partial Z}{\partial x} - y\frac{\partial Z}{\partial y} - \ldots = K$$

volgt dus:

$$\left.\begin{array}{l} -V\Delta P + H\Delta T + (x+\Delta x)\left(d\frac{\partial Z}{\partial x} + \ldots\right) + (y+\Delta y)\left(d\frac{\partial Z}{\partial y} + \ldots\right) - \\ \qquad - \frac{1}{2}d^2Z - \frac{1}{6}d^3Z - \ldots = -\Delta K \end{array}\right\} \quad (5)$$

Nu is

$$\Delta x\left[d\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{1}{2}d^2\frac{\partial Z}{\partial x} + \ldots\right] + \Delta y\left[d\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{1}{2}d^2\frac{\partial Z}{\partial y} + \ldots\right] = d^2Z + \frac{1}{2}d^3Z + \ldots$$

zoodat wij voor (5) kunnen schrijven:

$$\left.\begin{array}{l} -VdP + HdT + x\left[d\frac{\partial Z}{\partial x} + \ldots\right] + y\left[d\frac{\partial Z}{\partial y} + \ldots\right] + \ldots \\ \qquad + \frac{1}{2}d^2Z + \frac{1}{3}d^3Z + \ldots = -\Delta K \end{array}\right\} . \quad (6)$$

Wij passen dit nu toe op de n vergelijkingen (2) en differentieeren verder ook de n (n—1) vergelijkingen (3). Wij zullen echter eerst de volgende notatie invoeren; wij stellen nl.:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x_1} = (x)_1 \;;\; \frac{\partial Z_2}{\partial y_2} = (y)_2 \;;\; \frac{\partial^2 Z_3}{\partial x_3^2} = (x^2)_3 \;;\; \frac{\partial^3 Z_4}{\partial x_4^2 \partial y_4} = (x^2y)_4 \text{ enz.}$$

De index buiten de haakjes geeft dus aan welke der functies $Z_1 \ldots Z_n$ gedifferentieerd moet worden; de letters binnen de haakjes geven aan ten opzichte van welke veranderlijken gedifferentieerd moet worden.

Uit de n vergelijkingen (2) volgt dan:

$$\left.\begin{array}{l} -V_1\Delta P + H_1\Delta T + x_1[d(x)_1 + \ldots] + y_1[d(y)_1 + \ldots] + \ldots \\ \qquad + \frac{1}{2}d^2Z_1 + \frac{1}{3}d^3Z_1 + \ldots = -\Delta K \\ -V_2\Delta P + H_2\Delta T + x_2[d(x)_2 + \ldots] + y_2[d(y)_2 + \ldots] + \ldots \\ \qquad + \frac{1}{2}d^2Z_2 + \frac{1}{3}d^3Z_2 + \ldots = -\Delta K \end{array}\right\} . \quad (7)$$

en nog $n - 2$ andere vergelijkingen. Uit (3) volgt:

$$\left.\begin{aligned} d(x)_1 + \tfrac{1}{2} d^2(x)_1 + \ldots = d(x)_2 + \tfrac{1}{2} d^2(x)_2 + \ldots = \Delta K_x \\ d(y)_1 + \tfrac{1}{2} d^2(y)_1 + \ldots = d(y)_2 + \tfrac{1}{2} d^2(y)_2 + \ldots = \Delta K_y \end{aligned}\right\} \quad . \quad (8)$$

enz. Volgens onze notatie is b.v.:

$$d(x)_1 = (Px)_1 \Delta P + (Tx)_1 \Delta T + (x^2)_1 \Delta x_1 + (xy)_1 \Delta y_1 + \ldots$$

of
$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} \Delta P - \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \Delta T + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1{}^2} \Delta x_1 + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial y_1} \Delta y_1 + \ldots$$

$$d(y)_1 = (Py)_1 \Delta P + (Ty)_1 \Delta T + (xy)_1 \Delta x_1 + (y^2)_1 \Delta y_1 + \ldots$$

of
$$\frac{\partial V_1}{\partial y_1} \Delta P - \frac{\partial H_1}{\partial y_1} \Delta T + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial y_1} \Delta x_1 + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y_1{}^2} \Delta y_1 + \ldots$$

Heeft eene phase, b.v. F_1, eene constante samenstelling, dan geldt hiervoor (4); in plaats van de eerste vergelijking (7) vindt men dan:

$$-V_1 \Delta P + H_1 \Delta T + \alpha\,[d(x)_i + \ldots] + \beta\,[d(y)_i + \ldots = -\Delta K.$$

In de eerste vergelijking (7) ontbreken dus dan de termen $d^2 Z_1$, $d^3 Z_1$ enz.

Evenwichten van n komponenten in n phasen bij constanten druk.

Houdt men den druk constant, dan moet men in (7) en (8) alle termen met ΔP weglaten; het teeken d geeft dan aan dat men naar alle veranderlijken, behalve P, moet differentieeren.

Wij hebben nu in (7) en (8) n^2 vergelijkingen en $n^2 + 1$ aangroeiingen ΔT, $\Delta x_1 \ldots$, zoodat hunne verhoudingen bepaald zijn. Bij elke bepaalde aangroeiing van een der veranderlijken, b.v. Δx_1 behoort dus eene bepaalde aangroeiing van elk der andere veranderlijken, dus b.v. ook van ΔT. Bij verandering van x_1 (of een der andere veranderlijken) doorloopt het evenwicht E in het P,T-diagram dus eene rechte lijn, evenwijdig aan de T-as.

Wij zullen ons thans de vraag stellen: wanneer zal de temperatuur maximum of minimum zijn?

Hiertoe is noodig dat ΔT van de tweede orde is; uit (7) en (8) volgt dan, dat voldaan moet kunnen worden aan:

$$\left.\begin{aligned} x_1\, d(x)_1 + y_1\, d(y)_1 + \ldots = \Delta K \\ x_2\, d(x)_2 + y_2\, d(y)_2 + \ldots = \Delta K \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

en aan:

$$\left.\begin{aligned} d(x)_1 = d(x)_2 = \ldots = d(x)_n = \Delta K_x \\ d(y)_1 = d(y)_2 = \ldots = d(y)_n = \Delta K_y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

waarin d thans aangeeft, dat naar alle veranderlijken, behalve P en T, gedifferentieerd moet worden.

De verhoudingen tusschen n^2 aangroeiingen Δx_1 $\Delta x_2 \ldots \Delta y_1$ $\Delta y_2 \ldots \Delta K, \Delta K_x, \ldots$ moeten dus opgelost kunnen worden uit de n^2 vergelijkingen (9) en (10); dit is alleen dan mogelijk, als er tusschen de coëfficienten eene betrekking bestaat. Met behulp van (10) schrijven wij voor (9):

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \Delta K_x + y_1 \Delta K_y + \ldots = \Delta K \\ x_2 \Delta K_x + y_2 \Delta K_y + \ldots = \Delta K \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

zoodat wij aan (10) en (11) moeten kunnen voldoen. Dit is hier het geval, als men aan (11) kan voldoen.

Telt men de n vergelijkingen (11) samen, nadat de eerste met λ_1, de tweede met λ_2, enz. vermenigvuldigd is, dan krijgt men:

$$\Sigma(\lambda x)\,\Delta K_x + \Sigma(\lambda y)\,\Delta K_y + \Sigma(\lambda)\,\Delta K \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Hieruit blijkt dat men de verhoudingen tusschen Δx_1 $\Delta x_2 \ldots$ uit (9) en (10) kan oplossen, als voldaan kan worden aan:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma(\lambda) \;\;= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0 \\ \Sigma(\lambda x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \\ \Sigma(\lambda y) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

Men zou aan (12) ook kunnen voldoen, door $\Delta K_x, \Delta K_y, \ldots$ nul te stellen; wij laten dit geval thans buiten beschouwing en komen later hierop terug; wij zullen dan zien dat het evenwicht zich bevindt op de grens zijner stabiliteit.

[De heer W. VAN DER WOUDE maakte er mij op opmerkzaam, dat men de voorwaarde, opdat aan (9) en (10) voldaan kan worden, gemakkelijk in een determinant kan uitdrukken. Deze blijkt dan geschreven te kunnen worden als het product van verschillende andere determinanten, zoodat men dadelijk alle gezochte voorwaarden kent.]

Wij hebben in (13) n vergelijkingen tusschen de n—1 verhoudingen van $\lambda_1\,\lambda_2 \ldots \lambda_n$; aan (13) kan dus alleen dan voldaan worden, als er tusschen de veranderlijken eene betrekking bestaat; men kan deze vinden door uit de vergelijkingen (13) $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ te elimineeren; wij kunnen deze voorwaarde ook schrijven in den vorm van nevenstaanden determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \ldots \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \ldots \\ y_1 & y_2 & y_2 & y_4 \ldots \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

Let men echter op de samenstellingen der phasen $F_1 \ldots F_n$ dan blijkt dat (13) uitdrukt, dat er tusschen de phasen eene reactie van den vorm:

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots + \lambda_n F_n = 0$$

dus eene phasenreactie moet kunnen optreden. Het evenwicht is dan een evenwicht E_R en bevindt zich in het P, T-diagram dus op eene kurve E_R, nl. op eene keerlijn van het veld E.

Wij vinden dus:

„in een evenwicht van n komponenten in n phasen is bij constante P de temperatuur maximum of minimum, als er tusschen de phasen eene phasenreactie kan optreden."

In een binair stelsel is de T dus maximum of minimum, als de beide phasen dezelfde samenstelling hebben; in een ternair stelsel, als de 3 punten, die de phasen voorstellen, op eene rechte lijn liggen; in een quaternair stelsel, als de 4 phasen voorgesteld kunnen worden door 4 punten van een plat vlak; enz.

Wij moeten nu nog onderzoeken, wanneer de T een maximum en wanneer of zij een minimum is. Wij moeten daartoe ΔT bepalen. Wij nemen daartoe de vergelijkingen (7), waarin nu alle termen met ΔP weggelaten moeten worden. Telt men deze samen na de eerste met λ_1, de tweede met λ_2, enz. vermenigvuldigd te hebben, dan vindt men met behulp van (8) en (13):

$$\Sigma (\lambda H) \,.\, \Delta T + \tfrac{1}{2}\, \Sigma (\lambda d^2 Z) + \tfrac{1}{3}\, \Sigma (\lambda d^3 Z) + \ldots = 0 \quad . \quad . \quad (14)$$

of bij eerste benadering:

$$\Sigma (\lambda H) \,.\, \Delta T = - \tfrac{1}{2}\, \Sigma (\lambda d^2 Z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Hierin is:

$$\Sigma (\lambda H) = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots + \lambda_n H_n$$

dus de entropievermeerdering, die bij de reactie:

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots + \lambda_n F_n = 0$$

optreedt. Verder is:

$$\Sigma (\lambda d^2 Z) = \lambda_1 d^2 Z_1 + \lambda_2 d^2 Z_2 + \ldots + \lambda_n d^2 Z_n \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

of, zooals uit de waarden van $d^2 Z_1$ enz. volgt:

$$\Sigma (\lambda d^2 Z) = \left.\begin{array}{l} \lambda_1 \left[d(x)_1\, \Delta x_1 + d(y)_1\, \Delta y_1 + \ldots\right] \\ + \lambda_2 \left[d(x)_2\, \Delta x_2 + d(y)_2\, \Delta y_2 + \ldots\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \lambda_n \left[d(x)_n\, \Delta x_n + d(y)_n\, \Delta y_n + \ldots\right] \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (17)$$

of ook:

$$\Sigma (\lambda d^2 Z) = \left.\begin{array}{l} \lambda_1 \left[(x^2)_1\, \Delta x_1^2 + (y^2)_1\, \Delta y_1^2 + \ldots + 2\,(xy)_1\, \Delta x_1 \Delta y_1\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \lambda_n \left[(x^2)_n\, \Delta x_n^2 + (y^2)_n\, \Delta y_n^2 + \ldots + 2\,(xy)_n\, \Delta x_n \Delta y_n\right] \end{array}\right\} \quad (18)$$

Heeft een der phasen, b.v. F_1, eene constante samenstelling, dan valt in (16) d^2Z_1 weg; zijn er meer phasen met constante samenstelling, dan vallen in (16) en dus ook in (17) en (18) de overeenkomstige termen weg.

Is het evenwicht E stabiel (of, wat voor onze beschouwingen op hetzelfde neerkomt „metastabiel”) dan zijn d^2Z_1 d^2Z_2 —— positief; is het evenwicht echter labiel, dan kunnen een of meer der vormen d^2Z_1 —— negatief zijn.

Uit (15) volgt nu wanneer de temperatuur een maximum en wanneer zij een minimum is. Hebben:

$\Sigma(\lambda H)$ en $\Sigma(\lambda d^2Z)$ hetzelfde teeken, dan is $\Delta T < O$ en de T dus een maximum

$\Sigma(\lambda H)$ en $\Sigma(\lambda d^2Z)$ tegengesteld teeken, dan is $\Delta T > 0$ en de T dus een minimum.

Is $\Sigma(\lambda d^2Z) = 0$ dan is de T noch maximum noch minimum.

In sommige gevallen is het gemakkelijk om dit te bepalen. Nemen wij b.v. een evenwicht

$$E = L_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n$$

waarin L_1 eene vloeistof is en $F_2 \ldots F_n$ phasen van onveranderlijke samenstelling b.v. vaste stoffen.

Wij laten de phasenreactie

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots + \lambda_n F_n = 0$$

nu in zulke richting loopen, dat λ_1 hoeveelheden L_1 gevormd worden en nemen λ_1 positief. In het evenwicht E treedt dus eene reactie op [smelting of omzetting van vaste stoffen] waarbij vloeistof gevormd wordt. Daar bij deze reactie in het algemeen warmte toegevoerd moet worden, zoo is $\Sigma(\lambda H) > 0$.

Daar $F_2 \ldots F_n$ phasen met onveranderlijke samenstelling zijn, zoo is $\Sigma(\lambda d^2Z) = \lambda_1 d^2Z_1$.

Wij hebben dus:

$$\Sigma(\lambda H) \Delta T = -\tfrac{1}{2} \lambda_1 d^2 Z_1 \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

waarin $\Sigma(\lambda H) > 0$ en $\lambda_1 > 0$. d^2Z_1 is positief als het evenwicht stabiel is, maar kan negatief zijn als het evenwicht labiel is. De T is dus een maximum als het evenwicht stabiel, maar kan een minimum zijn als het evenwicht labiel is.

Vat men de voorafgaande beschouwingen samen, dan vindt men het volgende:

In een evenwicht van n komponenten in n phasen is bij constante P de temperatuur maximum of minimum, als tusschen de phasen eene phasenreactie kan optreden.

Is een der phasen eene vloeistof en zijn de n—1 andere vaste

stoffen met onveranderlijke samenstelling, dan is de T een maximum als het evenwicht stabiel (of metastabiel) is; de T kan een minimum zijn als het evenwicht labiel is.

Wij kunnen deze algemeene beschouwingen op bijzondere gevallen toepassen: wij nemen daarbij aan, dat het evenwicht stabiel (of metastabiel) is.

In het binaire evenwicht $E = L_1 + F_2$ stelt L_1 de vloeistof voor verzadigd met vast F_2. In een T-concentratiediagram doorloopt L_1 dus de verzadigingskurve onder eigen dampdruk van F_2. Deze kurve moet dus haar maximum-temperatuur hebben in het punt, waarin L_1 dezelfde samenstelling heeft als F_2; dit is dus in het smeltpunt van F_2.

In het ternaire evenwicht $E = L_1 + F_2 + F_3$ is L_1 eene vloeistof, verzadigd met $F_2 + F_3$. In het concentratiediagram doorloopt L_1 dus de verzadigingskurve van $F_2 + F_3$ onder eigen dampdruk. De T verandert langs deze kurve van punt tot punt. De T zal een maximum moeten zijn in het snijpunt dezer kurve met de lijn $F_2\ F_3$.

Overeenkomstige beschouwingen gelden voor stelsels met 4 en meer komponenten.

Wij komen in eene volgende verhandeling op labiele toestanden terug.

Evenwichten van n komponenten in n phasen onder constanten druk en bij eene temperatuur die weinig van de maximum- of minimum temperatuur verschilt.

Daar tusschen de n phasen van een evenwicht E_R eene phasenreactie kan optreden, kan aan (13) worden voldaan. De verhoudingen tusschen $\Delta x_1\ \Delta y_1 \ldots \Delta x_2\ \Delta y_2 \ldots$ zijn dan door (9) en (10) bepaald. Denkt men zich $\Delta x_2 \ldots \Delta y_1\ \Delta y_2 \ldots$ uitgedrukt in Δx_1 en deze in (18) gesubstitueerd, dan blijkt dat men voor $\Sigma(\lambda d^2 Z)$ een vorm als $A\ \Delta x_1^2$ kan schrijven. A heeft hierin eene bepaalde positieve of negatieve waarde. Uit (15) volgt dan:

$$\Delta x_1 = \pm \sqrt{\frac{2\Sigma(\lambda H)}{-A}}\,\Delta T. \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Hieruit blijkt dat bij elke bepaalde waarde van ΔT twee waarden van Δx_1 (en dus ook van $\Delta x_2 \ldots \Delta y_1\ \Delta y_2 \ldots$) behooren, die alleen in teeken van elkaar verschillen. Is de vorm onder het wortelteeken in (20) positief, dan hebben $\Delta x_1\ \Delta x_2 \ldots \Delta y_1\ \Delta y_2 \ldots$ dus elk twee reëele waarden; is deze vorm negatief, dan zijn $\Delta x_1 \ldots$ imaginair.

Wij onderscheiden dus twee gevallen.

Hebben $\Sigma(\lambda H)$ en A hetzelfde teeken, dan moet men, om reëele waarden voor $\Delta x_1 \ldots$ te krijgen, ΔT negatief nemen; de temperatuur T_R is dus een maximum. Bij T_R bestaat dus een enkel evenwicht E_R; bij $T_R + \Delta T$ (wij nemen $\Delta T > 0$) bestaat geen evenwicht E; bij $T_R - \Delta T$ bestaan er echter twee verschillende evenwichten, die wij E' en E'' zullen noemen.

Hebben $\Sigma(\lambda H)$ en A hetzelfde teeken, dan moet men ΔT positief nemen, om reëele waarden voor $\Delta x_1 \ldots$ te krijgen; T_R is dus een minimum. Bij $T_R + \Delta T$ bestaan dan twee verschillende evenwichten E' en E''; bij $T_R - \Delta T$ bestaat geen evenwicht E.

Wij kunnen het voorgaande ook op de volgende wijze uitdrukken.

Is bij constante P de temperatuur op de keerlijn E_R een maximum, dan gaan van uit deze keerlijn twee bladen van het veld naar lagere T en geen enkel blad naar hoogere T.

Is bij constante P de temperatuur op de keerlijn E_R een minimum, dan gaan van uit deze keerlijn twee bladen van het veld naar hoogere T en geen enkel blad naar lagere T.

Bij onze beschouwingen over het veld E in de vorige mededeeling XVI, hebben wij deze uitkomsten reeds toegepast. De fig. 2 (XVI) en 4 (XVI), waarin ef eene keerlijn voorstelt, zijn hiermede in overeenstemming. In fig. 7 (XVI) zijn ql en dm de grenslijnen, MSm eene keerlijn. Om in te zien dat ook dit diagram met deze uitkomsten in overeenstemming is, beschouwen wij de horizontale lijn $qrst$; om de ligging der bladen beter te doen uitkomen, is zij ten deele gestippeld en in r en s gekromd. In r is de T een maximum; van uit kurve mS gaan dan ook twee bladen naar lagere en geen naar hoogere T. In s is de T een minimum; van uit kurve MS gaan dan ook twee bladen naar hoogere en geen naar lagere temperaturen.

Wij hebben gezien dat bij de temperatuur T_R slechts een enkel evenwicht $E_R = F_1 + F_2 + \ldots$ bestaat en dat tusschen de phasen van dit evenwicht eene phasenreactie kan optreden. Bij $T_R + \Delta T$ [$\Delta T < 0$ als T_R een maximum; $\Delta T > 0$ als T_R een minimum is] bestaan twee evenwichten, n.l.

$$E' = F'_1 + F'_2 + \ldots \quad \text{en} \quad E'' = F_1'' + F_2'' + \ldots$$

Tusschen de phasen van E' kan geene phasen-reactie optreden; evenmin tusschen die van E''. De onveranderlijke phasen hebben in de drie evenwichten natuurlijk dezelfde samenstelling; de samenstellingen der veranderlijke phasen verschillen in de drie evenwichten slechts weinig van elkaar. Wij zullen nu aantoonen:

a. De concentratiegebieden van E_R, E' en E'' liggen in het concentratiediagram buiten elkaar. De drie evenwichten hebben dus zulke samenstellingen, dat geen van hen in een der beide andere kan omgezet worden.

b. Het concentratiegebied van E_R ligt tusschen die van E' en E''.

c. De overeenstemmende phasen der drie evenwichten (b.v. F_1 F_1' en F_1''; F_2 F_2' en F_2''; enz.) liggen op eene rechte lijn; deze wordt door de phase van het evenwicht E_R in gelijke stukken verdeeld.

Alvorens dit aan te toonen zullen wij eerst de beteekenis door enkele voorbeelden toelichten.

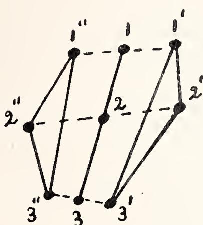


Fig. 1.

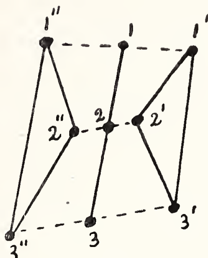


Fig. 2.

Wij kiezen daartoe het ternaire evenwicht

$$E = F_1 + F_2 + F_3$$

Stelt men deze phasen in het concentratiediagram door de punten 1, 2 en 3 voor, dan liggen bij T_R deze drie punten op een rechte lijn (lijn 123 in fig. 1 en 2). Het concentratiegebied van E_R is dus de lijn 123.

Bij de temperatuur $T_R + \Delta T$ bestaan de evenwichten:

$$E' = F_1' + F_2' + F_3' \quad \text{en} \quad E'' = F_1'' + F_2'' + F_3''$$

Wij zullen eerst aannemen dat elk der phasen van het evenwicht E eene veranderlijke samenstelling heeft; de phasen van E' worden dan in fig. 1 en 2 door de punten 1′, 2′ en 3′; die van E'' door 1″, 2″ en 3″ voorgesteld. De punten 1′, 2′ en 3′ liggen in de onmiddellijke nabijheid der punten 1, 2 en 3; zij vormen de hoekpunten van een driehoek 1′ 2′ 3′, die het concentratiegebied van het evenwicht E' voorstelt. Driehoek 1″ 2″ 3″ stelt het concentratiegebied van E'' voor.

Volgens *a* mogen de lijn 123 en de driehoeken 1′2′3′ en 1″2″3″ geen enkel punt met elkaar gemeen hebben; volgens *b* moet de lijn 1 2 3 tusschen de beide driehoeken liggen; volgens *c* zijn 1′11″,

2'22" en 3'33" rechte lijnen en is $11' = 11''$, $22' = 22''$ en $33' = 33''$. Wij krijgen dus een diagram als in fig. 1 en 2.

Uit de rechte lijn, die bij de temperatuur T_R optreedt, ontstaan dus bij $T_R + \Delta T$ twee driehoeken; omgekeerd vallen de twee driehoeken, die bij $T_R + \Delta T$ optreden, bij T_R in eene rechte lijn samen,

De voor fig. 1 en 2 beschreven overgangen zullen optreden, als het ternaire evenwicht E bestaat uit 3 vloeistoffen, of uit 2 vloeistoffen en damp, of 3 soorten mengkristallen, of uit een mengkristal + vloeistof + damp, enz.

Heeft een der phasen b.v. F_1 eene onveranderlijke samenstelling, dan krijgt men fig. 3 of 4; hebben twee phasen b.v. F_1 en F_2 eene onveranderlijke samenstelling, dan krijgt men fig. 5.

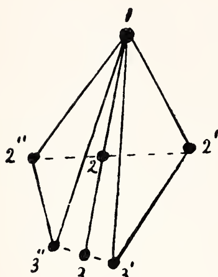


Fig. 3.

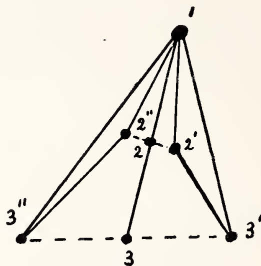


Fig. 4.

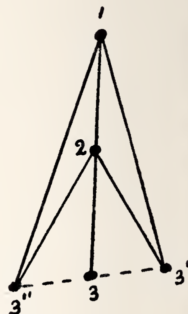


Fig. 5.

Om bovenstaande regels aan te toonen stellen wij van het evenwicht E_R de samenstelling

$$\begin{array}{llllll} \text{van} & F_1 & \text{door} & x_1 & y_1 & z_1 \ldots \\ ,, & F_2 & ,, & x_2 & y_2 & z_2 \ldots \end{array}$$

enz. voor.

Van het evenwicht E' is dan de samenstelling

$$\begin{array}{lllll} \text{van} & F_1' & x_1 + \Delta x_1 & y_1 + \Delta y_1 & z_1 + \Delta z_1 \\ ,, & F_2' & x_2 + \Delta x_2 & y_2 + \Delta y_2 & z_2 + \Delta z_2 \end{array}$$

en van het evenwicht E'' is de samenstelling

$$\begin{array}{lllll} \text{van} & F_1'' & x_1 - \Delta x_1 & y_1 - \Delta y_1 & z_1 - \Delta z_1 \\ ,, & F_2'' & x_2 - \Delta x_2 & y_2 - \Delta y_2 & z_2 - \Delta z_2 \end{array}$$

enz

Hierin zijn Δx_1 $\Delta x_2 \ldots$ bepaald door (9) en (10); het is duidelijk dat deze zoowel positief als negatief kunnen zijn.

Om het evenwicht E_R om te kunnen zetten in E', moet men kunnen voldoen aan

$$a_1 F_1 + a_2 F_2 + \ldots = b_1 F_1' + b_2 F_2' + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

waarin alle coëfficienten positief moeten zijn.

Uit (21) volgt:

$$a_1 + a_2 + \ldots = b_1 + b_2 + \ldots$$
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots = b_1 (x_1 + \Delta x_1) + b_2 (x_2 + \Delta x_2) + \ldots$$
$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots = b_1 (y_1 + \Delta y_1) + b_2 (y_2 + \Delta y_2) + \ldots$$

enz. Stelt men $a_1 - b_1 = c_1$; $a_2 - b_2 = c_2$; enz., dan gaan de vorige vergelijkingen over in:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 0 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots = b_1 \Delta x_1 + b_2 \Delta x_2 + \ldots \\ c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots = b_1 \Delta y_1 + b_2 \Delta y_2 + \ldots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

enz.... Men kan uit de n vergelijkingen (22) $c_1 \ldots c_n$ elimineeren. Wij tellen ze nl. samen, na de 1e met μ_1, de 2e met μ_2, enz. vermenigvuldigd te hebben. Daar x_1 $y_1 \ldots$ nl. voldoen aan (9), zoo voldoen ze ook aan:

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 + \mu_2 x_1 + \mu_3 y_1 + \ldots = 0 \\ \mu_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 y_2 + \ldots = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

enz. (22) gaat dan over in:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = b_1 [\mu_2 \Delta x_1 + \mu_3 \Delta y_1 + \ldots] + b_2 [\mu_2 \Delta x_2 + \mu_3 \Delta y_2 + \ldots] \\ \qquad + \ldots + b_n [\mu_2 \Delta x_n + \mu_3 \Delta y_n + \ldots] \end{array}\right\} . \quad (24)$$

Tevens blijkt uit (9) dat men aan (23) kan voldoen, door $\mu_2 = a\, d(x)_1 = a\, d(x)_2 = \ldots$, $\mu_3 = a\, d(y)_1 = a\, d(y)_2 = \ldots$, enz. te nemen, (24) gaat dus over in:

$$0 = b_1 [d(x)_1 \Delta x_1 + d(y)_1 \Delta y_1 + \ldots] + b_2 [d(x)_2 \Delta x_2 + d(y)_2 \Delta y_2 + \ldots] + \ldots$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven:

$$0 = b_1 d^2 Z_1 + b_2 d^2 Z_2 + \ldots + b_n d^2 Z_u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Wij moeten nu aan (25) kunnen voldoen door aan b_1 $b_2 \ldots$ positieve waarden te geven. Beschouwt men nu alleen evenwichten in stabielen (of metastabielen) toestand, dan zijn $d^2 Z_1$, $d^2 Z_2, \ldots$ positief; men kan dus niet aan (25) en dus ook niet aan (21) voldoen.

Hieruit volgt dus dat E_R en E' zich niet in elkaar kunnen omzetten; daar men dit op dezelfde wijze voor E_R en E'' en ook voor E' en E'' kan afleiden, zoo is de sub *a* genoemde eigenschap aangetoond. Uit de afleiding blijkt tevens dat ze niet behoeft te gelden voor evenwichten in labielen toestand.

Voor de evenwichten E' en E'' volgt deze eigenschap ook dadelijk zonder berekening, nl. uit de voorwaarde dat bij constante P en T de ζ een minimum moet zijn.

De sub b en c genoemde eigenschappen volgen nu dadelijk uit eigenschap a en formule (20).

Leiden Anorg. Chem. Lab. (*Wordt vervolgd*).

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan getiteld: „*Oppervlakken, welke door een lineaire stralencongruentie op een vlak kunnen worden afgebeeld.*"

1. Om een afbeelding (1,1) van een kubisch oppervlak op een plat vlak te verkrijgen, kan men gebruik maken van de bilineaire congruentie, welke twee op dat oppervlak gelegen rechten tot richtlijnen heeft. Ook kan men daartoe de lineaire congruentie (1,3) bezigen, welke wordt gevormd door de bisecanten van een op het oppervlak gelegen kubische ruimtekromme.[1]) Men zou zich ook kunnen bedienen van de congruentie (1,3) der stralen, die een kubische ruimtekromme en een van haar bisecanten snijden, mits die twee richtlijnen op het oppervlak zijn gelegen.

Wij zullen nu, meer algemeen, oppervlakken beschouwen, welke door middel van een *lineaire stralencongruentie* $(1, n)$ kunnen worden afgebeeld.

De afbeelding van een oppervlak Φ^{n+p+1} met een n-voudige en een p-voudige rechte door middel van een *bilineaire congruentie* is uitvoerig behandeld door GUCCIA en MINEO.[2])

2. Zij nu gegeven een oppervlak Φ^{2n+1} met een n-voudige kubische ruimtekromme a^3. Door een punt P van Φ gaat een bisecante van a, welke het tafereel τ in P' snijdt; in het algemeen heeft een punt P één beeld P', en, omgekeerd, is een punt P' van τ het beeld van één punt P.

Beschouwen wij het regelvlak $\mathfrak{C}$ gevormd door de bisecanten t, die de punten van een vlakke doorsnede γ^{2n+1} afbeelden. In het vlak dier kromme liggen drie rechten t; dus is $\mathfrak{C}$ van den graad $(2n+4)$.

De kegel, welke a^3 uit een van haar punten projecteert, bepaalt op γ^{2n+1} blijkbaar $(n+2)$ punten P; bijgevolg is a een $(n+2)$voudige kromme op $\mathfrak{C}^{2n+4}$.

[1]) Zie b.v. R. STURM, *Geometrische Verwandtschaften*, IV, 288.

[2]) GUCCIA, *Sur une classe de surfaces, représentables point par point sur un plan* (Ass. francaise pour l'avancement des sciences, 1880). MINEO, *Sopra una classe di superficie unicursali* (Le matematiche pure ed applicate, volume I, p. 220).

Het beeld van γ^{2n+1} *is dus een kromme van den graad* $(2n+4)$ *met drie* $(n+2)$*voudige punten* A; deze kromme zal door het symbool $c^{2n+4}(3A^{n+2})$ worden aangewezen.

De beelden van twee vlakke doorsneden hebben de $(2n+1)$ punten P' gemeen, die de beelden zijn van de punten P gelegen op de snijlijn der beide vlakken. Behalve de $3(n+2)^2$ in de hoofdpunten A gelegen snijpunten hebben zij dus nog $m=(n^2+2n+3)$ punten G gemeen; deze zijn blijkbaar de doorgangen van even zoovele op Φ^{2n+1} gelegen bisecanten g van a^3.

Op het oppervlak liggen dus minstens (n^2+2n+3) *rechten.*

In het bijzonder volgt hieruit, dat elke op een kubisch oppervlak gelegen kubische ruimtekromme zes rechten van Φ^3 tot bisecanten heeft. [1])

De complex van vlakke doorsneden van Φ^{2n+1} wordt bijgevolg afgebeeld door een complex (∞^3) van krommen c^{2n+4}, welke drie $(n+2)$-voudige en (n^2+2n+3) enkelvoudige basispunten heeft.

3. De kromme a^3 wordt afgebeeld door het regelvlak $\mathfrak{A}$ der bisecanten t, die Φ^{2n+1} in een van haar beide steunpunten aanraken. De rechten g zijn dubbele beschrijvende lijnen van $\mathfrak{A}$; immers zij kunnen geacht worden in twee punten van a^3 te raken.

Zij nu x de graad van $\mathfrak{A}$, y de multipliciteit van a^3 op dat regelvlak. De doorgang op τ is dan een kromme $a^x(3A^y, mG^2)$. Daar a^3 met een vlakke doorsnede γ^{2n+1} blijkbaar $3n$ punten gemeen heeft, levert de beschouwing van hun beelden de betrekking

$$(2n+4)x = 3(n+2)y + 2(n^2+2n+3) + 3n.$$

Daar twee bisecanten van a^3 elkaar slechts op die kromme kunnen snijden, heeft $\mathfrak{A}$ met een willekeurige bisecante $2y$ punten gemeen; dus is $x=2y$.

Men vindt nu $y=2n+3$, $x=4n+6$.

Het beeld der kromme a^3 *is dus een kromme* $a^{4n+6}(3A^{2n+3}, mG^2)$.

4. Elk der n vlakken, welke Φ^{2n+1} in een punt R van a^3 aanraken, bevat een beschrijvende lijn t van het regelvlak $\mathfrak{A}$, die a^3 nog in een punt S snijdt. De overige $(n+3)$ in R samenkomende rechten t raken Φ^{2n+1} in een ander punt van a^3. De puntenparen R,S behooren tot een verwantschap met kenmerkende getallen $n+3$ en n. De punten S, die bij eenzelfde punt R behooren, vormen paren van een involutorische verwantschap met kenmerkend getal $(n+3)(n-1)$; de coïncidenties zijn afkomstig van punten R, waar twee der raakvlakken samenvallen. Op a^3 liggen dus $2(n+3)$ $(n-1)$ *cuspidaalpunten.*

[1]) Voor $n=2$ vindt men het uitvoerig door R. STURM behandelde oppervlak Φ^5 met dubbelkromme a^3 (*Geom. Verw.* IV, 311).

Met elk punt R komen n punten der beeldkromme a overeen; daardoor zijn de punten van a in een involutie I_n gerangschikt.

5. Zij in het tafereel τ een kromme f gegeven die van den graad p is, a_k maal door het hoofdpunt A_k en g_k maal door het hoofdpunt G_k gaat. Met de beeldkromme $c^{2n+4}(A_k^{n+2}, G_k)$ heeft zij, buiten de hoofdpunten om, een aantal punten gemeen, aangewezen door

$$p^* = (n+2)(2p - \Sigma a_k) - \Sigma g_k.$$

Dit getal is blijkbaar de graad der ruimtekromme Φ, welke f tot beeld heeft.

Daar f met $a^{4n+6}(A_k^{2n+3}, G_k^2)$, buiten de hoofdpunten, een aantal punten gemeen heeft, voorgesteld door

$$n^* = (2n+3)(2p - \Sigma a_k) - 2\Sigma g_k,$$

rust de kromme Φ in n^* punten op de kromme a^3. Een rechte l is dus het beeld van een λ^{2n+4}, die a^3 in $(4n+6)$ punten snijdt.

6. Ter vereenvoudiging der afbeelding onderwerpen wij de figuren in τ aan een quadratische transformatie, welke A_k tot hoofdpunten heeft. Daardoor wordt de beeldkromme c^{2n+4} omgezet in een kromme $\mathfrak{c}^{n+2}$, welke niet door A_k gaat, maar wel door de (n^2+2n+3) punten $\mathfrak{G}$ waarin de hoofdpunten G worden omgezet.

Met de krommen γ^{2n+1}, waarin het oppervlak Φ^{2n+1} wordt gesneden door de vlakken γ van een bundel, komen nu overeen de krommen van een bundel $(\mathfrak{c}^{n+2})$. Hieronder zijn er $3(n+1)^2$, welke een dubbelpunt bezitten, wat dan tevens het geval is met de overeenkomstige krommen γ^{2n+1}.

Het oppervlak Φ^{2n+1} is dus van de klasse $3(n+1)^2$.

De rechte $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ wordt door de quadratische transformatie omgezet in de kegelsnede $f^2(A_k G_1 G_2)$ en deze is het beeld van een ruimtekromme Φ^n, die in $(2n-1)$ punten op a^3 rust. Immers door f^2 en a^3 gaat een hyperboloide, welke met Φ^{2n+1} de kromme f^2 en n maal de kromme a^3 gemeen heeft; de restdoorsnede is de bedoelde Φ^n.

7. *Wij zullen thans een oppervlak Φ^{n+p+1} beschouwen, dat n maal gaat door een ruimtekromme van den graad q, α^q, en p maal door een rechte β, welke $(q-1)$ maal door α^q wordt gesneden.*

De rechten t, die α en β snijden, vormen een lineaire congruentie $(1,q)$, waardoor Φ op een vlak τ wordt afgebeeld; immers, t snijdt Φ, behalve op α en β, nog slechts in één punt P.

Het regelvlak $\mathfrak{C}$ dat de vlakke doorsnede γ^{n+p+1} afbeeldt, is thans van den graad $(n+p+q+1)$; in het vlak γ liggen toch q beschrijvende lijnen.

Uit een punt van β wordt α^q geprojecteerd door een kegel van

den graad q, met $(q-1)$voudige ribbe β, die γ^{n+p+1} in $(p+q)$ punten P snijdt. Dus gaat $\mathfrak{C}$ $(p+q)$maal door β.

Uit een punt van α wordt β geprojecteerd door een vlak, dat $(n+1)$ punten P op γ bepaalt. Dus is α^q een $(n+1)$voudige richtlijn.

De beeldkromme van γ^{n+p+1} is bijgevolg een kromme $c^{n+p+q+1}$ (qA^{n+1}, B^{p+q}).

Twee krommen c hebben, buiten de punten A en B en de beelden der $(n+p+1)$ punten op de doorsnede van hun vlakken, een aantal punten G gemeen voorgesteld door

$$m=(n+p+q+1)^2-(n+1)^2q-(p+q)^2-(n+p+1)=$$
$$=n(n+1)+(2n+1)p-(n^2-1)q.$$

Hieruit volgt, dat het oppervlak Φ^{n+p+1} minstens m rechten bevat.

Stelt men hier $q=1$, dan blijkt, dat *een oppervlak Φ^{n+p+1} met een n-voudige en een p-voudige rechte $2np+n+p+1$ rechten bevat, die op de veelvoudige rechten rusten.*[1]) Voor $n=1$ blijkt het getal m onafhankelijk van q te zijn; men vindt dat een oppervlak Φ^{p+2} met p-voudige rechte $m=3p+2$ rechten g bevat, die op α en β rusten. Een vlak door β en een dier rechten bevat nog een rechte h, die niet op α rust; op Φ^{p+2} liggen dus minstens $6p+4$ rechten.

8. Bepalen wij nu het beeld der rechte β. Een vlak γ door β bevat nog een kromme γ^{n+1}, welke op α, buiten β, een n-voudig punt Q heeft. Daar zij β in $(n+1)$ punten snijdt, bevat het vlak $(n+1)$ rechten t, die het oppervlak in punten van β raken, dus beschrijvenden zijn van het regelvlak $\mathfrak{B}$ waardoor β wordt afgebeeld; dus is α een $(n+1)$-voudige richtlijn. Daar Q voor $(q-1)$ verschillende standen van het vlak γ op β komt te liggen, zal t even vaak met β samenvallen, dus is β een $(q-1)$-voudige torsale rechte. Maar elk der p vlakken, die Φ in een punt van β aanraken bevat één rechte t; derhalve is de multipliciteit van β op $\mathfrak{B}$ gelijk aan $(p+q-1)$ en de graad van $\mathfrak{B}$ gelijk aan $(n+p+q)$.

Het beeld der rechte β is dus een kromme b^{n+p+q} $(qA^{n+1}, B^{p+q-1}, mG)$.

Deze uitkomst kan gecontroleerd worden door het aantal punten te bepalen, welke b met een kromme c buiten de hoofdpunten A, B, G gemeen heeft; men vindt dan, naar behooren, het getal p, zijnde het aantal gemeenschappelijke punten van β^p en γ^{n+p+1}.

9. Trachten we nu het beeld van α^q te bepalen. Elk der n

---

1) Zie Mineo t. a. p. bl. 221 of J. de Vries, *Surfaces algébriques renfermant un nombre fini de droites* (Archives Teyler, ser. II, t VIII, p. 262).

vlakken welke Φ in een punt Q van α aanraken, bevat één rechte t van het regelvlak $\mathfrak{A}$, dat α afbeeldt, dus is α een n-voudige richtlijn.

Is β een y-voudige richtlijn, dan bevat een vlak door β dus een doorsnede van den graad $(n+y)$, en de beeldkromme van α heeft tot symbool a^{n+y} $(qA^n,\ B^y,\ mG)$.

Door combinatie met $c^{n+p+q+1}$ $(qA^{n+1},\ B^{p+q},\ mG)$ vindt men, ter bepaling van y, de betrekking $(n+p+q+1)\,(n+y) = n\,(n+1)q + (p+q)\,y + m + nq$, waarbij rekening is gehouden met het feit, dat een vlakke doorsnede nq punten met a^q gemeen heeft.

Uit deze betrekking volgt $y = p + q$.

Bijgevolg is het beeld van a^q *een kromme* a^{n+p+q} $(qA^n,\ B^{p+q},\ mG)$.

Combinatie met het beeld van β levert een controle; dan blijkt, dat de beeldkrommen a en b, naar behooren, buiten de hoofdpunten, $n\,(q-1)$ punten gemeen hebben.

10. Stellen wij in de gevonden uitkomsten $n=1, q=3, p=1$, dan verkrijgen wij de afbeelding van het kubisch oppervlak, waarop in § 1 werd gedoeld. De richtlijnen der lineaire congruentie (1, 3) zijn dan een ruimtekromme α^3 van Φ^3 en een der zes op Φ^3 gelegen bisecanten van α^3.

Het beeld van een vlakke γ^3 is dan een c^6 $(3\,A^2,\ B^4)$. Worden de zes bovengenoemde bisecanten door b_k aangeduid en is b_1 de richtlijn der (1,3), dan worden de vijf rechten c_{1k} door punten afgebeeld.

Het beeld van α^3 is een a^5 $(3\,A,\ B^4,\ 5\,C)$, het beeld van b_1 een b^5 $(3A^2,\ B^3,\ 5\,C)$; deze krommen hebben, naar behooren, nog twee punten gemeen, die de beelden zijn van de steunpunten der bisecante b_1.

Het is gemakkelijk, uit deze gegevens de beelden der overige 21 rechten van Φ^3 te bepalen.

Wiskunde. De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan: „*Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde.*"

In aansluiting aan mijn voor tien jaren verschenen werk: „*Over de Grondslagen der Wiskunde*" (Amsterdam, MAAS en VAN SUCHTELEN, 1907) vallen thans de volgende opmerkingen te maken:

1. De groepentheoretische karakteriseering der hoofdbewerkingen op het meetbaar continuum (p. 12—35) is gedetailleerd uitgewerkt in *Mathem. Ann.* 67, p. 246—267. In het bijzonder vindt men aldaar p. 258 het bewijs zoowel van de p. 20 onderaan als van de p. 22 onderaan uitgesproken eigenschap betreffende de dubbelpunten

der componeerende eenledige groepen[1]); p. 260—262 de rechtvaardiging van den p. 25 bovenaan uitgevoerden overgang van de differentieerbaarheid zonder meer der toenamefuncties tot de toepasbaarheid der grondformule van LIE; p. 264—265 de oplossing van het p. 35 gestelde probleem betreffende de projectieve groep.

2. De afleiding van het boogelement der tweedimensionale Euclidische en niet-Euclidische geometrieën van het uitgangspunt van RIEMANN, die p. 43—46 door middel van infinitesimaalbeschouwingen[2]) wordt verricht, is synthetisch uitgevoerd in *Hand. XII. Nederl. Nat. en Geneesk. Congr.*, p. 192—196, terwijl met andere infinitesimaalmethoden het doel reeds vroeger was bereikt door KILLING in „*Einführung in die Grundlagen der Geometrie*" I, p. 80—89 en door FLYE-Ste MARIE in „*Théorie des parallèles*", p. 12—19. De p. 46—47 geschetste afleiding van het n-dimensionale uit het tweedimensionale boogelement is uitvoeriger ontwikkeld in *Hand. XII. Nederl. Nat. en Geneesk. Congr.*, p. 196—199.

3. Van de p. 63—66 opgesomde en *Atti IV. Congr. Int. d. Mat.* III, p. 569—571 overgenomen drie constructieprincipes voor puntverzamelingen eischt de consequentie van het intuitionistische standpunt (vgl. *Jahresber. d. D. M. V.* 23, p. 79), dat het derde vervalt, terwijl bij het tweede in het oneindige vertakkingsagglomeraat, waarop, als het afbrekingsproces tot een eind is gekomen, de operatie „completeering tot een continuum" wordt toegepast, niet slechts splitsingen in twee, doch ook in een willekeurig eindig of aftelbaar oneindig aantal deeltakken behooren te worden toegelaten[3]), waardoor het eerste constructieprincipe in een bijzonder geval van het tweede overgaat. De uit de vaststelling der constructieprincipes volgende oplossing van het continuumprobleem blijft ook na deze wijzigingen haar geldigheid behouden. Op alle drie de genoemde plaatsen, evenals in „*Intuitionisme en Formalisme*", p. 23 en in *Amer. Bull.* (2) 20, p. 92—93, liggen aan de evidentie van de aftelbare of continue machtigheid eener puntverzameling (en ook aan die van de splitsbaarheid eener afgesloten puntverzameling in een perfekte en een aftelbare) twee essentieele onderstellingen ten grondslag, en wel ten eerste, dat de puntverzameling *geïndividualiseerd* kan worden geconstrueerd, d. w. z. zóó, dat twee verschillende oneindig voortgezette takken van het vertakkingsagglomeraat tot twee verschillende

---

[1]) De p. 21—22 gegeven afleiding van de laatste eigenschap uit de eerste wordt dus voor den bewijsgang overbodig.

[2]) Van de hierbij ingevoerde differentiaalquotiënten is, ter plaatse waar ze gebruikt worden, telkens het bestaan evident.

[3]) Op bijzondere wijze geschiedt dit trouwens reeds p. 158.

punten voeren, ten tweede, dat de geïndividualiseerd geconstrueerde puntverzameling *inwendig ontleed* kan worden, d. w. z. dat het afbrekingsproces der zich niet weer vertakkende takken, dat na een aftelbaar aantal schreden tot een eind moet voeren, werkelijk kan worden uitgevoerd. Inderdaad heeft men op het intuitionistische standpunt, waarop het gebruik van het onbeperkte comprehensie-axioma (vgl. beneden onder 7.) is uitgesloten, en waarop men zich daarom van speciale aannamen betreffende den aard der construeerbaarheid der te beschouwen puntverzamelingen, en dienovereenkomstig betreffende de begrenzing van het gebied der verzamelingsleer, nimmer kan bevrijden, het recht, zoodanige onderstellingen, als ter wille van de levensvatbaarheid der theorie wenschelijk zijn, in de constructieprincipes geïmpliceerd te achten. Intusschen is mij gebleken, dat, zooals ik in een eerlang verschijnend werk hoop uiteen te zetten, met behoud van de levensvatbaarheid der theorie, de begrenzing van het gebied der verzamelingsleer ruimer, en zonder de beide laatstgenoemde implicaties in de constructieprincipes, kan worden genomen, waarvan dan tevens het gevolg is, dat de oplossing van het continuumprobleem in tegengestelden zin uitvalt. Vgl. het *Amer. Bull.* (2) 20, p. 92 in een noot gegeven voorbeeld van een deelverzameling van het continuum met een machtigheid grooter dan de aftelbare, doch kleiner dan de continue.

4. Bij den opbouw der voorbeelden van niet-Archimedische hoofdbewerkingen behoort p. 68 r. 4 in plaats van: „voorzooverre alle indices er van grooter zijn, dan die van een bepaalde gegeven coördinaat" te worden gelezen: „voorzooverre bij gegeven voorafgaande indices elke index er van grooter is, dan een bepaald getal". Verder behoort p. 69 r. 1, 3 en 12 in plaats van „index" resp. „indices" te worden gelezen „nummer" resp. „nummers" en behooren p. 71 r. 13 de letters q en r te worden verwisseld. Uitgebreide mogelijkheden tot opbouw van *commutatieve* niet-Archimedische hoofdbewerkingen zijn intusschen ontwikkeld door Hahn in *Wiener Sitzungsber.* 116, p. 601—655.

5. De p. 85—88 gegeven afleiding van de differentieerbaarheid eener functie uit de continuiteit van het systeem der differentiequotiënten is uitvoeriger ontwikkeld en uitgebreid tot hoogere differentiaalquotiënten en functies van meerdere veranderlijken in *Versl. K. Ak. v. Wet.* 17, p. 38—45.

6. Een nadere bevestiging van het p. 95—99 en 118—121 ten opzichte van de objectiviteit en aprioriteit van ruimte en tijd verdedigde standpunt is geleverd door de diensten, die de relativiteitstheorie in de natuurkunde heeft bewezen. Vgl. de desbetreffende

uiteenzettingen in *„Het Wezen der Meetkunde"*, p. 5—13, in het bijzonder ter illustratie van de noodzakelijkheid der objectiviteitsdefinitie van p. 96.

7. In het betoog, dat logica afhankelijk is van wiskunde, worden p. 131—132 de toepassingen van het zoogenaamde principe van *tertium exclusum* (of principe van *tertium non datur*) op de wiskunde nietszeggende tautologieën genoemd. Dit is onjuist; integendeel, deze toepassingen vormen dikwijls ongeoorloofde petitiones principii, zooals nader is uiteengezet in *Tijdschr. v. Wijsbeg.* 2, p. 152—158. Verder wordt p. 135 het *comprehensie-axioma* (d.w.z. het bestaansaxioma der verzameling van alle wiskundige entiteiten, die een gegeven eigenschap bezitten) beperkt tot die wiskundige entiteiten, die behooren tot een te voren opgebouwd wiskundig systeem *s*. Hier moet verder worden gegaan en in overeenstemming met p. 177 de eisch worden toegevoegd, dat de door het axioma gepostuleerde verzameling zelf ook een opbouwbaar wiskundig systeem is (De door ZERMELO in *Mathem. Ann.* 65, p. 263 geformuleerde eisch van het nieuwere formalisme, dat voor elke entiteit van *s* moet vaststaan, of de bedoelde eigenschap er voor geldt of niet geldt, is, al naarmate de *oplosbaarheid van alle wiskundige problemen* er bij wordt ondersteld of niet, veel te zwak of veel te sterk voor de intuitionistische beschouwingswijze).

8. De p. 140 geciteerde verhandeling van MANNOURY is intusschen met geringe wijzigingen gereproduceerd in zijn werk *„Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik"*, p. 59—72, en een opstel met eng verwanten gedachtengang over hetzelfde onderwerp is gepubliceerd door ZERMELO in *Acta Mathem.* 32, p. 185—193. Van beiden lijden de bewijsvoeringen aan de wiskundige fout van het gebruik van het onbeperkte comprehensie-axioma en het principium tertii exclusi, en aan de logische fout van het ontbreken van een niet-strijdigheidsbewijs. Bovendien postuleert (vgl. *N. Arch. v. Wisk.* (2) 9, p. 201) het betoog van MANNOURY l. c. p. 71 het *bestaan* eener O—R, n.l. die der geschreven ordinaalgetallen, een postulaat aequivalent met de erkenning van de intuitie der volledige inductie, en wordt l. c. p. 72 bovenaan zonder bewijs aangenomen, dat een verzameling *a*, die met alle deelverzamelingen van een verzameling *b* een aequivalent gedeelte bezit, ook een met *b* zelf aequivalent gedeelte bezit [1]), waartegenover het betoog van ZERMELO l. c. p. 190 de logische petitio principii, die in het *keuze-axioma* (vgl. *„Intuitionisme en Formalisme"*, p. 15) ligt uitgedrukt, noodig heeft.

[1]) Een ander l. c. *N. Arch. v. Wisk.* tegen dezelfde zinsnede geuit bezwaar kan daarentegen door een geringe wijziging van den bewijsgang worden ondervangen.

9. In verband met de bespreking der tweede getalklasse op p. 144—149 vergelijke men *Amer. Bull.* (2) 20, p. 91, waar overigens in de noot door een zinstorende drukfout de aangehaalde uitdrukkingen: „muss es geben" en „können wir bestimmen" verwisseld zijn.

10. In verband met de p. 149—151 geformuleerde logische en wiskundige preciseeringen van het continuumprobleem, en de correspondeerende oplossingen er van, vergelijke men nader „*Intuitionisme en Formalisme*", p. 22—25 en *Amer. Bull.* (2) 20, p. 91—93, alsmede het boven onder 3. opgemerkte.

11. Ten opzichte van het p. 152—153 besproken welordeningsprobleem kan in overeenstemming met *Jahresber. d. D. M. V.* 23, p. *81*, waar echter de nauwkeurigheid der redactie te wenschen overlaat, worden opgemerkt, dat een door een oneindig vertakkingsagglomeraat bepaalde puntverzameling slechts zóó lineair te ordenen is, dat achtereenvolgens een fundamentaalreeks van eindige verzamelingen i_1, i_2, ... van eindige takken, die geen verlengingen van elkander zijn, lineair geordend wordt, waarbij dan voor elke k zekerheid moet bestaan, dat $\mathfrak{S}\ \{i_k,\ i_{k+1}, \ldots\}$ van alle oneindige takken beginsegmenten bevat, terwijl elke fundamentaalreeks van elkaar bevattende en achtereenvolgens tot i_{α_1}, $i_{\alpha_2}, \ldots$ (α_ν onbepaald toenemend) behoorende eindige takken tot een enkel punt moet convergeeren. Stellen we door j_k voor de aftelbare verzameling van eindige takken, die wordt verkregen, door in de takkenverzameling $\mathfrak{S}\ \{i_k,\ i_{k+1}, \ldots\}$ alleen de takken te behouden, die geen verlenging van een voorafgaanden tak dezer verzameling zijn, dan kan in elke tak τ van een j_ν slechts voor hoogstens één punt (namelijk voor datgene, dat bepaald wordt, door voor $\mu > \nu$ in elke volgende j_μ steeds de *laatst* geordende takverlenging te kiezen) zekerheid worden verkregen, dat het in de resulteerende ordening der beschouwde puntverzameling een eerstvolgende element bezit. De punten, waarvoor deze zekerheid te verkrijgen is, kunnen dus onmogelijk een verzameling van grootere dan de aftelbare machtigheid vormen, zoodat *een puntverzameling van grootere dan de aftelbare machtigheid zeker niet in haar geheel welgeordend kan worden.*

12. De kritiek op het aequivalentietheorema van Bernstein (p. 153—155) is nader gepreciseerd en door een voorbeeld toegelicht in „*Intuitionisme en Formalisme*", p. 26—29 en *Amer. Bull.* (2) 20, p. 94—96. De kritiek op de door Bernstein gedefinieerde afbeelding van de aftelbare ordetypen op punten van het continuum (p. 156—157) wordt beter zoo geformuleerd, dat de methode van Bernstein geen middel geeft, om voor een gegeven aftelbaar ordetype het correspondeerende punt van het continuum te bepalen, zoodat de

afbeelding alleen kan worden uitgevoerd voor die ordetypen, waarvoor onder de verschillende wetten van voortschrijding der ordening met de aftelling, waardoor ze worden voortgebracht, een bepaalde keuze is gedaan, welke ordetypen een hoogstens aftelbaar onaffe verzameling vormen.

13. De wiskundige beteekenis van de stelling, dat F (de verzameling der functies eener reëele variabele) een grootere machtigheid bezit, dan C (de verzameling der punten van het continuum) wordt beter, dan p. 259 is gedaan, als volgt geformuleerd: „Met alle punten van het continuum kan men verschillende functies eener reëele variabele in correspondentie brengen, doch naast elk oneindig vertakkingsagglomeraat van zoodanige functies kan men een functie aangeven, die er niet toe behoort. Vgl. ook *„Intuitionisme en Formalisme"*, p. 25.

14. De p. 160 gegeven voorstelling, als zouden ten opzichte ook van oneindige wiskundige systemen de invoering van de *logische som*, het *logische product*, en de *complementairverzameling* steeds veilige operaties zijn, berust op een reeds boven onder 7. gekritiseerden vorm van het comprehensie-axioma, en kan daarom niet worden volgehouden. Het op dezelfde pagina, evenals p. 163—164, voor wiskundige in tegenstelling met onwiskundige subjecten en praedicaten gehandhaafde principe van *tertium non datur* is eveneens reeds boven onder 7. verworpen, ook voor wiskundige systemen.

15. Ten opzichte van de rekenkunde van Russell behoort te worden opgemerkt, dat de p. 168 ter sprake komende ontwikkelingen (l. c. p. 121—123) weliswaar op de intuitie der volledige inductie berusten, doch volgens den schrijver uitdrukkelijk slechts een voorloopig karakter dragen; inderdaad kunnen de bewuste eigenschappen ook onafhankelijk van deze intuitie worden afgeleid op grond van het p. 167 aangehaalde definitiesysteem. Dit beteekent echter voor het standpunt van Russell geen versterking, daar het bedoelde definitiesysteem eerst bruikbaar wordt na toevoeging van het existentiepostulaat van minstens één klasse van het in de laatste definitie aangegeven karakter, een postulaat dat in het comprehensie-axioma niet geïmpliceerd ligt en vrijwel op toelating van intuitieve volledige inductie neerkomt.

Wiskunde. De Heer Brouwer biedt een mededeeling aan: *„Over lineaire inwendige grensverzamelingen."*

We beschouwen een inwendige grensverzameling I, die binnen het eenheidsinterval is bepaald als doorsnede van de intervalverzamelingen $i_1, i_2, \ldots$, waarvan elke volgende in de voorgaande bevat is. De complementairverzameling C van I is dan de vereeniging van de afgesloten puntverzamelingen $a_1, a_2, \ldots$, waarvan elke volgende de voorgaande bevat. *We onderstellen, dat zoowel I als C in ieder deelinterval van het eenheidsinterval niet-aftelbaar is*; we mogen dan aannemen, dat elke a_ν als laatste afgeleide een perfekte deelverzameling p_ν bezit, stellen het verschil van a_ν en p_ν voor door v_ν, de complementairverzameling van p_ν door u_ν en de als doorsnede van $u_1, u_2, \ldots$ bepaalde inwendige grensverzameling door U. De verzameling der intervallen van een willekekeurige u_ν ligt dan overal dicht, bezit het ordinaalgetal η, en de maximumgrootte harer intervallen convergeert voor onbepaald toenemende ν tot nul.

Gesteld nu, dat we beschikken over een verzameling j_ν met het ordinaalgetal η van intervallen behoorende tot $u_\nu, u_{\nu+1}, u_{\nu+2}, \ldots$, die geen enkel punt van v_ν, doch alle niet tot v_ν behoorende punten van U bevat. We zullen een methode aangeven, om van j_ν te komen tot een verzameling $j_{\nu+1}$ van intervallen behoorende tot $u_{\nu+1}, u_{\nu+2}, u_{\nu+3}, \ldots$, die geen enkel punt van $v_{\nu+1}$, doch alle niet tot $v_{\nu+1}$ behoorende punten van U bevat, die verder geheel binnen j_ν gelegen is, en wel zoodanig, dat elk interval van j_ν een intervalverzameling met het ordinaalgetal η van $j_{\nu+1}$ bevat.

Zij AB een willekeurig interval van j_ν, dat bovendien behoort tot $u_\mu (\mu \geq \nu)$, zij ε de binnen AB liggende intervalverzameling van $u_{\mu+1}$, en w de intervalverzameling, die overblijft, als aan ε alle er in bevatte punten van $v_{\nu+1}$ worden onttrokken. Zij PQ een willekeurig interval van w, s_ρ de als doorsnede van u_ρ en het interval PQ bepaalde intervalverzameling, t_ρ de intervalverzameling, die overblijft, als aan s_ρ haar eerste en haar laatste interval, *voorzoover deze bestaan*, worden onttrokken, γ de als vereeniging van $t_1, t_2, \ldots$ bepaalde intervalverzameling, en φ de intervalverzameling, die ontstaat, als binnen elk interval van w een intervalverzameling wordt bepaald op dezelfde wijze, als γ binnen PQ is bepaald. De gezochte intervalverzameling $j_{\nu+1}$ wordt dan verkregen, door binnen elk interval van j_ν een intervalverzameling te bepalen op dezelfde wijze, als φ binnen AB is bepaald.

Verstaan we bij definitie zoowel onder u_0 als onder j_0 het een-

heidsinterval zelf, dan wordt j_1 uit j_0 verkregen door dezelfde methode als $j_{\nu+1}$ uit j_ν.

De als doorsnede van $j_1, j_2, \ldots$ bepaalde inwendige grensverzameling bevat alle punten van U, die tot geen der puntverzamelingen v_ν behooren, dus a fortiori alle punten van U, die tot geen der puntverzamelingen a_ν behooren, dus ook alle punten van het eenheidsinterval, die tot geen der puntverzamelingen a_ν behooren. Ze bevat echter geen enkel punt eener v_ν, en als deelverzameling van U ook geen enkel punt eener p_ν, dus tenslotte geen enkel punt eener a_ν. Ze is derhalve de complementairverzameling van C, dus *identiek met* I.

Brengen we op het eenheidsinterval een ternale schaalverdeeling aan, en verstaan we onder $d_{\nu+1}$ de verzameling der intervallen, die (als ϱ_ν een willekeurige eindige reeks van cijfers 0, 1 en 2, waaronder ν cijfers 1, voorstelt) een beginpunt met coördinaat $0{,}\varrho_\nu 1$ en een eindpunt met coördinaat $0{,}\varrho_\nu 2$ bezitten, dan kunnen we de intervalverzameling j_1 met behoud van de orderelaties der intervallen eeneenduidig afbeelden op de intervalverzameling d_1; vervolgens kunnen we de binnen een willekeurig interval van j_1 gelegen intervalverzameling van j_2 met behoud van de orderelaties der intervallen eeneenduidig afbeelden op de binnen het correspondeerende interval van d_1 gelegen intervalverzameling van d_2; enzoovoort. Op deze wijze bepalen we een eeneenduidige continue transformatie van het eenheidsinterval in zichzelf, waarbij I overgaat in de verzameling τ_2 der punten met een coördinaat, wier ternale ontwikkeling een oneindig aantal cijfers 1 bezit, en C in de verzameling τ_1 der punten met een coördinaat, wier ternale ontwikkeling een eindig aantal cijfers 1 bezit. Stellen we dus het *geometrische type* (vgl. deze *Verslagen* XXI, p. 1418) van τ_1 resp. τ_2 voor door $\bar{\mu}$ resp. $\bar{\nu}$, dan hebben we bewezen de volgende

Stelling 1. *Een lineaire inwendige grensverzameling, die, evenals haar complementairverzameling, in ieder deelinterval niet-aftelbaar is, bezit het geometrische type* $\bar{\nu}$, *en haar complementairverzameling het geometrische type* $\bar{\mu}$.

Zijn H en K twee willekeurige punten van τ_1, dan kunnen we ν zoodanig kiezen, dat H en K *geen van beide* eindpunt van een interval van d_ν zijn, zoodat we de intervalverzameling d_ν en de puntverzameling c_ν, die haar complementairverzameling uitmaakt, op zoodanige wijze elk in zichzelf kunnen transformeeren, dat de orderelaties tusschen de elementen der verzameling, bestaande uit de punten van c_ν en de intervallen van d_ν, behouden blijven, en

H in K overgaat. Deze transformatie kunnen we op zoodanige wijze uitbreiden tot een eeneenduidige continue transformatie van het eenheidsinterval in zichzelf, dat in correspondeerende intervallen van d_ν de er in bevatte deelverzamelingen van τ_1 resp. τ_2 aan elkaar beantwoorden. We krijgen dan een eeneenduidige continue transformatie van het eenheidsinterval in zichzelf, waarbij τ_1 in zichzelf, en het willekeurig gekozen punt H van τ_1 in het willekeurig gekozen punt K van τ_1 overgaat, zoodat τ_1 *een homogene puntverzameling is.*

Zijn H en K twee willekeurige punten van τ_2, en is H resp. K bevat in het interval h_ν resp. k_ν van d_ν, dan kunnen we de intervalverzameling d_1 met behoud van de orderelaties der intervallen zoo in zichzelf transformeeren, dat h_1 in k_1 overgaat; deze transformatie kunnen we uitbreiden tot een transformatie der intervalverzameling d_2 in zichzelf, waarbij de orderelaties der intervallen wederom behouden blijven, en h_2 in k_2 overgaat; dit proces onbepaald voortzettende, bepalen we een eeneenduidige continue transformatie van het eenheidsinterval in zichzelf, waarbij d_ν voor elke ν, dus ook τ_2 in zichzelf, en het willekeurig gekozen punt H van τ_2 in het willekeurig gekozen punt K van τ_2 overgaat, zoodat *ook* τ_2 *een homogene puntverzameling is,* en we bewezen hebben de volgende.

STELLING 2. *Een, evenals haar complementairverzameling, in ieder deelinterval niet-aftelbare lineaire inwendige grensverzameling is, evenals haar complementairverzameling, homogeen.*

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan van den Heer Dr. H. B. A. BOCKWINKEL: „*Enige opmerkingen over de volledige transmutatie.*" (Zevende mededeling.)

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ.)

34. Als tegenhanger van de formule die de koëffisienten van de rezultante van enige volledige reeksen uitdrukt in de koëffisienten van de komponenten behandelen we nu nog de formule die de grootheden ξ voor de rezultante uitdrukt in diezelfde grootheden voor de komponenten. We doen hierbij het best, voortdurend een omgeving van de oorsprong te beschouwen; of, zo niet, dan onder ξ_m te verstaan de getransmuteerde van $(x—x_0)^m$; neemt men in dit laatste geval $x—x_0$ als nieuwe veranderlike aan, dan wordt alles tot het eerste teruggebracht.

We duiden de bedoelde funksies voor de reeksen $P_1, P_2, \ldots$ resp.

aan door $\xi_{1,m}, \xi_{2,m}, \ldots$, de rezulterende voor twee, drie, ... reeksen door $\xi_{II,m}, \xi_{III,m}, \ldots$; verder houden we de notaties en onderstellingen van het vorige nummer. Nemen we eerst weer twee komponenten, dan is

$$\xi_{II,m} = P_2 \, P_1 \, (x^m) = P_2 \, (\xi_{1,m})$$

De funksie $\xi_{1,m}(x)$ behoort tot de sirkel (a_1), dus is volgens (67) in (a_2)

$$\xi_{II,m} = \xi_{1,m}(x + a_2) = \sum_0^\infty{}_i \frac{a_{2,i} \, \xi_{1,m}^{(i)}}{i\,!}, \quad . \quad . \quad , \quad . \quad (84)$$

waarin het laatste lid de eigenlike betekenis uitdrukt. Nu is verder $a_{2,i}$ in de funksies $\xi_{2,m}$ uit te drukken met behulp van de simboliese formule (23); dit geeft

$$\xi_{II,m} = \sum_0^\infty{}_i \frac{(\xi_2 - x)^i \, \xi_{1,m}^{(i)}(x)}{i\,!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84')$$

met de bedoeling dat de uitgevoerde vervanging van $a_{2,i}$ door $(\xi_2 - x)^i$ voorlopig niets anders beduidt dan een *berekeningswijze* van $a_{2,i}$ beschouwd als *geheel*. We bedenken nu weer dat een overeenkomstige formule, met gelijk geldigheidsgebied, van toepassing is in het geval dat uit het hier beschouwde ontstaat, door de funksies $a_{1,m}, a_{2,m} \ldots$ door hun natuurlike majoranten te vervangen. Daardoor komen volgens (23) ook voor de funksies $\xi_{1,m}, \xi_{2,m}, \ldots$ majorantfunksies in de plaats, al behoeven dat niet de *natuurlike* majoranten te zijn [1]). Om plaatsrovende herhalingen van formules te vermijden, zullen we ons maar een ogenblik voorstellen dat de formule (84) op het laatstgenoemde geval betrekking heeft. We zijn dan echter in dit geval nog niet gerechtigd, het aggregaat dat ontstaat, door ieder binomium van de reeks in (84′) te ontwikkelen als absoluut konvergent te beschouwen, indien x in het gebied (a_2) ligt, omdat men niet weet of men in die ontwikkeling $-x$ door $+x$ mag vervangen. Daarom maken we een schatting van de grootte van de som $\sum_0^i{}_h \, i_h \, x^h \, \xi_{2,\,i-h}$, die we door het simbool $(\xi + x)^i$ kunnen voorstellen, en merken daartoe vooreerst op dat de grootheden ξ_m voor een *volledige* transmutatie aan dezelfde karakteristieke eigenschap voldoen als de koëffisienten a_m van de betreffende reeks: op de duur kleiner te zijn, in absolute waarde, dan de m^e macht van een van m onafhankelik getal. Dit volgt uit formule (23). Van

---

1) Dit geldt, als een willekeurig punt x_0 middelpunt van de gebieden is, alleen, zo men onder ξ_m de getransmuteerden van $(x-x_0)^m$ verstaat.

zeker rangnummer $k = E$ af is nl., in een volledigheidsgebied (α), $|a_k| < (a + \varepsilon)^k$, waarbij a van α afhangt en ε willekeurig klein is. Men heeft nu volgens (23), $m \geq E$ onderstellende,

$$|\xi_m| \leq \sum_{0}^{E-1} {}_k\, m_k\, \alpha^{m-k}\, |a_k^*| + \sum_{E}^{m} {}_k\, m_k\, \alpha^{m-k}\, (a + \varepsilon)^k$$

$$\leq \longleftarrow\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow + \sum_{0}^{m} {}_k \longleftarrow\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow$$

$$\leq \longleftarrow\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow + (a + \alpha + \varepsilon)^m$$

Het rechterlid van deze ongelijkheid bestaat uit $E + 1$, dus een van m onafhankelik aantal termen, zodat we, ter bepaling van een majorantwaarde voor $\overline{lim}\, |\xi_m|^{\frac{1}{m}}$, maar op elk van de termen afzonderlik hebben te letten. Voor de eerste E termen is de overeenkomstige limiet blijkbaar niet groter dan α, voor de laatste term is hij gelijk aan $a + \alpha = \beta$; dus is β een majorantwaarde voor de limiet die betrekking heeft op de totale som. We hebben nu bewezen de volgende stelling:

Is in alle punten x van een gebied (α) met de oorsprong tot middelpunt

$$\overline{lim}_{m=\infty}\, |a_m|^{\frac{1}{m}} \leq a\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (85)$$

waarin a_m voor iedere gehele waarde van m een in dat gebied reguliere funksie is, dan geldt in diezelfde punten voor de simboliese macht $(x + a)^m$

$$\overline{lim}_{m=\infty}\, |(x + a)^m|^{\frac{1}{m}} \leq \alpha + a \quad \ldots \ldots \quad (86)$$

En als gevolg hiervan:

Is een transmutatie volledig in een sirkelvormig gebied (α) rondom de oorsprong, met korresponderend gebied (β), dan is bovenste limiet

$$\overline{lim}_{m=\infty}\, |\xi_m|^{\frac{1}{m}}$$

van de m^e wortel uit de modulus van de getransmuteerde ξ_m van x^m niet groter dan β. [1])

Hetzelfde blijft van kracht, indien men voor ξ_m de bovenbedoelde majorantfunksie substitueert, en wel met *onveranderde* β, zoals uit de stelling in de slotalinea van N°. 23 (5e mededeling) volgt.

---

[1]) Voor een omgeving van een willekeurig punt x_0 geldt hetzelfde van de getransmuteerde van $(x-x_0)^m$.

Passen we nu deze uitkomst op het bovenstaande geval toe, dan vinden we dat, in alle punten x van een gebied (a) niet groter dan (a_2)

$$\overline{\lim_{m=\infty}} |\xi_{2,m}|^{\frac{1}{m}} \leq a + (a_1 - a_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

aangezien a_1 het getal is dat, voor de reeks P_2, met a_2 korresponderdeert, en het verschil tussen korresponderende sirkelstralen a en β niet toeneemt, als a afneemt. En verder, evenals de ongelijkheid (86) uit (85) volgt, kan men uit de laatst gevondene afleiden

$$\overline{\lim_{m=\infty}}' |(\xi_{2,m} + x)^m|^{\frac{1}{m}} \leq 2a + a_1 - a_2$$

Om deze ongelijkheid was het ons te doen. Er volgt uit dat de reeks die uit (84′) ontstaat door in $(\xi_2 - x)^i$ het min- door het plusteken te vervangen (en voor de funksies $\xi_{1,m}$ en $\xi_{2,m}$ de bovengenoemde majorantfunksies te substitueren), konvergeert in ieder gebied (a) waarvoor

$$3a + a_1 - a_2 < a_1 \,, \quad \text{of} \quad a < \tfrac{1}{3}\, a_2 \,,$$

en wel omdat $\xi_{1,m}$ (x) regulier is in (a_1); een nadere toelichting moge hier achterwege blijven, aangezien deze zou neerkomen op herhaling van hetgeen al zo dikwels, bij de bespreking van de konvergentie van volledige reeksen, gezegd is. In zo'n gebied (a) konvergeert dus ook *absoluut* het aggregaat dat ontstaat, door in iedere term van de reeks in (84′) het simboliese binomium te ontwikkelen. Dat aggregaat mag derhalve willekeurig gegroepeerd worden, zolang x in 't gebied $(\frac{1}{3}\, a_2)$ ligt. We doen dit zó dat elementen met eenzelfde indeks bij ξ_2, of eenzelfde eksponent, als we deze nog niet door een indeks vervangen hebben, bijeenkomen, en kunnen dan de koëffisient die daarbij verkregen wordt op eenvoudige manier vinden. Vooreerst merken we op dat, als ξ_2 een getal voorstelt, het rechterlid van (84′) de formele ontwikkeling is van de grootheid $\xi_{1,m}$ (ξ_2) op de plaats $\xi_2 = x$. Nu is het een bekend, en eenvoudig te bewijzen feit uit de funksieteorie dat men de *formele* ontwikkeling van een funksie $f(y)$ op de plaats $y=0$,

$$f(y) = \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \frac{y^k f^{(k)}(0)}{k!}$$

uit die op de plaats $y=x$,

$$f(y) = \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \frac{(y-x)^i f^{(i)}(x)}{i!} \,,$$

kan krijgen, door in de laatste reeks iedere faktor $(y-x)^i$ te ont-

wikkelen naar machten van y en in het zo ontstane aggregaat de termen met eenzelfde macht y^k van y te verenigen: de koëffisient wordt dan de *formele* ontwikkeling van $f^{(k)}(o):k!$ op de plaats x. We zeggen ekspres: „*formele* ontwikkeling", omdat het kan gebeuren dat er geen enkele waarde van y is waarvoor beide reeksen *tegelijk* konvergeren, doordat de konvergentiesirkels van $f(y)$ voor de punten $y=0$ en $y=x$ geheel buiten elkaar liggen. Of, zo er al *wel* zo'n waarde is, kan 't toch zijn dat de formele machtreeks voor $f^{(k)}(0):k!$ voor de plaats $y=x$ divergeert, doordat de konvergentiesirkel voor deze plaats het punt $y=0$ niet bevat. De uitspraak is er niet te minder geldig om, aangezien de *formele* ontwikkelingen onafhankelik zijn van de biezondere aard van de funksies, en men weet dat er funksies zijn, n.l. de gehele transsendente, waarvoor de beide reeksen in 't hele vlak konvergeren.

Passen we nu de voorgaande overweging in ons geval toe, dan komen we tot het besluit dat de gezochte koëffisient van $\xi_2{}^k$ de formele machtreeksontwikkeling van $\xi_{1,m}^{(k)}(0):k!$ op de plaats x is. Maar deze *formele* ontwikkeling is hier ook *essentieel*, zo x in 't gebied $(\frac{1}{3}\alpha_2)$ ligt, want dat de reeks dan konvergeert, ligt, als nevenrezultaat, in het bovenverkregene, dat n.l. het aggregaat waarover wij hier spreken absoluut in $(\frac{1}{3}\alpha_2)$ konvergeert, opgesloten. De bedoelde koëffisient is dus ook in waarde gelijk aan $\xi_{1.m}^{(k)}(0):k!$ zodat we kunnen schrijven

$$\xi_{II,m}=\{\xi_{1,m}\}_{\xi_2}=\sum_{0}^{\infty}{}_k\frac{\xi_{2,k}(x)\xi_{1,m}{}^{(k)}(0)}{k!}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

waarin het laatste lid de betekenis aangeeft van het simboliese tweede. Zoals gezegd, is de formule geldig in ieder gebied (α) waarvan de straal niet groter is dan $\frac{1}{3}\alpha_2$. De reeks in het laatste lid konvergeert echter in het *hele* gebied (α_2), omdat de limiet in het linkerlid van (87) voor $\alpha=\alpha_2$ volgens diezelfde ongelijkheid, kleiner is dan α_1, en $\xi_{1,m}(x)$ regulier is in het gesloten gebied (α_1), met welke toelichting we weer kunnen volstaan. De konvergentie is ook *uniform* in (α_2), de termen zijn in dat gebied reguliere funksies van x, dus stelt ook de hele reeks een in (α_2) reguliere funksie voor. Deze moet identiek zijn met $\xi_{II,m}(x)$ omdat ook $\xi_{II,m}(x)$ in (α_2) regulier is, en de beide funksies al in het gebied $(\frac{1}{3}\alpha_2)$ overeenstemmen. Tenslotte is de simboliese formule (88) dus geldig in hetzelfde gebied als zijn tegenhanger (73).

De veralgemening van (88) ligt onmiddellik voor de hand. Blijkbaar is

$$\xi_{III,m} = \{\xi_{II,m}\}_{\xi_3} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

geldig in 't gebied (a_3), omdat $\xi_{II,m}$ behoort tot (a_2). Samen met (88) levert dit op

$$\xi_{III,m} = \{\{\xi_{1,m}\}_{\xi_2}\}_{\xi_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

met de betekenis: men moet $\xi_{1,m}(x)$ naar machten van x ontwikkelen, daarin x^i door $\xi_{2,i}(x)$ vervangen, dan stelt de komende, in (a_2) absoluut en uniform konvergente reeks de in datzelfde gebied reguliere funksie $\xi_{II,m}(x)$ voor; deze funksie ontwikkele men alsdan weer naar machten van x en vervange x^i door $\xi_{3,i}(x)$; dan stelt de komende, in (a_3) absoluut en uniform konvergente reeks de in datzelfde gebied reguliere funksie $\xi_{III,m}(x)$ voor.

Op te merken valt dat deze interpretatie in 't geheel niet afwijkt van degene die aan het tweetal formules (88) en (89) vóór hun samensmelting tot (90) beantwoordt, zodat er bij deze vereniging ook niets naders te bewijzen is. Dit wordt anders, zodra men het slot van het voorschrift niet zou willen uitvoeren op de gevonden funksie $\xi_{II,m}$, *beschouwd als geheel*, maar op de oneindige reeks als hoedanig hij verkregen is. Maar dat dit inderdaad geoorloofd zou zijn, ziet men weer in met behulp van de natuurlike majoranten van $a_{1,m}$, $a_{2,m}$, ...

35. Bij de toepassing op biezondere gevallen zijn dikwels ook nog weer biezondere herleidingen met de simbolen nodig die men apart moet rechtvaardigen. Alleen om hierop de aandacht te vestigen willen we nog een enkel geval bespreken, maar overigens menen we tans, na de uitvoerige beschouwing van de voorbeelden met de transmutaties D^{-1} en S_ω in de vorige mededeling, verdere toelichting van de hier gevonden simboliese formules met voorbeelden achterwege te kunnen laten, vooral omdat aan de hand van *deze* formules presies dezelfde algemene uitkomsten omtrent rezulterende grootheden verkregen worden, als aan de hand van de formule van Bourlet.

Beginnen we met het geval $T_1 = T_2 = S_\omega$. Hier is

$$a_{1,i} = a_{2,i} = (\omega - x)^i .$$

Formule (73) toepassende vinden we achtereenvolgens

$$a_{II,m} = \sum_0^m {}_k m_k \, a_2^{m-k} a_{1,k}(x + a_2) = \sum_0^m {}_k m_k \, a_2^{m-k} [\omega(x + a_2) - (x + a_2)]^k$$

$$= [\omega(x + a_2) - x]^m .$$

Hierbij is de overgang van het voorlaatste tot het laatste lid een herleiding die door de biezondere vorm van het gegeven mogelik is. Maar het *geoorloofde* van deze overgang ligt nog in de *algemene*

beschouwingen opgesloten, volgens welke men analitiese herleidingen uitvoeren mag. De verkregen vorm moet nu in een machtreeks naar a_2 ontwikkeld worden, die blijkens de algemene teorie voor iedere m bestaan moet, als x in het gebied (α_2) ligt: dit komt ook uit, want de konvergentiesirkel van ω is groter dan een volledigheidsgebied (α_1) van S_ω, en dus stellig groter dan (α_2). We kunnen de bedoelde machtreeks ook krijgen, door die voor $m = 1$, volgens de gewone regel voor de machtsverheffing van reeksen, tot de m^e macht te verheffen; dit bedoelen we, wanneer we schrijven

$$a_{II,m} = \left[\sum_0^\infty{}_i \frac{a_2{}^i\, \omega^{(i)}(x)}{i\,!} - x\right]^m, \quad \ldots\ldots \quad (91)$$

waarbij de term $-x$ met de term voor $i = 0$ onder het Σ-teken samengenomen te denken is.

Is de machtsverheffing verricht, dan moet $a_2{}^i$ door $a_{2,i}$ vervangen worden. Het eigenaardige is nu dat men de volgorde van deze twee laatste bewerkingen mag omkeren, en dat zit daarin dat $a_2{}^i$ hier niet slechts een simboliese, maar ook een werkelike i^e macht is (van een van i onafhankelik getal $\omega - x$). Daardoor is tans de remplaçant van het produkt van twee simboliese machten gelijk aan het produkt van hun remplaçanten, en dit heeft het geoorloofde van de bedoelde vervanging ten gevolge. [1]) Er komt

$$a_{II,m} = \left[\sum_0^\infty{}_i \frac{(\omega - x)^i\, \omega^{(i)}(x)}{i\,!} - x\right]^m$$

De oneindige som binnen de haken (zonder de term $-x$) is nu een formele reeksontwikkeling van $\omega\,[\omega(x)]$ en, als men het behandelde in N°. 26 van de vorige mededeling raadpleegt, met name formule (60), dan blijkt dat die ontwikkeling de genoemde grootheid ook inderdaad in het gebied (α_2) voorstelt. Men heeft dus ten slotte

$$a_{II,m} = [\omega\,[\omega\,(x)] - x]^m,$$

wat natuurlik veel gemakkeliker langs andere weg te vinden is (door op te merken dat $S_\omega S_\omega$ een nieuwe substitutieoperatie is met de substitutiefunksie $\omega[\omega(x)]$).

Ten tweede beschouwen we het geval $T_1 = S_\omega$, $T_2 = D^{-1}$. Hier is $a_{1,i}$ hetzelfde als in 't vorige geval, en

$$a_{2,i} = \frac{(-1)^i\, x^{i+1}}{i+1}$$

---

[1]) Om deze reden komt 't bv. ook uit, als men, bij de toepassing van formule (24), $a_m = (\xi - x)^m$, op de substitutieoperatie, vóór de ontwikkeling van het binomium, ξ door ω vervangt.

zoals al meermalen gebruikt is (zie o. a. N°. 16, 3e mededeling). Aangezien de eerste komponent hetzelfde is als in 't vorige geval, geldt ook weer formule (91). Tans mag men echter de volgorde van de machtsverheffing en de vervanging van $a_2{}^i$ door $a_{2,i}$ niet omkeren, daar hier het simbool $a_2{}^i$ niet de i^e macht van een van i onafhankelik getal is. Maar men mag iets anders doen. We hebben nl. ook

$$a_{2,i} = \int_0^x (t - x)^i \, dt$$

zodat $a_{2,i}$ altans de *integraal* van een i^e macht is. We kunnen dus als verder voorschrift, ter herleiding van de machtreeks in het rechterlid van (91), ook dit geven: vervang $a_2{}^i$ door $(t-x)^i$ en integreer iedere term tussen de grenzen $t=0$ en $t=x$. *Deze* vervanging nu mag men, op dezelfde grond als zo even, vóór de m^e machtsverheffing uitvoeren, zodat men kan zeggen: de machtreeks in $(t-x)$

$$\sum_0^{\infty}{}_i \frac{(t-x)^i \, \omega^{(i)}(x)}{i\,!} - x\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

waarbij de term $-x$ met de term voor $i=0$ onder het Σ-teken is samen te nemen, moet volgens de gewone regel voor de machtsverheffing van reeksen tot de m^e macht verheven worden en de uitkomst term voor term tussen de grenzen $t=0$ en $t=x$ geintegreerd. Nu is de oneindige reeks in (91) (zonder de term $-x$) een formele ontwikkeling van $\omega(t)$ en, als men N°. 28 van de vorige mededeling raadpleegt, waaruit blijkt dat de konvergentiestraal van $\omega(x)$ groter is dan $(2a_2)$, dan komt men tot het besluit dat die ontwikkeling ook essentieel is, voor waarden van x in (a_2). De genoemde m^e-machtsverheffing voert dus tot een machtreeks in $(t-x)$ die, voor de bedoelde x-waarden, de funksie $[\omega(t) - x]^m$ voorstelt, en daar de konvergentie van de laatstgenoemde machtreeks *uniform* in het intergratieinterval plaats heeft, levert zijn integratie term voor term de integraal op van de funksie die hij reprezenteert. We hebben dus tenslotte

$$a_{II,m} = \int_0^x [\omega\,(t) - x]^m \, dt$$

wat ook in N°. 28 gevonden is.

Bij de toepassing van formule (88), ter bepaling van $\xi_{II,m}$, doen zich in beide hier beschouwde gevallen analoge biezonderheden voor,

36. In de beide vorige mededelingen hebben we, bij de bespreking van de rezultante van twee volledige transmutaties, onze uitspraken kunnen vereenvoudigen, door te onderstellen dat we te doen hadden met het volgende geval: Zijn de funksies $\overline{a}_m$ (x) of $\overline{a}_m$ de natuurlike majoranten van de koëffisienten a_m van een reeks P, die een transmutatie voorstelt, welke volledig is in zekere sirkelvormige gebieden (α), met middelpunt x_0 en een straal α die varieert tussen 0 en zekere waarde A, dan is het maksimum $\overline{a}$ (α), in het gebied (α), van de bovenste limiet (Zie N°. 23.)

$$\overline{a}_x = \overline{\lim_{m=\infty}} |\overline{a}_m|^{\frac{1}{m}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6')$$

binnen het interval (0, A) een *kontinue* funksie van α. Daaruit konden we dan afleiden dat de overeenkomstige grootheid a (α), behorende bij de gegeven funksies a_m zelf, gelijk was aan de eerstgenoemde, en dus ook kontinu binnen (0, A), indien we verder nog aannamen, zoals we voortdurend gedaan hebben, dat de uniformiteitsonderstelling van N°. 4, 2e alinea, vervuld was. Uit deze gelijkheid nu van a (α) en $\overline{a}$ (α) vloeide de bedoelde vereenvoudiging voort. We hebben in N°. 23 in uitzicht gesteld dat we op de vraag, of de genoemde kontinuiteit het enig mogelike geval vertegenwoordigt, misschien zouden terugkomen. Tans willen we dat doen.

We kunnen, ter bekorting van de notaties, een omgeving van de oorsprong beschouwen, en verder, zolang we het alleen over de natuurlike majoranten hebben, deze grootheden zonder de tot nu toe gebruikelike strepen noteren, evenals andere die daarvan afhangen, zoals het linkerlid van de identiteit (6′). Dit bereikt in de sirkel (α) zijn maksimum voor de reële pozitieve waarde $x = \alpha$, zodat we hebben

$$a\,(\alpha) = \overline{\lim_{m=\infty}}\, [a_m\,(\alpha)]^{\frac{1}{m}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (93)$$

De onderstelling dat de reeks P volledig is in (α) involveert dat alle funksies a_m tot die sirkel *behoren* (d.w.z. regulier zijn binnen en op de omtrek van (α)). Zij R de bovenste grens van de stralen van sirkels waarvoor dit geldt. Dan hebben we nu eenvoudig de volgende kwestie: Gegeven, de funksie a_m (α) van de reële veranderlike α kan, voor alle gehele, pozitieve waarden van m, in het interval (0, R) (met uitzondering misschien van het rechtereindpunt R) in een machtreeks met reële pozitieve koëffisienten ontwikkeld worden. Gevraagd, te onderzoeken of, en in hoeverre, de funksie a (α), bepaald door (93), *kontinu* in dat interval is.

Omdat blijkbaar $a\ (\alpha)$ toeneemt met α, zien we onmiddellik het volgende in: 1° Als $a\ (\alpha)$ eindig is voor zekere waarde van α in het interval $(0, R)$, dan is $a\ (\alpha)$ ook eindig voor alle kleinere waarden van dat interval; 2° Als $a\ (\alpha)$ oneindig is voor zekere waarde van α in het interval $(0, R)$, dan is $a\ (\alpha)$ ook oneindig voor alle grotere waarden van dat interval. Er is dus een punt A in genoemd interval dat de scheiding vormt tussen de eindige waarden van $a\ (\alpha)$, links van A, en de oneindige, rechts van A. Het punt A kan met $\alpha = 0$ of met $\alpha = R$ samenvallen; in het eerste geval is er van de funksie $a\ (\alpha)$ verder niets te zeggen; de korresponderende transmutatie is in geen enkel nog zo klein gebied rondom de oorsprong volledig, zodat we van dit geval kunnen afzien. (Een voorbeeld levert $a_m\ (x) = m!\ x^m$, waarbij $R = \infty$, maar $A = 0$ is).

We nemen dus het geval dat er een interval $(0, A)$ is, deel uitmakend van het interval $(0, R)$ of er mee samenvallend, waar binnen $a\ (\alpha)$ een eindige waarde heeft, *en zullen nu aantonen dat diskontinuiteit* b i n n e n *dat interval uitgesloten is.*

We splitsen daartoe alle machtreeksen, voor de verschillende waarden van m, in twee stukken, waarvan het eerste een met m evenredig aantal km termen bevat; we schrijven dus

$$a_m (\alpha) = \sum_{0}^{\infty}{}_n\, c_{m,n}\, \alpha^n = P_m (\alpha) + Q_m (\alpha)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

waarin

$$P_m (\alpha) = \sum_{0}^{km-1}{}_n\, c_{m,n}\, \alpha^n \quad , \quad Q_m (\alpha) = \sum_{km}^{\infty}{}_n\, c_{m,n}\, \alpha^n\,,$$

en k een van m onafhankelik getal is waarover we nog nader zullen beschikken. Aan ieder van de delen P_m en Q_m beantwoordt, evenals aan het geheel, een bovenste limiet als in (93) aangegeven; deze zullen we resp. met de namen *eerste* en *tweede* limiet aanduiden, terwijl we dan de limiet voor het geheel ook de *totaal*limiet zullen noemen. We kunnen nu weer gebruik maken van de stelling die we in N°. 32 van de vorige mededeling uitgesproken hebben, en die ons al meer bij de beoordeling van dergelijke limieten te pas gekomen is. Volgens deze is de grootste van de limieten, berekend voor de beide delen P_m en Q_m afzonderlik, gelijk aan de totaallimiet, en, bij gelijkheid van de beide eerstgenoemde, is de totaallimiet òf óók gelijk daaraan, òf kleiner; het laatste is hier echter uitgesloten, omdat geen van de reekstermen negatief is.

Wanneer nu de totaallimiet $a\,(\alpha)$ in alle inwendige punten van het interval $(0, A)$ gelijk aan *nul* is, dan is $a\,(\alpha)$ meteen *kontinu* in

die punten en is dus verder niets te bewijzen. Blijft over het geval dat er een punt α_1 in (o, A) te vinden is waarvoor die limiet gelijk is aan een zeker *pozitief* getal λ_1. Wij beweren dan: Er is in $\alpha = \alpha_1$ een waarde k_1 voor het gehele getal k aan te geven, zodanig, dat de eerste limiet niet kleiner is dan de tweede, en dus gelijk aan de totaallimiet λ_1. Immers, stel dat in α_1 de tweede limiet voor een *willekeurige* waarde van k de overhand had, en dus gelijk was aan λ_1. Dan zou die limiet in een *rechts* van α_1 gelegen punt α van het interval $(0, A)$ *minstens* $\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)^k$-maal zo groot zijn als het pozitieve getal λ_1 en dus, daar k willekeurig groot te denken was, niet anders dan oneindig groot kunnen zijn, in strijd met ons uitgangspunt. Er is dus inderdaad een waarde $k = k_1$ als bedoeld.

Voor een *links* van α_1 gelegen punt α van het interval heeft nu de tweede limiet, bij *dezelfde* waarde k_1 van k, evenmin de overhand, en is dus de eerste limiet weer gelijk aan de totaallimiet. Immers, de tweede limiet is daar *minstens*, en de eerste *hoogstens* $\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)^{k_1}$-maal zo klein. Uit dit laatste volgt meteen dat de eerste limiet, en dus ook de totaallimiet, in geen enkel zodanig punt α gelijk aan nul kan zijn. Verder is voor twee willekeurige punten α en α' binnen het interval $(0, \alpha_1)$ de verhouding van de waarden die de eerste limiet daar aanneemt gelegen tussen $\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{k_1}$ en 1, en nadert dus tot 1 als α' nadert tot α; m.a.w. de eerste limiet, en dus evenzeer de totaallimiet, is een *kontinue* funksie van α in het interval $(0, \alpha_1)$.

Uit de onderstelling dat $a(\alpha_1)$ eindig is en niet nul hebben we dus afgeleid dat $a(\alpha)$ binnen het interval $(0, \alpha_1)$ kontinu is en ook niet gelijk nul. Maar als $a(\alpha_1)$ van nul verschilt geldt dit van iedere waarde van $a(\alpha)$ voor $\alpha_1 < \alpha < A$. Dus komen we tot het besluit dat $a(\alpha)$ kontinu en van nul verschillend is binnen een *willekeurig* onderinterval van $(0, A)$ dat hiermee het linkereindpunt gemeen heeft; en dus kort en goed binnen $(0, A)$. We hebben dus ten slotte dit rezultaat: De limietwaarden (93) zijn in de inwendige punten van het interval $(0, A)$ òf alle gelijk aan nul, òf alle verschillend van nul, maar ook in dit laatste geval vormen ze een *binnen* dat interval *kontinue* funksie van α. De stelling die we wilden bewijzen is hiermede aangetoond.

Omtrent de eindpunten van het interval $(0, A)$ valt uit het voorgaande niets op te maken. Ten opzichte van deze punten kunnen we de volgende gevallen onderscheiden, die ook alle, blijkens de toegevoegde voorbeelden, mogelik zijn.

1°. De funksie $a(\alpha)$ is in beide eindpunten kontinu (wel te verstaan *rechts* kontinu in $\alpha = 0$, *links* kontinu in $\alpha = A$).

Voorbeelden: $a_m(x) = 1 + x^{m^2}$. Het interval $(0, R)$, waarbinnen de funksies $a_m(\alpha)$ in een machtreeks naar α kunnen worden ontwikkeld, is hier het interval $(0, \infty)$; het maksimum A van de α-waarden waarvoor $a(\alpha)$ eindig is, is gelijk aan 1. De funksie $a(\alpha)$ is in het gesloten interval (0,1) gelijk aan de konstante 1. Een ander voorbeeld is $a_m(x) = x_m + x^{m^2}$, waarvoor ook $R = \infty$, $A = 1$ is; hier is $a(\alpha)$ in het gesloten interval (0,1) gelijk aan x. Algemener kan men nemen $a_m(x) = y^m(1 + x^{m^2})$ waarin $y = f(x)$ een in een sirkelvormig gebied, groter dan de eenheidsirkel, reguliere majorantfunksie van x is. Hier is weer $A = 1$ en $R =$ de konvergentiestraal van y; de funksie $a(\alpha)$ is in het gesloten interval (0,1) identiek met $f(\alpha)$. Een voorbeeld dat $a(\alpha)$ in het gesloten interval $(0, A)$ overal gelijk aan nul is, levert $a_m(x) = m^m x^{m^2}$, met $A = 1$.

2°. De funksie $a(\alpha)$ is in het linkereindpunt van $(0, A)$ diskontinu, in het rechter kontinu.

Voorbeelden: $a_m(x) = x + x^{m^2}$. We hebben $R = \infty$, $A = 1$. Voor $\alpha = 0$ is $a(\alpha) = 0$, en in de andere punten van het gesloten interval (0,1) gelijk aan 1. Algemener kunnen we nemen $a_m(x) = c^m + y^m (x + x^{m^2})$ waarin c een pozitieve konstante is, en $y = f(x)$ een dergelijke majorantfunksie van x als zo even, met dit voorbehoud dat hij voor $x = 0$ groter is dan c. De funksie $a(\alpha)$ is dan in $\alpha = 0$ gelijk aan c, en in de andere punten van het gesloten interval (0,1) gelijk aan $f(\alpha)$, zodat hij, als $f(0) = c + p$, waarin p een pozitief getal is, in $\alpha = 0$ een sprong naar boven maakt ter grootte van het bedrag p.

3°. De funksie $a(\alpha)$ is in het linkereindpunt van het interval $(0, A)$ kontinu, in het rechter diskontinu.

a. $a(\alpha)$ is eindig in A; *b.* $a(\alpha)$ is eindig in A.

Voorbeelden 3*a*: $a_m(x) = y^m + x^{m^2}$, als $y = f(x)$ een funksie is als voren met de bijkomstige voorwaarde dat $f(1) < 1$ is; dan is $a(1) = 1$ en in de andere punten van het gesloten interval (0,1) is $a(\alpha) = f(\alpha)$, zodat de funksie $a(\alpha)$ in het punt $\alpha = 1$, aan de linkerkant een sprong maakt ter grootte van de fraksie θ, als $f(1) = 1 - \theta$. Neemt men $y = 0$, dan heeft men het geval dat $f(\alpha)$ in alle punten van genoemd gesloten interval gelijk is aan nul, behalve in $\alpha = 1$, waar $f(\alpha)$ gelijk aan 1 is.

Voorbeelden 3*b*: $a_m(x) = y^m + m!\, x^{m^2}$, waarin y een funksie is als voren, met een konvergentiestraal > 1, zonder dat echter enig verder voorbehoud behoeft te worden gemaakt. Neemt men $y = 0$,

dan is $a(\alpha)$ in het hele gesloten interval (0,1) gelijk aan nul, behalve in $\alpha = 1$, waar $a(\alpha) = \infty$ is.

4°. De funksie $a(\alpha)$ is in beide eindpunten van het interval $(0, A)$ diskontinu, en wel

a. $a(\alpha)$ is eindig in $\alpha = A$; *b.* $a(\alpha)$ is oneindig in $\alpha = A$.

Voorbeelden 4*a*: $a_m(x) = c^m + xy^m + x^{m^2}$, als c een pozitieve konstante is kleiner dan 1, $y = f(x)$ een majorantfunksie als voren, met de nevenvoorwaarden $f(0) > c$ en $f(1) < 1$. We hebben dan $a(0) = c$, $a(1) = 1$ en binnen het interval (0,1) $a(\alpha) = f(\alpha)$, zodat er, als $f(0) = c + p$, $f(1) = 1 - q$, waarin p en q pozitieve getallen zijn die voldoen aan de voorwaarde $c + p < 1 - q$, in $\alpha = 0$ een sprong van $a(\alpha)$ is gelijk aan p, en in $\alpha = 1$ een sprong gelijk aan q.

Voorbeelden 4*b*: $a_m(x) = c^m + xy^m + m!\, x^{m^2}$, waarin $y = f(x)$ een funksie is als in 't voorgaande voorbeeld, zonder dat echter het voorbehoud voor $f(1)$ behoeft te worden gemaakt.

In al deze gevallen hebben we A wezenlik verschillend van R gedacht, maar de toestand verandert niet noemenswaard als we $A = R$ denken. We kunnen voorbeelden daarvan vinden door in alle voorgaande de konvergentiestraal van y gelijk aan 1 te denken, waarbij we dan nog majorant funksies $f(x)$ kunnen kiezen waarvoor $f(1)$ oneindig is, of zulke waarvoor $f(1)$ eindig blijft.

Om nu tot de funksionele operaties terug te keren, merken we op dat, blijkens de stelling van N°. 4, zo'n operatie slechts *volledig* is in gebieden (α) waarvoor $\alpha < A$, of misschien hoogstens $\alpha = A$. Wij hebben dus alleen te maken met zulke gebieden en daarvoor is nu $a(\alpha)$ een kontinue funksie van α gebleken, behoudens misschien in $\alpha = 0$ en $\alpha = A$. Het geval dat we, ter vereenvoudiging van onze uitspraken omtrent de rezultante van twee volledige transmutaties, gesteld hadden, blijkt dus het enig mogelike te zijn. Wat bovendien eventuele diskontinuiteit in $\alpha = 0$ betreft, deze is voor de volledige transmutatie van geen belang. Springt in $\alpha = 0$ de funksie $a(\alpha)$ van de waarde b_0 op de waarde b (de rechterlimiet van $a(\alpha)$ in $\alpha = 0$), dan levert de reeks P wel ook voor alle funksies die tot de sirkel (b_0) en niet tot de sirkel (b) behoren een getransmuteerde in $x = 0$, maar die reeks levert niet voor alle funksies die tot een sirkel (b'), groter dan (b_0) en kleiner dan (b), behoren een getransmuteerde in een nog zo kleine omgeving van $x = 0$. We zullen daarom als met $\alpha = 0$ korresponderend gebied (β) aannemen de sirkel waarvan de straal gelijk is aan b en daarmee is de diskontinuiteit van $a(\alpha)$ in $\alpha = 0$ opgeheven.

Iets analoogs kan men, zelfs bij *eindige* linkse diskontinuiteit, ten opzichte van $\alpha = A$ niet zeggen.

Uit de formule (7) van N°. 4

$$\beta = \alpha + a(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

volgt nu dat ook het met α korresponderende getal β binnen het volledigheidsinterval $(0, A)$ een *kontinue* funksie van α is. Dat β tevens *monotoon toenemend* met α is, omdat $a(\alpha)$ bij toenemende α niet kan afnemen, hebben we vroeger al opgemerkt.

Beschouwen we nu nog het geval dat de funksies $a_m(x)$ niet identiek zijn met hun natuurlike majoranten, en schrijven we deze laatste, evenals de grootheden die er van afhangen, weer met de gebruikelike strepen. We hebben in N°. 23 bewezen dat de gelijkheid

$$a(\alpha) = \bar{a}(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

geldt, als 1° de uniformiteitsonderstelling in N°. 4 vervuld is; 2° de grootheid $\bar{a}(\alpha)$ een binnen het interval $(0, A)$ *kontinue* funksie van α is. Dit laatste is nu bewezen altoos het geval te zijn, zodat we kunnen zeggen dat de gelijkheid (95) enkel een gevolg is van dezelfde uniformiteitsonderstelling die in N°. 4 het uitgebreide teorema van Bourlet ten gevolge had.

37. We willen hier ten slotte de gelegenheid waarnemen, om op te merken dat deze uniformiteitsonderstelling iets verruimd kan worden, zowel voor het ene, als voor het andere doel. Gaat men de redenering in N°. 23, die tot de gelijkheid (95) voerde, na, dan blijkt dat een andere,

$$A(\alpha) = \overline{\lim_{m=\infty}} \, [A_m(\alpha)]^{\frac{1}{m}} = \bar{a}(\alpha) \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

waarin $\dot{A}_m(\alpha)$ is de maksimummodulus van $a_m(x)$ op de omtrek van (α), *enkel* kan worden afgeleid uit de *kontinuiteit* van $\bar{a}(\alpha)$, en daar deze *altoos* aanwezig is, geldt de laatste gelijkheid ook *universeel* en is *hiervoor* de bedoelde uniformiteitsonderstelling volmaakt overbodig [1]). Deze kwam ons evenwel te pas om verder te besluiten dat ook de gelijkheid

$$a(\alpha) = A(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

---

[1]) We hadden nl. op de omtrek van een *willekeurige* met (α) konsentriese sirkel $(\alpha') < (\alpha)$

$$\bar{a}_m(\alpha') < \frac{\alpha A_m(\alpha)}{\alpha - \alpha'},$$

dus

$$\bar{a}(\alpha') \leq A(\alpha) ;$$

verder

van kracht was. Maar tans willen we opmerken dat voor dit laatste de volgende uniformiteitsonderstelling, ruimer dan die in N°. 4, voldoende is:

A. Bij ieder willekeurig klein voorgeschreven getal ε is er een geheel getal N_ε, zodanig dat tegelijk voor alle punten x van het gesloten gebied (α)

$$|a_m(x)| < (a(\alpha) + \varepsilon)^m \quad voor \quad m \geq N_\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

We zullen niet nader uiteenzetten dat deze onderstelling voldoende is, om tot de gelijkheid (97) te kunnen besluiten; het is gemakkelik in te zien. Uit deze echter en de onafhankelik van iedere onderstelling geldende gelijkheid (96) volgt (95), zodat de funksie $a(\alpha)$ enkel onder de voorwaarde gemerkt *A* gelijk is aan $\overline{a}(\alpha)$ en dus kontinu binnen het interval $(0, A)$.

Hiermee is nu echter nog niet verkregen dat ook $\beta = \overline{\beta}$. Zal dit waar zijn, dan moet men hebben

---

$$\overline{a}(\alpha) \geq A(\alpha),$$

en uit de kombinatie van deze laatste twee betrekkingen volgde $\overline{a}(\alpha) = A(\alpha)$, indien $\overline{a}(\alpha)$ een *kontinue* funksie van α was, wat we toen *aangenomen* hebben. Intussen, nu deze kontinuiteit een *noodzakelikheid* gebleken is, rijst de gedachte dat de laatste gelijkheid *rechtstreeks*, zonder er de kontinuiteit van $\overline{a}(\alpha)$ bij te halen, zal kunnen worden bewezen. Inderdaad kan dit als volgt: Denken we voor de grootheid $\overline{a}_m(\alpha)$ weer de splitsing (94) uitgevoerd, en daarbij, voor een zekere waarde van α, het gehele getal k zo gekozen dat men weer heeft (we schrijven nu $\overline{P}$ in plaats van P)

$$\overline{a}(\alpha) = \overline{\lim_{m=\infty}} \, [\overline{P}_m(\alpha)]^{\frac{1}{m}}$$

Nu heeft men, voor willekeurige waarde van n, $A_m(\alpha) > \overline{c}_{m,n}\,\alpha^n$, als $\overline{c}_{m,n}$ de modulus van de koefficient $c_{m,n}$ in de machtreeksontwikkeling van $a_m(x)$ is. Zij $\overline{c}_{m,p}\;\alpha^p$ de of een van de maksimumtermen in $\overline{P}_m(\alpha)$; het getal p zal in 't algemeen met m varieren, maar hoe dit zij, steeds is $\overline{c}_{m,p}\;\alpha^p > \frac{1}{km}\;\overline{P}_m(\alpha)$, en dus heeft men ook

$$A_m(\alpha) > \frac{\overline{P}_m(\alpha)}{km}$$

Hieruit volgt, daar $\lim\limits_{m=\infty} m^{\frac{1}{m}} = 1$,

$$A(\alpha) = \overline{\lim_{m=\infty}} [A_m(\alpha)]^{\frac{1}{m}} \geq \overline{\lim_{m=\infty}} \, [\overline{P}_m(\alpha)]^{\frac{1}{m}} = \overline{a}(\alpha),$$

en daar $A(\alpha)$ niet groter kan zijn dan $\overline{a}(\alpha)$, moet men hebben $A(\alpha) = \overline{a}(\alpha)$.

$$\beta = \bar{\beta} = \alpha + \bar{a}(\alpha) = \alpha + (\alpha),$$

m.a.w. het met α korresponderende getal β moet worden bepaald door de formule (7). Deze in N°. 4 verkregen formule nu was weer gebazeerd op de uniformiteitsonderstelling in dat nummer. Maar gaat men het bewijs dat we daar van het volledigheidsteorema gegeven hebben nog eens nauwkeurig na, dan blijkt dat de formule enkel een gevolg is van deze onderstelling:

B. Het maksimum $a(\alpha)$ van a_x voor het hele gebied (α) is gelijk aan dat voor de omtrek.

Dat de reeks

$$Pu = \sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{a_m u^{(m)}}{m!}$$

voor *alle* funksies die tot de sirkel met straal $\alpha + a(\alpha)$ behoren konvergeert, en dat deze sirkel de *minimumsirkel* is waarvoor dat plaats vindt, volgt dus enkel uit de onderstelling B. Dat deze konvergentie *uniform* is in het gebied (α), daarvoor is echter B nog niet voldoende. Maar dit volgt onmiddellik, als men de onderstelling *A er bij* neemt; we willen dit alles niet nader toelichten, omdat het gemakkelik genoeg uit het bewijs in N°. 4 valt op te maken. De uniformiteit van de konvergentie is echter wel van belang, want in dat geval is men zeker dat de getransmuteerde van een in het gebied (β) reguliere funksie weer een reguliere funksie is, t. w. in (α), m. a. w. dat de betreffende transmutatie regulier is voor het F. V. van funksies die tot (β) behoren en het N. V. (α). Om die reden zouden we de onderstelling A in ieder geval bij de uitspraak van het volledigheidsteorema in N° 4 willen handhaven, en dus *de uniformiteitsonderstelling van dat nummer door de twee van elkaar onafhankelike onderstellingen A en B vervangen.*

Dat de bedoelde uniformiteitsonderstelling nauwer is dan het paar onderstellingen A en B te zamen, bewijst het volgende voorbeeld, waarbij *wel* aan A en B is voldaan, maar niet aan de eerstgenoemde onderstelling. Zij

$$a_m(x) = x^n - 1 \quad , \quad n = 2^{\mathscr{E}\left(\frac{\log m}{\log 2}\right)}$$

waarbij dus n zodanig met m samenhangt dat het de grootste in m begrepen gehele macht van 2 is; n doorloopt dus alle gehele machten van 2, maar blijft telkens voor een aantal waarden van m hetzelfde. Voor $\alpha < 1$ is $a(\alpha) = 1$, voor $\alpha > 1$ is $a(\alpha) = \alpha$, omdat n nooit *groter* is dan m, maar toch voor een oneindig aantal waarden van m *gelijk* aan m. Het getal A is dus evenals het getal R (zie hoger) oneindig groot, m. a. w. de reeks die de hier be-

schouwde funksies $a_m(x)$ tot koëffisienten heeft, is volledig in ieder willekeurig gebied (α). Denken we ons nu $\alpha < 1$, dan ligt de sirkel met straal 1 in het gebied (α); in de omtrekspunten van deze sirkel die tot argument hebben

$$\frac{2\pi}{2^s} \quad , \quad (s = \text{geheel getal})$$

is $a_m(x)$ van het rangnummer $m = 2^s$ af gelijk aan nul, en dus ook a_x voor die punten gelijk aan nul. Er zijn evenwel altijd onder die punten zodanige te vinden waarvoor, bij willekeurig groot voorgeschreven geheel getal Q, de grootheid $|a_m(x)|^{\frac{1}{m}}$ meer dan zeker vast bedrag $\varkappa$ groter is dan de limiet nul van die grootheid voor de een of andere $m \geq Q$: we behoeven daartoe maar het getal s groter dan Q te kiezen, dan is $m \geq Q$, als $m = s - 1$, terwijl voor deze m-waarde $a_m(x)$ in het genoemde punt gelijk aan -2 is, en dus $|a_m(x)|^{\frac{1}{m}}$ een bedrag vertegenwoordigt dat met het toenemen van s tot 1 nadert, dus groter wordt dan ieder bedrag $\varkappa < 1$. Er is dus geen van x onafhankelik geheel getal m_ε, zodanig dat in het gebied (α)

$$|a_m(x) < (a_x + \varepsilon)^m \quad , \quad \text{voor } m \geq m_\varepsilon ,$$

en dit was de uniformiteitsonderstelling van N°. 4. Aan de onderstelling A is evenwel voldaan, omdat $|x^n - 1|$ hoogstens gelijk aan 2 is voor punten van de eenheidsirkel en dus, bij willekeurig klein voorgeschreven ε kleiner dan $(1 + \varepsilon)^m$, d. i. dan $(a(1) + \varepsilon)^m$, voor $m \geq$ zeker bij ε passend geheel getal N_ε. Verder is ook aan de onderstelling B voldaan: in de eerste plaats ziet men onmiddellik dat in *alle* punten van een sirkel willekeurig weinig kleiner dan die met straal 1 de grootheid a_x gelijk aan 1 is, zodat er in een willekeurig dichte nabijheid van de omtrek van de laatstgenoemde sirkel punten zijn waar de grootheid a_x gelijk is aan de bovenste grens van die grootheid voor het gebied met straal 1: dit, hoewel niet presies hetzelfde als de onderstelling B, komt in zijn gevolgen, nl. de geldigheid van formule (7), daarmee overeen, en zou er voor in de plaats kunnen treden. Maar ook voor de omtrek van de sirkel (1) zelf is de bovenste grens van a_x gelijk aan 1. Er is nl. bij willekeurig klein voorgeschreven getal ε een priemgetal p zodanig dat in het omtrekspunt van die sirkel met het argument

$$\varphi = \frac{\pi}{p}$$

het argument van

$$x^{2^k} = e^{i\frac{2^k\pi}{p}}, \text{ d. i. } \frac{2^k\pi}{p},$$

voor een oneindig aantal k-waarden minder dan ε van π verschilt. We hebben daartoe p slechts zo groot te kiezen dat $p\varepsilon > \pi$. De kongruentie

$$2^k \equiv 1 \pmod{p}$$

kan volgens het teorema van FERMAT voor alle k-waarden die een veelvoud zijn van $p-1$ bevredigd worden, d.w.z. voor al die waarden heeft men

$$2^k = (2l+1)p + 1$$

of

$$\frac{2^k\pi}{p} = (2l+1)\pi + \frac{\pi}{p},$$

en wordt dus, in verband met de keuze van p, aan de gestelde voorwaarde voldaan. Er zijn dus ook altijd punten op de omtrek van de sirkel (1) te vinden waarvoor

$$|x^{2^k} - 1|$$

voor een oneindig aantal waarden van k minder dan een voorgeschreven bedrag van 2 verschilt, dus bv.groter dan 1 is. Aangezien in $a_m(x) = x^{n-1}$ het getal n *alle* gehele machten van 2 doorloopt, is dus ook $a_m(x)$ in de genoemde punten voor een oneindig aantal m-waarden groter dan 1, zodat a_x in die punten gelijk aan 1 is.

Hiermee hebben we een voorbeeld gekonstrueerd waarbij *wel* aan de onderstellingen A en B, maar *niet* aan de uniformiteitsonderstelling van N°. 4 voldaan is. Wat nu het paar eerstgenoemde onderstellingen betreft, men zou gaarne een voorbeeld willen hebben, waarbij of één of beide *niet* vervuld waren. Wij hebben evenwel vooralsnog geen kans gezien, een zodanig te konstrueren, noch ook, integendeel, te bewijzen dat dit onmogelik is, in welk laatste geval A en B *altoos* vervuld zouden zijn. Is er een punt op de omtrek van (α) zodanig dat in dat punt de grootheid $|a_m|^{\frac{1}{m}}$ voor een oneindig aantal m-waarden $m_1, m_2, \ldots m_n, \ldots$ gelijk is aan het maksimum $A_m^{\frac{1}{m}}(\alpha)$ van die grootheid op de omtrek van (α), en is tevens de bovenste limiet van de gedeeltelike volgreeks

$$A_{m_1}^{\frac{1}{m_1}}(\alpha)\ ,\ A_{m_2}^{\frac{1}{m_2}}(\alpha), \ldots, A_{m_n}^{\frac{1}{m_n}}(\alpha), \ldots$$

gelijk aan die van de volledige, dan is in het bedoelde punt $a_x = A(\alpha)$ en is dus ook $a(\alpha) = A(\alpha)$, waaruit volgt dat zowel aan A als aan B voldaan is. Bij de konstruksie van een patologies voorbeeld als bedoeld heeft men er dus in de eerste plaats voor te zorgen dat er geen zodanig punt op de omtrek van (α) is. Voldoende is dit echter geenszins. Er kan dan nog bij ieder, voorgeschreven klein getal ε een punt in het gebied (α) te vinden zijn, waar de grootheid $|a_m|^{\frac{1}{m}}$ voor een *oneindig* aantal m-waarden boven $A(\alpha) - \varepsilon$ uitstijgt, en ook dan is de bovenste limiet $a(\alpha)$ van a_x gelijk aan $A(\alpha)$. Er is dan voldaan aan de voorwaarde A en het zal heel gewoon zijn, als er ook nog aan B voldaan is, al zien we de noodzakelikheid daarvan niet meer in. Is er echter een bedrag $\varkappa$ zodanig dat in geen enkel punt van het gebied (α) de grootheid $|a_m|^{\frac{1}{m}}$ voor een *oneindig* aantal m-waarden boven $A(\alpha) - \varkappa$ komt, dan is $a(\alpha)$ stellig niet groter dan $A(\alpha) - \varkappa$, en dan is niet aan de voorwaarde onder A voldaan; immers was dit wel het geval, dan zou er ook, aangezien $A^m(\alpha)$ toch altijd de modulus van $a_m(x)$ voor zeker, overigens natuurlik met m veranderlik, omtrekspunt van (α) is, bij ieder, voorgeschreven klein getal ε een geheel getal N_ε zijn, zodanig dat, van $m = N_\varepsilon$ af, $A_m(\alpha) < (a(\alpha) + \varepsilon)^m$ of

$$A_m^{\frac{1}{m}}(\alpha) < a(\alpha) + \varepsilon \leq A(\alpha) - \varkappa + \varepsilon\,,$$

en dit is onmogelik, indien ε kleiner dan $\varkappa$ gekozen is, omdat $A(\alpha)$ de bovenste limiet, voor $m = \infty$, van $A_m^{\frac{1}{m}}(\alpha)$ is. Wat de voorwaarde B betreft, daaraan zou weer al of niet voldaan kunnen zijn.

We hebben de voorgaande opmerkingen gegeven, om gevallen als de hier bedoelde nog wat te belichten. Intussen mag men, dunkt ons, die gevallen, gesteld al dat ze mogelik zijn, gerust tot de patologiese rekenen, waarmee men in de praktijk weinig te maken heeft: dit blijkt juist nog wel nader uit de gemaakte opmerkingen.

Wij menen hiermee onze beschouwingen over de volledige transmutatie te kunnen eindigen.

Bacteriologie. — De Heer PEKELHARING biedt een mededeeling aan van Dr. M. A. VAN HERWERDEN: *„Over den aard en de beteekenis der volutine in gistcellen.”*

(Mede aangeboden door den Heer WENT.)

In denzelfden tijd, toen men door het fijner microscopisch onderzoek in staat werd gesteld bij tal van z.g. kernlooze, ééncellige organismen een kern aan te toonen, is tevens van verschillende zijde de aandacht gevestigd op de aanwezigheid van basophiele korrels in het celplasma van bacteriën, hypho- en blastomyceten, algen en protozoën, welke zich tegenover verschillende reagentia op overeenkomstige wijze gedragen. Waar zooals bij de meeste dezer ééncelligen, een celkern aanwezig is, staan deze korrels hiermede niet in samenhang en komen, wat de verwantschap tegenover kleurstoffen betreft, niet volkomen met de chromatine van de kern overeen.

Aanvankelijk heeft BABES deze basophiele korrels in bacteriën voor sporen aangezien en ze later als „Corpuscules métachromatiques” beschreven,[1]) een naam, welke in de Fransche literatuur ook heden nog gangbaar is, terwijl ze in Duitschland, sedert een uitvoerig onderzoek van A. MEYER[2]) over de mogelijke chemische samenstelling, „volutinekorrels” worden genoemd. Dezen laatsten naam hebben deze elementen te danken aan hun voorkomen bij een willekeurig gekozen bacterie, Spirillum volutans, waar een leerling van MEYER, GRIMME[3]) ze heeft waargenomen. Bedenkt men, dat deze Spirillum volutans slechts één van de vele honderdtallen van bacteriën, schimmels en algen is, waar overeenkomstige lichaampjes worden gevonden, dan is de keuze van den naam zeker niet gelukkig geweest. De term „metachromatische lichaampjes” heeft echter dit bezwaar, dat volstrekt niet onder alle omstandigheden de bedoelde korrels of druppels zich met methyleenblauw metachromatisch kleuren, zooals ook MEYER reeds heeft opgemerkt en dat — gelijk men later zien zal, — het behalve van den toestand der culturen, ook zeer van de herkomst van het methyleenblauw-preparaat kan afhangen, of bij de meeste korrels al of niet een omslag in roodpaarsche tint plaats heeft. Ik zal dus in de volgende uiteenzetting den naam „volutine”, welke in de microbiologische literatuur algemeen bekend is geworden, blijven gebruiken.

Voor een uitvoerige morphologische beschrijving der volutinekor-

---

1) Zeitschr. f. Hygiene. Bd. **XX**, bldz. 412.

2) Botanische Zeitung 1904, bldz. 113.

3) Zentralblatt. f Bakteriol. Bd. **XXXII** 1902, bldz. 172.

rels verwijs ik naar de hierop betrekking hebbende literatuur [1]. Wanneer men schimmels of gistcellen in formol fixeert, met methyleenblauw kleurt en vervolgens differentieert in 1 procent zwavelzuur, wordt de cel ontkleurd, behalve de plekken, welke de stof bevatten, welke men volutine heeft genoemd. In fijnere korrels over de geheele cel verdeeld, weer tot grove korrels samengevloeid, somtijds in een vacuole gelegen, zeer verschillend wat verspreiding en hoeveelheid betreft, vindt men deze stof in de cellen vertegenwoordigd. A. MEYER [2]), die begrepen heeft, dat een stof, welke in het plantenrijk zoo veelvuldig voorkomt zeker waard is om aan een nader microchemisch onderzoek te worden onderworpen, heeft — behalve bovenstaande karakteristieke kleurreactie — nog andere eigenschappen leeren kennen. Behandelt men b.v. het aldus verkregen methyleenblauwpreparaat met joodkalium, dan worden de blauwe korrels zwart, om in 5 procent natriumcarbonaat langzamerhand de kleur te verliezen. Zeer snel wordt de volutine in warm water opgelost, eveneens in het versche preparaat door 5 procent zwavelzuur of zoutzuur. De verteerbaarheid door pepsine was niet te beoordeelen, daar 0.2 procent zoutzuur alleen reeds bij lichaamstemperatuur in denzelfden tijd de stof tot oplossing brengt. Het gedrag der volutine tegenover kleurstoffen leidde MEYER tot een vergelijking met uit gist bereid nucleïnezuur, waarbij hij een groote overeenkomst vond tusschen het gedrag van dit zuur en de volutine. MEYER opperde dan ook in 1904 de veronderstelling, dat volutine een nucleïnezuurverbinding is, een meening, welke op grond van MEYER's onderzoek in de latere literatuur is overgenomen, ofschoon MEYER [2]) zelf heeft gevoeld, dat zijn reacties — wat de scheikundige eischen betreft —, zeker niet van dien aard waren, dat zijn hypothese bewezen was, getuige zijn eigen uitspraak hieromtrent bldz. 125, waar hij duidelijk te kennen geeft, dat het zekere bewijs, dat volutine een nucleïnezuurverbinding is, nog geenszins geleverd is. Toch had MEYER ongetwijfeld meer recht zijn veronderstelling uit te spreken dan een tiental jaren te voren JANSSENS en LEBLANC [3]), die in hun morphologisch onderzoek omtrent de kern der gistcellen, basophiele korrels in het celplasma, waaraan ze de rol van reservestoffen toeschrijven, als

---

[1]) CLIFFORD DOBELL. Quart. journal of micr. science, 1908, bldz. 121.
SWELLENGREBEL. Arch. f. Hygiene Bd. LXX. 1909, bldz. 380.
GUILLIERMOND. Recherches cytologiques sur les levures etc., Thèse de Paris, 1902. Arch. f. Protistenkunde Bd XIX. 1910. bldz. 298.
REICHENOW. Arbeiten aus dem kaiserl. Gesundheitsamte. Bd. XXXIII, 1910. bldz. 1;

[2]) l. c. bldz. 1.

[3]) La Cellule. T. XIV, 1898. bldz. 203.

nucleoalbuminen beschouwen. De reacties in 1904 door MEYER verricht, zijn in 1913 door SUMBAL [1]) en in hetzelfde jaar door LINDE [2]) in hoofdzaak bevestigd. LINDE wijst er op, dat door geen enkel fixeermiddel de volutine zoodanig is vast te leggen, dat ze niet door water ten slotte bij kamertemperatuur wordt opgelost. Naast den twijfel door MEYER zelf uitgesproken, vindt men ook elders bij de behandeling van dit onderwerp telkens deze onzekerheid omtrent den scheikundigen aard van deze stof terug. Zoo zegt GUILLIERMOND[3]) in 1910 (bldz. 307) dat — hoe voor de hand liggend ook MEYERS's veronderstelling is — „aucune preuve décisive" nog geleverd is. En in het handboek van KOHL [4]) over de gistcellen komt de volgende zinsnede voor: „Ueber die chemische Natur wissen wir nichts sicheres. Was darüber behauptet wird, hat das Stadium des Hypothetischen noch nicht überwunden."

Zou het nu niet mogelijk zijn met een fijner microchemisch reagens dan waarover MEYER en zijn navolgers beschikten, deze vraag tot volkomen klaarheid te brengen? Is de volutine een nucleinezuurverbinding, dan zou deze stof door het enzym, dat nucleinezuur splitst, namelijk de *nuclease* vermoedelijk worden opgelost. Kon dit worden aangetoond, dan was het bewijs geleverd. In verband met andere onderzoekingen over de aantasting van nucleoproteïden in de cel door nuclease, heb ik ook de volutine van verschillende hypho- en blastomyceten onder handen genomen en hiervoor, zooals elders is medegedeeld, aanvankelijk gebruik gemaakt van een nuclease, welke uit de milt van het rund was bereid. Deze pogingen stuiten echter dadelijk af op het bezwaar, dat reeds door water bij lichaamstemperatuur binnen den tijd noodig voor een nuclease-digestie, de volutine wordt opgelost. Werd de nuclease in glycerine gebracht, dan bleek ze onvoldoende werkzaam te zijn. Langs anderen weg ben ik bij dit onderzoek tot de opvatting gekomen, dat MEYER's veronderstelling waarschijnlijk juist is geweest, namelijk door gebruik te maken van de nucleasewerking der levende cellen zelf, welke op uitstrijkpreparaten gebracht, die in alkohol waren gefixeerd, binnen korten tijd de volutine tot verdwijnen brachten, in tegenstelling met cellen, welke eerst door formoldampen waren gedood en dus haar nuclease-werking verloren hadden. [5])

[1]) Zeitschr. f. allgem. Physiol. Bd XV, 1913, bldz. 456.

[2]) Centralbl. f. Bakteriol. Abt. II. Bd. XXXIX, 1913—14, bldz. 369.

[3]) l. c. bldz. 2.

[4]) Die Hefepilze 1907. QUELLE und MEYER. Leipzig.

[5]) Voor de beschrijving dezer proeven bij Ustilago maydis en een Torulasoort verricht, zie Anat. Anzeiger. Bd XLVII, 1914, bldz. 312.

De volutinekorrels, welke naast vet en glycogeen zulk een uitgebreid gebied van het celplasma dezer ééncellige organismen in beslag kunnen nemen, lokten, zoowel morphologisch als physiologisch tot nader onderzoek uit. Is ook langs anderen weg dan den bovengenoemden de chemische aard te bepalen? Welke functie vervullen deze korrels in het lichaam der cel, is hun aanwezigheid gebonden aan een bepaalde samenstelling van den voedingsbodem? Zijn de verschillende enzymwerkingen der cel afhankelijk van hun aanwezigheid? En wat de morphologische vragen betreft: is er eenig verband tusschen deze korrels en het ontstaan van reservestoffen als vet en glycogeen en is er eenige reden, zooals door enkele onderzoekers is gedaan, ze te identificeeren met mitochondria?

Een uitvoerig cytologisch onderzoek heb ik niet verricht. Wel is het mij gebleken dat bij Torula monosa[1]), de gistcel, waarmede de meeste nader te bespreken onderzoekingen zijn gedaan, de mitochondria-kleuring volgens de methode van Benda voor de volutinekorrels positief uitvalt — al weer een bewijs, dat alles wat men onder den naam „mitochondria" samenvat, alleen afgaande op deze kleurreacties, volstrekt niet overeenkomstig in samenstelling behoeft te zijn. Want deze nucleïnezuurhoudende korrels kleuren zich b.v. op dezelfde wijze als de mitochondria in de levercellen, welke zeer vermoedelijk uit verbindingen van phosphati bestaan. Met methyleenblauw gekleurd en daarna gedifferentieerd met 1 procent zwavelzuur, vertoonen de volutinekorrels zich volstrekt niet altijd metachromatisch, zooals ook door Meyer is aangegeven. Groote cellen hebben vaak een diffuus gekleurde vacuole welke paarsrood, dus metachromatisch is gekleurd; de korrels zijn vaak donkerblauw, zoowel na formol- als na alkoholfixatie.

Ook is het gebruikte methyleenblauw-preparaat niet onverschillig voor den graad der metachromasie. In methyleenblauw „β patent" werd b.v. meer metachromasie gevonden dan in „methyleenblauw van Grübler voor bacteriën", welk laatste preparaat vermoedelijk zuiverder is. Met toluidineblauw daarentegen zijn bijna alle korrels metachromatisch gekleurd. Als kriterium mag de metachromasie dus zeker niet gelden. Het gaf mij, zooals op bldz. 1445 reeds is gezegd, ook aanleiding bij voorkeur den naam volutinekorrels te gebruiken. Behalve met deze anilinekleurstoffen kan men ook met carbolfuchsine de korrels aantoonen, verder met de kleurmethode van Unna (een mengsel van 2 basische kleurstoffen, pyronine en methylgroen,

---

[1]) Voor nadere kennis omtrent Torula monosa, zie Kluyver, Biochemische Suikerbepalingen. Diss. Delft 1914, bldz. 16.

van welke de volutinekorrels uitsluitend het roode pyronine opnemen). Met HEIDENHAIN's ijzerhaematoxyline zijn, wanneer de kern der gistcel duidelijk zichtbaar wordt, de volutinekorrels niet of onduidelijk gekleurd. Somtijds gelukt het zeer goed korrels, in ligging overeenkomend met de volutine, bij de levende cel met verdund neutraalrood aan te toonen, somtijds ook met methyleenblauw. Dit geschiedt echter volstrekt niet in alle cellen [1]) en ook nimmer in die hoeveelheid, welke men in het gefixeerde preparaat na kleuring met methyleenblauw en differentiatie in zwavelzuur vindt. Het is natuurlijk niet uitgesloten, dat op het oogenblik der fixatie verbindingen uit den samenhang met de levende stof worden vrij gemaakt, welke het contingent der volutinekorrels helpen vormen. Met dergelijke mogelijkheden moet men bij het onderzoek van gefixeerd materiaal altijd rekening houden. Bij kleuring van levende cellen met methyleenblauw + 5 procent formol mag men natuurlijk niet meer, zooals HENNEBERG [2]) (bldz. 5) doet, van vitaalkleuring spreken.

Vet is gelijktijdig met volutine in de gistcel te kleuren; hiertoe is het b.v. slechts noodig, het met methyleenblauw en zwavelzuur behandelde preparaat in Sudan III te brengen. Zooals reeds door andere onderzoekers, o. a. door HENNEBERG, is aangegeven, liggen de volutinekorrels onafhankelijk van de vetdruppels; alleen kan hun ligging passief door den druk van glycogeen- of vetdruppels veranderd worden, waarbij ze b.v. naar den omtrek der cel worden teruggedrongen. De verdere onafhankelijkheid blijkt ook reeds uit het voorkomen van vet en glycogeen in culturen, waar de volutine ontbreekt.

Het is namelijk mogelijk, zoowel schimmels als verschillende gistsoorten te kweeken en tot vermeerdering te brengen, zonder dat volutine in de cel wordt gevormd. Reeds aan vroegere onderzoekers was bekend, dat bij onvoldoende voeding de hoeveelheid volutine in de cel verminderd wordt, dat zelfs een deel der cellen in de cultuur de volutine geheel verliezen kan. Ook is in 1910 door REICHENOW [3]) bij een volvocacee, Haematococcus pluvialis, aangegeven, dat men de volutine ten slotte kan doen verdwijnen door geen phosphaat aan de voedingsvloeistof toe te voegen, hetgeen echter daarna den dood der haematococcen ten gevolge heeft.

---

[1]) Opmerkelijk is, dat van een agarmoutbodem, met neutraalrood vrij sterk rood gekleurd, na verscheidene weken slechts een uiterst klein percentage der groeiende cellen de kleurstof had opgenomen.

[2]) Centralblatt f. Bact. Bd. XLV, 1916, bldz. 50; Wochenschrift f. Brauerei 1915, N⁰. 36—42.

[3]) l. c. bldz. 2.

Bij mijn eigen kweekproeven met Ustilagineën en Torulaceën heb ik eveneens den invloed van het phosphaatgehalte van den voedingsbodem waargenomen en er mij op toe gelegd, blijvende culturen te verkrijgen, welke geheel van volutine ontbloot zijn. Hiervoor is het niet voldoende bij de agar-culturen het phosphaat weg te laten; wel is het grootste deel der cellen dan vrij van volutine, maar toch worden er in een alkohol-uitstrijkpreparaat nog verscheidene in het gezichtsveld gevonden, die volutine dragen.

Volutinekorrels tijdens het leven te herkennen tusschen de glycogeendruppels in het celplasma, is mij onmogelijk gebleken. Het is dus noodzakelijk bij het controleeren den kweekproeven uitstrijkpreparaten te fixeeren. Hiervoor voldeed bij Torula en Ustilago zeer goed absolute alkohol, iets minder goed bij Saccharomyces, waar, zooals ook door HENNEBERG[1]) wordt aangegeven, na fixatie in alkohol, door 1 procent zwavelzuur het cellichaam niet voldoende wordt ontkleurd.

Bij de samenstelling van den voedingsbodem werd, wat de voedingstoffen betreft, uitsluitend met chemisch zuivere prepraten gewerkt, de agar 1 uur met 0.5 procent azijnzuur uitgetrokken en vervolgens herhaaldelijk met gedistilleerd water uitgewasschen. Gebruik van leidingwater werd bij deze proeven vermeden.[2]) Als voedingsstoffen werd aanvankelijk gebruikt 5 procent glycose (pro analysi), 0.5 procent pepton MERCK, 0.05 procent $Mg\,SO_4$ (pro analysi) en een spoor KNO_3 (pro analysi). Onderzoekt men volgens de methode van NEUMANN[3]) (phosphorusbepaling langs den natten weg) of er nog phosphorus in dezen bodem aanwezig is, dan blijkt dit inderdaad het geval te zijn, wat in hoofdzaak aan het pepton te wijten is. In het laboratorium uit kippeneiwit bereide albumose werd evenmin volkomen vrij van phosphorus verkregen. Wordt als N-bron zuiver glycocoll of asparagine gebruikt, dan wordt macrochemisch met de methode van

---

1) l. c. bldz. 5.

2) Het is opmerkelijk, dat REICHENOW reeds de methyleenblauw—zwavelzuur-reactie zag wegblijven bij zijn Haematococcen, wanneer hij alleen de toevoeging van phosphaat achterwege liet. Bij de opgave der cultuurvloeistoffen wordt zelfs niet het gebruik van gedistilleerd water vermeld. Vermoedelijk kunnen de door mij onderzochte hypho- en blastomyceten zich van kleinere hoeveelheden phosphorusverbindingen in de voedingsvloeistof meester maken door deze door REICHENOW bestudeerde volvocaceeën.

3) Volgens deze methode wordt de stof, welke men wenscht te onderzoeken verbrand met 10 cM³. gedistilleerd salpeterzuur s.g. 1.4 en sterk zwavelzuur aā. Voor nauwkeurige opgave zie HOPPE SEYLER. Handbuch d. physiol. und pathol. chem. Analyse, bldz. 359. Na verbranding werd na neutralisatie met ammoniummolybdaenaat op phosphorzuur gereageerd.

NEUMANN geen phosphorus meer gevonden; toch zijn echter bij microchemisch onderzoek nog steeds sporen van phosphorus bij ontleding aan te toonen.[1])

Op den zorgvuldig bereiden bodem met glycocoll of asparagine is reeds bij de tweede enting uit een mont-agarcultuur van Torula monosa na eenige dagen geen enkele gistcel meer met volutine te vinden. De groei is echter geringer dan in de phosphaatvrije culturen met pepton, en daar ook in deze laatste hoogstens een enkele volutinehoudende cel in een gezichtsveld met duizenden volutinevrije cellen werd gevonden, kon voor de meeste proeven gerust van deze laatste worden gebruik gemaakt. Ook in deze phosphaatvrije peptonculturen is, zooals men verwachten kon, de groei minder snel en minder sterk dan op overeenkomstige bodems met phosphaat. Een voedingsbodem te bereiden, welke ook microchemisch volkomen vrij van P. bleek te zijn, is mij niet gelukt. Het is trouwens zeer waarschijnlijk, dat op zoodanigen bodem de celvermeerdering geheel achterwege blijft.

Volutinevrije culturen werden op deze wijze van Ustilago maydis, van Torula monosa, van Saccharomyces cerevisiae en van een Lactosegist[2]), (eveneens een Torulacee) gekweekt.

Bij overbrengen op phosphaathoudenden bodem kon men binnen enkele uren, in vloeibaar medium soms zelfs na eenige minuten de cellen weer beladen vinden met volutine. Dit geldt eveneens voor culturen, welke maanden lang (8 à 9 maanden) vrij van volutine waren geweest. Ze hebben dus het vermogen behouden volutine te vormen, zoodra de gelegenheid hiertoe geboden wordt. Op toevoeging van geringe hoeveelheid phosphaat reageeren de volutinevrije gistcellen uiterst snel; zoo kan toevoeging van 0,04 mgr. KH_2PO_4 op 10 cM^3 vloeistof reeds veroorzaken, dat verscheidene cellen in een cultuur volutine gaan vormen. Ook uit zuiver organische verbindingen kan dikwijls de phosphorusverbinding, noodig voor de vorming van volutine, worden opgenomen. Bij gebruik van een zelfbereide albumose uit kippeneiwit, welke 0,09 mgr. P. per cultuurbuisje bevatte, waren een groot deel der cellen met volutine beladen. Ook bij toevoeging van nucleinezuurnatrium bij den voedingsbodem wordt zeer snel volutine gevormd. Wat de hoeveelheid vet en glycogeen betreft, kon bij microscopisch onderzoek geen noemenswaard verschil tusschen phosphaatvrije en phosphaathoudende culturen worden gezien.

[1]) Hierbij werd een deel van den voedingsbodem verbrand, de asch in een druppel salpeterzuur opgenomen, op een voorwerpglas gebracht en onder het microscoop gereageerd.

[2]) Zie KLUYVER l. c. bldz. 4.

In een cultuur van Torula monosa zijn in de maand Maart 1916 op phosphaatvrijen bodem de gistcellen plotseling tot vorming van pigment overgegaan, macroscopisch te herkennen als donkergrijze tot zwarte verkleuring, microscopisch aan de aanwezigheid van fijne, bruine pigmentkorrels in de levende cellen, welke niet verdwenen door korte behandeling met alkohol en in canadabalsempreparaten konden worden vastgelegd. Zoodra men deze gepigmenteerde culturen overentte op phosphaathoudenden bodem, hield de vorming van pigment op. Ze komt dus uitsluitend in phosphaatvrij medium te voorschijn. Gedurende 5 maanden werd deze gepigmenteerde vorm in cultuur gehouden en ging daarna door uitwendige omstandigheden te gronde. In denzelfden stam van Torula monosa is deze pigmentatie later nooit meer waargenomen.

Voor de vorming van volutine blijkt volgens het voorafgaande de aanwezigheid van phosphorusverbindingen noodzakelijk te zijn. Uitsluitend deze en niet, zooals Henneberg aangeeft, calciumzouten of ammoniumcarbonaat of suiker, zijn instaat in volutinevrije cellen deze stof te doen regenereeren. Niet de calciumzouten, doch het phosphaatgehalte in het leidingwater is hier het werkzaam agens. Wanneer Henneberg [1]) vermeldt, dat in een cultuur van biergist, welke veel volutine heeft verloren, er korten tijd na verblijf in suiker, vooral na toevoeging van ammoniumcarbonaat nieuwvorming van volutine plaats heeft, dan kan dit m.i. slechts zijn toe te schrijven aan niet volkomen zuiverheid der gebruikte preparaten. Glycose uit den handel of rietsuiker veroorzaken, zooals ik mij zelf overtuigen kon, inderdaad een vermeerdering of herstel der volutine. In volkomen gezuiverde glycose (pro analysi), al of niet na toevoeging van ammoniumcarbonaat pro analysi, wordt daarentegen de volutine niet nieuwgevormd.

Aan het feit, dat de volutine voor haar vorming phosphorus noodig heeft, mag dus niet meer getwijfeld worden. Bestaan er nu nog andere wegen om haar samenstelling te leeren kennen? Wanneer men Torula monosa korten tijd (b.v. een uur lang) bij kamertemperatuur met $\frac{n}{15}$ NaOH behandelt, wordt alle volutine opgelost. Dezelfde methode kan worden toegepast om op de gebruikelijke wijze nucleïnezuur uit gist te bereiden. Levert wellicht de volutine hiertoe het materiaal? Reeds door Meyer is indertijd deze hypothese uitgesproken, daar wegens de betrekkelijke armoede van de kern aan chromatine het hem — in verband met zijn boven beschreven reacties op volutine —

[1]) l. c. bldz. 5,

onwaarschijnlijk toescheen, dat hieruit al het nucleïnezuur uit gist bereid, kon worden geput. Heeft deze hypothese, welke ook andere onderzoekers heeft aangetrokken (o.a. REICHENOW [1]) en KOHL [2])) grond van waarheid? Teneinde dit na te gaan werden de volgende proeven genomen.

25 mout-agarbuisjes werden met Torula monosa geënt en na 48 uur de rijkelijk gegroeide culturen afgespoeld met $\frac{n}{15}$ NaOH. De aldus verkregen suspensie werd herhaaldelijk geroerd; 1 uur later (toen alle cellen vrij van volutine waren) door papierpap op een zuigfilter gefiltreerd en vervolgens per 10 cM^3. filtraat 1 cM^3. 5 procent H_2SO_4 toegevoegd. Er ontstond een neerslag, dat werd afgecentrifugeerd en nagespoeld met gedistilleerd water. Dit precipitaat bleek bij ontleding purinestoffen te bevatten. Het gaf na ontleding in de autoclaaf met verdund zwavelzuur een duidelijke xanthine- en adenine-reactie en eveneens bij verdere ontleding een phosphaatreactie. Naar analogie van hetgeen men bij de bereidingswijze van nucleïnezuur uit Saccharomyces cerevisiae heeft gevonden, kon men verwachten, dat het bovengenoemde neerslag met 5 procent H_2SO_4 nucleïnezuur bevatte. (Trouwens ook met gewone handelsbiergist heb ik later op dezelfde wijze deze reacties gekregen).

Zeer fraai kan men nu aantoonen, dat de nuclease der gistcellen zelf in staat is, deze nucleïnezuurverbinding te splitsen en phosphorzuur vrij te maken. Maakt men een suspensie van het uitgewasschen precipitaat in 1 procent glycose en 0.05 procent $MgSO_4$ en ent deze met Torula monosa, dan gelukt het niet een phosphaatreactie te verkrijgen; wel echter wanneer gistcellen met kwartszand fijngewreven worden en vervolgens met een suspensie van het bovengenoemde precipitaat in water in aanraking worden gebracht. Na een verblijf bij 20° gedurende 48 uur (onder toevoeging van een korrel thymol) wordt een duidelijke phosphaatreactie verkregen, welke in het precipitaat zelf (ook na 48 uur) ontbreekt en evenmin aanwezig is in de fijngewreven Torula-cellen. Dat de nucleasewerking in de levende cellen niet door een phosphaatreactie was aan te toonen, is vermoedelijk hieraan toe te schrijven, dat deze cellen zich dadelijk zelf meester maken van het phosphaat, dat ze uit het nucleïnezuur hebben vrijgemaakt. Door gebruik te maken van vermorzelde cellen was het echter mogelijk de nucleasewerking van Torula monosa te bewijzen. Deze enzymwerking blijkt nu in de culturen zonder volutine gekweekt, niet verloren te zijn gegaan, want ook met deze is na

1) l. c. bldz. 2.

2) l. c. bldz. 3.

fijnwrijven met kwartszand een afsplitsing van phosphaat uit het nucleïnezuurprecipitaat te verkrijgen, waarbij ik mij tevoren overtuigd had, dat in uitstrijkpreparaten van deze cultuur op duizende cellen hoogstens een enkele cel met volutinekorrel aanwezig was.

Door $\frac{n}{15}$ NaOH wordt volutine aan de gistcellen onttrokken en bij de zelfde bewerking komt een nucleïnezuurverbinding in oplossing. Hoe zeer waarschijnlijk na de voorafgaande uitéénzetting ook de identiteit van deze beide stoffen blijkt te zijn, toch wordt eerst het overtuigend bewijs geleverd door de waarneming, dat uit phosphaatvrije culturen, welke volutine missen, na uittrekken met $\frac{n}{15}$ NaOH geen precipitaat met 5 procent H_2SO_4 wordt verkregen.

Hiertoe werden 25 buisjes met volutinevrije Torula monosa (hoogstens één korreltje volutine per gezichtsveld met duizende cellen) met $\frac{n}{15}$ NaOH behandeld en het filtraat door het zuigfilter gefiltreerd. Met 1 cM^3 5 procent H_2SO_4 per 10 cM^3 filtraat werd hoogstens een spoor van troebelheid, nimmer, ook niet na centrifugeering, een neerslag verkregen. Hiermede is volstrekt niet gezegd, dat volutinevrije gist geen nucleïnezuur bevat, want bij verwerking van zeer groote hoeveelheden gist, zal ook het nucleïnezuur aan de kernen onttrokken, in het filtraat zijn aan te toonen. Doch wel is bewezen, dat Torula monosa zonder volutine veel minder nucleïnezuur levert dan de normale Torula. Men heeft dan ook volkomen recht, de meening uit te spreken, dat het nucleïnezuur, hetwelk men gewend is uit gist te bereiden, voor verreweg het grootste gedeelte aan de volutine is te danken.

Het feit, dat maanden lang culturen in leven kunnen worden gehouden, zonder volutine, dat ze steeds op phosphaatvrijen bodem overgeënt weer nieuwen groei vertoonen en op phosphaathoudenden bodem weer onmiddellijk volutine gaan vormen, bewijst voldoende, dat voor het levensbestaan de aanwezigheid dezer nucleïnezuurverbinding niet noodzakelijk is. Daarmede is echter niet gezegd, dat de levensvoorwaarden niet gunstiger zijn voor de gistcellen, welke volutine bevatten. Integendeel, de groei is daar sneller en uitgebreider, de celgrootte dikwijls aanzienlijker. Het is ook niet te verwachten, dat een stof, welke in zulk een belangrijke hoeveelheid in ieder gistcel vertegenwoordigd is, daar niet een functie te vervullen heeft.

In hoeverre de afwezigheid van phosphaat in den voedingsbodem — onafhankelijk van de vorming der volutine — voor de vermin-

dering van groei verantwoordelijk is, was in deze proeven nimmer uit te maken. Theoretisch is het natuurlijk denkbaar, dat ook buiten de volutine om, het protoplasma van de gistcel door het ontbreken van dit zout een prikkel mist, welke niet door andere zouten te vervangen is. Natuurlijk mag niet vergeten worden, dat ook in deze phosphaatvrije voedingsbodems microchemisch nog altijd sporen phosphorus waren aan te toonen, organische phosphorusverbindingen, welke de cel nog voor de vermeerdering der kernen uit den bodem tot zich trekken en assimileeren kan. Anders ware, zooals reeds hierboven werd gezegd, groei- en voortplantingsvermogen van de gistcellen uitgesloten. De enkele mededeelingen in de literatuur over groei op volkomen phosphorusvrijen voedingsbodem, kunnen, wat een zorgvuldige analyse betreft, den toets der kritiek niet doorstaan.

Het is zeer begrijpelijk, dat men naast de pogingen den chemischen aard van de volutine te leeren kennen, steeds getracht heeft, haar rol in het leven der gistcel te bepalen. De eerste onderzoekers, die zich met deze basophiele korrels bij schimmels en bacteriën bezig hielden, hebben, zooals voor de hand ligt, als meening uitgesproken, dat het een reservestof zou wezen. Zoodra men nu na MEYER's onderzoek het vermoeden kreeg, dat volutine uit nucleïnezuurverbindingen was opgebouwd, was het begrijpelijk, dat men verband met de kern ging zoeken en toen microscopisch niets van een vorming van deze korrels uit de kern kon blijken, kwam men tot het besluit, dat de volutinekorrels in het cellichaam ontstonden, en een reservestof vormden, waaruit de kern naar behoefte kon putten. Zoo beeldt o. a. REICHENOW [1]) in zijn kweekproeven van Haematococcus pluvialis de vervloeiing van grootere klompjes in het centrum af en een uitéénvallen in kleine korrels aan de periferie tijdens den groei der culturen, terwijl deze vervloeiing het eerst zou geschieden aan de zijde, welke naar de kern is gericht.

Verder dan de onderzoekers, die aan de volutine alleen beteekenis als reservestof toeschreven, is onlangs HENNEBERG [2]) gegaan, die aan de volutine een zeer belangrijke rol bij het gistingsproces van Saccharomyces cerevisiae toekent en zelfs neiging heeft in de volutine het gistingsenzym zelf te zoeken. Door een reeks van proefnemingen tracht HENNEBERG deze opvatting te staven, proeven, waarbij microscopisch de rijkdom der volutine in de gistcel en haar verdeeling over het lichaam der cel werden nagegaan, gelijktijdig met het gistvermogen. Hierbij werd waargenomen, dat de gistcel in rust enkele ronde volutinekorrels draagt, dat een verdeeling in fijnere

[1]) l. c. bldz. 2.

[2]) l. c. bldz. 5.

korrels, welke in het begin der gisting zichtbaar worden, den arbeidstoestand voorstelt. Met de vermindering der gistkracht (de koolzuurproductie werd als maatstaf voor het gistvermogen gebruikt), gaat vermindering van de volutine gepaard. In suikeroplossing wordt volgens HENNEBERG de volutine weer hersteld. Alvorens de uitkomsten van HENNEBERG nader te bespreken, keer ik tot mijn eigen onderzoek terug.

De mogelijkheid geruimen tijd levensvatbare culturen van schimmels en gistcellen te kweeken, maakt, dat voor mij zeer zuiver de vraag te stellen was: is de aanwezigheid van volutine noodzakelijk voor de gisting? Hiervoor was het slechts noodig de volutinevrije culturen onder microcopische contrôle voor de gistproeven te gebruiken.

Ten eerste was de vraag te beantwoorden, of de volutine voor de gisting kan worden gemist. Toen dit inderdaad het geval bleek te zijn, was het natuurlijk belangrijk eenige quantitatieve gegevens te hebben omtrent de verhouding tusschen de gisting eener volutinehoudende en een even oude volutinevrije cultuur, welke overigens onder dezelfde omstandigheden (behalve de afwezigheid van phosphaat in den voedingsbodem) gekweekt was.

Voor deze proeven werd gedeeltelijk langs physischen weg, gedeeltelijk langs chemischen weg de vergisting nagegaan. In het eerste geval werd het gevormde koolzuur boven kwik opgevangen, in het laatste geval met de methode van BENEDICT [1]) het reduceerend vermogen van de overgebleven, niet vergiste suiker bepaald. Zooals vanzelf spreekt, werd bij deze proeven steriel gewerkt. De gistingskolfjes met de kwikbuis verbonden werden op een temperatuur van 23—25° gehouden en bij dezelfde temperatuur had de gisting plaats in de kolven, welke voor het onderzoek volgens BENEDICT werden gebruikt.

Bij deze reeksen van proeven is gebleken, dat volgens beide methoden in de volutinevrije culturen van Torula monosa, Saccharomyces cerevisiae en Lactosegist, duidelijk gisting plaats heeft. De gebruikte vloeistof was vrij van phosphaat en bevatte 1 à $2\frac{1}{2}$ procent glycose, 0.05 procent $MgSO_4$, een spoor KNO_3, 0.2 procent pepton, of, indien men zekerheid verlangde, dat ook op duizende gistcellen geen enkele cel volutine bevatte, 0.2 procent asparagine of glycocoll inplaats van pepton. Practisch is echter ook het pepton zeer goed bruikbaar; vooral bij de vergelijkende gistproeven was het natuurlijk onverschillig of tegenover de volgeladen gistcellen der volutinehoudende cultuur, nog sporadisch een enkele cel met een paar volutine-korrels

---

1) Voor deze methode zie NAGASAKI, Zeitschr. f. physiol. Chem., Bd. 95, bldz. 61.

in de volutine-vrije cultuur opduikt. Pepton heeft, zooals gezegd werd, het voordeel, dat de groei aanzienlijker is. In de aldus bereide voedingsvloeistof werd een platinaoog vol gistcellen uit een cultuurbuisje geënt. Behalve aan het begin werd ook aan het einde van elke proef gecontroleerd, dat volutine afwezig was. Bij de proeven met asparagine of glycocoll werd deze zelfde stof ook voor de volutinehoudende controle met toevoeging van 0.1 procent KH_2PO_4 gebruikt. Ook werd somtijds de geheele cultuur uit een buisje in een kolfje met phosphaatvrije vloeistof gebracht en de gisting vergeleken met die, welke door een ongeveer overeenkomstige hoeveelheid Torula monosa, volgeladen met volutine korrels, in een eveneens phosphaatvrije vloeistof werd tot stand gebracht. Op deze wijze werd er meer overeenkomst gebracht in het medium, waarin de gisting plaats had, dan wanneer de controlevloeistof phosphaat bevatte, volkomen overeenkomst echter nooit, omdat deze volutine-houdende cellen, rijk aan nucleinezuur, zooals men op bldz. 1453 heeft gezien, mogelijkerwijze zelf weer tijdelijk phosphaat afstaan aan den bodem, waarop ze zijn gekomen. Ik laat hier als voorbeeld eenige mijner proeven en de uitkomsten volgen:

1 October 1916. Twee kolfjes *A* en *B* elk met 25 cM^3, 2 procent glycose, 0,05 procent $MgSO_4$, 0,1 procent glycocoll en een spoor KNO_3 (dus phosphaatvrij). De gebruikte preparaten zijn alle chemisch zuiver. Bij *A* gevoegd een cultuur van Torula monosa, gekweekt op phosphaatvrijen bodem (slechts een enkele cel met volutine hoogstens 1 per 1000); bij *B* gevoegd een op phosphaathoudenden bodem gekweekte cultuur vol volutinekorrels. De hoeveelheden zijn zoodanig gekozen, dat de troebelheid in beide kolfjes op het oog gelijk is. Temperatuur 20—25°. De koolzuurontwikkeling wordt boven kwik afgelezen. Na 5 uur nog geen merkbare daling der kwikzuilen; na 48 uur *A* 4 cM^3, *B* $4\frac{1}{2}$ cM^3 (tot niveau van het kwikreservoir) gedaald. [1]). Na afloop der proef in *A* uitsluitend gistcellen zonder volutine, in *B* nog een groot deel met volutine.

26 Jan. 1917. In kolfje *A* 25 cM^3 0,5 procent glycose, 0,05 procent $MgSO_4$, 0,5 procent asparagine en een spoor KNO_3, in kolfje *B* de

[1]) De aflezing geschiedde aan niet-gegradueerde buisjes, waarop de stand van het kwik met aniline-potlood werd aangeteekend. De daling werd met een centimetermaat afgemeten; 4 cM. beantwoordde aan een daling van 4 cM^3 kwik. Fijne quantitatieve bepalingen zijn op deze wijze niet te doen, hetgeen ook niet in de bedoeling van deze proeven lag. Waar vermeld staat, dat de daling ging tot het niveau van het kwikreservoir, kan natuurlijk de hoeveelheid ontwikkeld koolzuur grooter zijn geweest, dan men in staat was af te lezen. Voor een juister quantitatieve vergelijking zijn daarom eenige bepalingen volgens de methode van Benedict gedaan (zie noot bldz. 1456).

zelfde vloeistof + 0,1 procent KH_2PO_4. In *A* enting met Torula monosa zonder volutine uit phosphaatvrijen asparaginebodem. In *B* Torula monosa, welke van 29 Juni 1916 tot 23 Jan. 1917 op phosphaatvrijen bodem is geweest en door overenting op mout-agar weer zeer rijk aan volutine is geworden. Koolzuurontwikkeling boven kwik afgelezen. Temp. 20—25°. Daling van de kwikzuil bij *A* in 6 uur $2^1/_2$ cM^3, bij *B* 3 cM^3.

3 April 1917. In een kolfje 25cM^3 2,5 procent glycose, 0,2 procent pepton, 0,05 procent $MgSO_4$ en een spoor KNO_3, Geënt met volutinevrije cultuur van Torula monosa, welke 30 Maart overgeënt is op phosphaatvrijen bodem en afkomstig is uit een eveneens phosphaatvrije cultuur van 19 Juni 1916. Na 2 uur daling van de kwikzuil = $3^1/_2$ cM^3 (dus gisting eener ruim 9 maanden volutinevrije cultuur).

13 Maart 1917. In kolfje *A* en *B* elk 25 cM^3 2,5 procent glycose, 0,2 procent pepton, 0,05 procent $MgSO_4$ en een spoor KNO_3. *A* geënt met tweede enting uit een volutinevrije cultuur, *B* uit een volutinerijke cultuur. Op het oog gelijke troebelheid in beide kolfjes bij het begin der proef. Na 1 uur beide kwikzuilen gedaald 1 cM^3, na 18 uur *A* = 3 cM^3, *B* = $4^1/_2$ cM^3 (tot kwikniveau in het reservoir). [1])

Maart 1917. Biergist uit de brouwerij, bewaard onder 10 procent rietsuiker, waarin aanvankelijk sterke gisting plaats heeft gehad (microscopisch grove volutinekorrels, geen merkbare verontreiniging der gistcellen met bacteriën of schimmels), Na drie dagen verblijf in rietsuiker geënt in kolfje *B* met 0,5 procent glycose, 0,5 procent pepton, 0,05 procent $MgSO_4$ en een spoor KNO_3. In kolfje *A*, met dezelfde vloeistof gevuld, eveneens biergist van dezelfde herkomst, welke echter reeds twee keer op phosphaatvrijen bodem is overgeënt en geen volutine meer bezit. Na 18 uur beide kwikzuilen $4\frac{1}{2}$ cM^3 gedaald (tot kwikniveau in het reservoir). [1]) Bij een volgende overeenkomstige proef beide na 1 uur gisting 2 cM^3 gedaald.

Reductieproeven volgens BENEDICT.

Juli 1915. *A* 20 cM^3 cultuurvloeistof met glycose, 0,05 procent $MgSO_4$ en een spoor KCl. *B* overeenkomstige vloeistof + 0,1 procent KH_2PO_4.

Vóór de vergisting reductiebepaling = 0,5 glycose.

A geënt met volutinevrije, *B* met volutinehoudende cultuur van Torula monosa. Na 48 uur vergisting, *A* = 0,15 procent glycose.
B = 0,15 procent glycose.

Maart 1917. *A* 20 cM^3 cultuur vloeistof met glycose, 0,5 procent

---

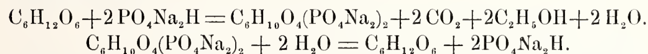
[1]) Zie noot vorige bldz.

asparagine en een spoor KNO_3. *B* overeenkomstige vloeistof + 0,1 procent KH_2PO_4. Vóór de vergisting reductiebepaling = 2,25 procent glycose.

A geënt met volutinevrije cultuur, *B* met volutinehoudende cultuur van Torula monosa. Na 48 uur in *A* nog 2.06 procent glycose.
B eveneens 2.06 procent glycose.

Maart 1917. *A* 15 cM^3 cultuurvloeistof met glycose, 0,2 procent asparagine, 0,05 procent $MgSO_4$ en een spoor KNO_3. *B*. overeenkomstige vloeistof + 0,1 procent KH_2PO_4. *A* geënt met volutinevrije; *B* met volutinehoudende cultuur van Lactosegist. Vóór de vergisting reductiebepaling = 2,04 procent glycose. Na 48 uur in
A nog 1.53 procent glycose.
B 1.44 procent glycose. [1])

Er kan dus niet aan getwijfeld worden, dat bij Torula monosa, Saccharomyces cerevisae en Lactosegist gisting plaats heeft onafhankelijk van de volutine en dat zelfde geldt vermoedelijk voor andere zymasehoudende hypho- en blastomyceten. Dat in sommige proeven de gisting in denzelfden tijd iets sterker is in de phosphaathoudende controleculturen, kan zeker geen verwondering wekken. Ik heb er namelijk reeds vroeger op gewezen, dat volutine op phosphaathoudenden bodem sterker groeit, dat dus het aantal cellen, dat deelneemt aan het gistingsproces hier aanzienlijker moet zijn. Ook is bekend, dat de aanwezigheid van phosphaat de gisting bevordert en men kan natuurlijk de proeven niet zoodanig inrichten, dat men dezen invloed onafhankelijk van de vorming van volutine bestudeert. Door HARDEN en YOUNG [2]) is zelfs de noodzakelijkheid van phosphaten bij de gisting zeer waarschijnlijk gemaakt. Volgens de bekende, volgens deze onderzoekers opgestelde formule zou het gistingsproces op de volgende wijze geschieden:



$$C_6H_{12}O_6 + 2\,PO_4Na_2H = C_6H_{10}O_4(PO_4Na_2)_2 + 2\,CO_2 + 2C_2H_5OH + 2\,H_2O.$$
$$C_6H_{10}O_4(PO_4Na_2)_2 + 2\,H_2O = C_6H_{12}O_6 + 2PO_4Na_2H.$$

Uit mijn proeven blijkt nu, hoe sporen van phosphorusverbindingen in een cultuurvloeistof, sporen te gering om volutine te doen vormen, voldoende zijn om — als de voorstelling van HARDEN en YOUNG juist is — deze chemische omzettingen tot stand te brengen. Dat dit organische en geen anorganische phosphorusverbindingen zijn, behoeft geen bezwaar te wezen; men denke slechts aan de

[1]) De heer J. BEST, arts, was zoo welwillend deze drie laatste bepalingen voor mij te verrichten.

[2]) Proceedings of the royal society vol. LXXXII, bldz. 321. Zie ook EULER en HAMMARSTEN Biochem. Zeitschr. Bd. LXXVI, 1916, bldz. 314.

nucleasewerking, welke, zooals ik beschreven heb, ook aan de volutinevrije gistcellen eigen is.

Zymasewerking is dus niet aan de aanwezigheid van volutine gebonden, evenmin als de nucleasewerking; en zooals ik kon aantoonen geldt hetzelfde voor de katalasewerking. Volkomen volutinevrije gistcellen in aanraking met 3 procent H_2O_2 gebracht, veroorzaken onmiddellijk een sterke ontwikkeling van zuurstof. Bij vooraf door koken gedoode gistcellen heeft geen gasontwikkeling in H_2O_2 plaats.

Dat Henneberg, wat de zymasewerking van Saccharomyces cerevisiae betreft, tot zulk een andere uitkomst kwam, is vermoedelijk hieraan toe te schrijven, dat dergelijke vragen alleen zuiver te beantwoorden zijn, wanneer men, zooals bij mijn proeven mogelijk was, de vorming van volutine geheel kan vermijden. Want, zooals Henneberg zelf blz. 15 zegt, kan steeds bij zijn proeven weer het volutinegehalte der cellen uit de middenstof waarin ze leven, worden aangevuld.

Als Henseberg in suikerwater zonder toevoeging van zouten, regeneratie der volutine waarneemt, is het niet de suiker, welke hier de werkzame stof is, want in glycose pro analysi heeft geen nieuwe vorming van volutine plaats, waarvan ik mij herhaaldelijk overtuigen kon. Toen eenige maanden geleden in den handel de glycose minder zuiver werd afgeleverd, zijn in al mijn culturen zonder phosphaat talrijke volutinehoudende cellen te voorschijn gekomen.

Wat Henneberg's microscopische bevindingen tijdens de gisting betreft, namelijk een fijnere verdeeling der volutinekorrels tijdens den aanvang van het gistingsproces, blijft het de vraag of deze veranderingen niet in verband kunnen staan met andere levensverschijnselen in het protoplasma bij overbrengen in een versche kweekvloeistof (voorbereiding tot celdeeling enz.).

Ook zelf heb ik herhaaldelijk microscopische preparaten in verschillende phasen der gisting gemaakt. Bij een biergist, welke twee weken onder 10 procent rietsuiker was bewaard, werden naast volutinevrije cellen er vele met één of meer grove volutinekorrels, een klein deel met een groote hoeveelheid verspreide fijne korrels gevonden. In phosphaatvrije vloeistof overgebracht, begon onmiddellijk de gisting. Na 20 minuten (1 c.M^3 daling van de kwikzuil) zag men microscopisch ongeveer hetzelfde beeld als vóór de gisting. Na 1 uur (daling van de kwikzuil 2 c.M^3) waren enkele cellen tot spruiting overgegaan, welke in het oogvallend rijker aan grove volutinekorrels waren, dan de overige cellen. Ook de brug tusschen knop en moedercel was donkerblauw gekleurd. Evenals in dit voorbeeld vertoonen over het algemeen in een volutinehoudende cultuur de

verschillende cellen onderling een zóó zeer verschillend beeld, dat een duidelijke verandering in verband met de gisting m.i. niet is aan te geven. Wel ziet men bij Torula monosa dikwijls in versche phosphaathoudende voedingsvloeistof lichtpaars gekleurde vacuolen verdwijnen, welke na lang verblijf op den zelfden mout-agarbodem zijn ontstaan, doch er is geen enkel bewijs, dat deze met de gisting iets te maken heeft. Wat zelfs pleit tegen het verband met de gisting als zoodanig bij Torula monosa, is de waarneming, dat, wanneer men deze gistcellen brengt in een vloeistof, welke 2,5 procent lactose inplaats van 2,5 procent glycose bevat (naast pepton, $MgSO_4$ en KNO_3), de verspreiding der volutinekorrels in de uitstrijkpreparaten gedurende enkele uren gemaakt, volkomen een overeenkomstig beeld oplevert. Nu is het bekend, dat Torula monosa (de naam wijst er reeds op) uitsluitend monosen, dus geen lactose vergist. Op dezelfde wijze heb ik de bovengenoemde biergist-cultuur, welke onder 10 procent rietsuiker was bewaard, zoowel in 2,5 procent lactose als in 2,5 procent glycose (beide met gelijke hoeveelheid pepton, $MgSO_4$ en KNO_3) gelijktijdig onderzocht. Gistproeven leerden, dat, zooals te verwachten was, alleen in het laatste geval koolzuurontwikkeling plaats had, dat dus lactose niet wordt vergist. Een overtuigend verschil tusschen de gistcellen in deze beide vloeistoffen was niet waar te nemen. In beide zag men na 1, 2 en 3 uur een deel der cellen met meer diffuse verdeeling der volutinekorrels, doch slechts een zeer gering percentage der cellen, dat wellicht in de glycosehoudende vloeistof iets hooger was, doch geen verschil van dien aard, dat er aan een onmiddellijk verband met de gisting kon worden gedacht.

Ter beantwoording van de vraag, of de volutine noodzakelijk is voor het gistingsproces moesten andere wegen worden ingeslagen. En daarbij is gebleken, dat zoowel de zymase als de nuclease en de katalase niet aan de aanwezigheid van deze stof gebonden zijn. Men zou zich nu kunnen afvragen, of — zooal niet de stof, welke de door Meyer aangetoonde kleurreacties vertoont, de moederbodem der enzymen is — toch misschien na het verdwijnen dezer kleurreacties, de voornaamste bestanddeelen van de volutine nog in de cel aanwezig blijven. Op deze vraag kan geantwoord worden, dat, zooals men blz. 1454 heeft gezien, bij extractie van volutinehoudende Torula met verdund alkali een nucleinezuur-verbinding wordt verkregen, welke met dezelfde methode niet te verkrijgen was uit een ongeveer gelijke hoeveelheid volutinevrije Torula. Het is dus niet slechts een kleurreactie, welke verloren gaat door onbekende chemische omzettingen in de cel, doch ongetwijfeld een nucleinezuur-

verbinding, welke de Torula op phosplaat-vrijen bodem verliest! Men kan dus met volkomen recht zeggen, dat deze nucleinezuurverbinding voor de enzymwerking niet noodzakelijk is. Evenmin is ze noodzakelijk voor het behoud der soort, want de Torula monosa bewaart de eigenschappen der soort na 9 maanden verblijf op phosphaatvrijen bodem; ook de voortplanting gaat, hoewel in eenigermate verlangzaamd tempo, regelmatig haar gang. Een dergelijke cultuur na 9 maanden op verschen phosphaatvrijen bodem overgëent, is nog tot gisting in staat (proef blz. 1458), op phosphaathoudenden bodem wordt onmiddellijk weer op de gewone wijze volutine gevormd.

Het is dus bezwaarlijk aan deze stof, welke nu inderdaad gebleken is een nucleïnezuurverbinding te zijn, een andere rol toe te kennen dan die van reservestof, en wel mogelijkerwijze van een reservestof van bijzonderen aard. Bedenkt men namelijk, dat zeer vermoedelijk steeds phosphaten aan de cel beschikbaar moeten staan voor het gistingsproces, dan zal — hoe gering deze hoeveelheid ook zij, daar ze vrijkomend, steeds weer opnieuw gebruikt kan worden — het toch voor de cel van voordeel zijn, wanneer ze onmiddellijk uit dat reservoir van nucleïnezuur, dank zij haar nuclease, dit phosphaat putten kan. Dat de aanwezigheid van volutine in hypho- en blastomyceten voor het gistingsproces van beteekenis kan zijn, ligt dus zeer voor de hand; noodzakelijk is ze echter voor de gisting niet, daar zooals gebleken is, slechts microchemisch aantoonbare sporen van phosphorus in een volutinevrije cultuur voldoende zijn om gisting tot stand te brengen.

SAMENVATTING DER RESULTATEN.

De vorming van volutinekorrels in schimmels en gistcellen is gebonden aan de aanwezigheid van anorganische of organische phosphorusverbindingen in den voedingsbodem. Op een phosphaatvrijen bodem kunnen Ustilago maydis, Torula monosa, Saccharomyces cerevisiae, en Lactosegist gekweekt worden, zonder dat volutine in de cellen ontstaan. Bij overenting op phosphaathoudenden bodem heeft onmiddellijk nieuwvorming van volutine plaats.

Door verdund alkali wordt gelijktijdig met de volutine een nucleïnezuurverbinding aan Torula monosa en Saccharomyces cerevisiae onttrokken, welke niet te verkrijgen is uit een ongeveer overeenkomstige hoeveelheid volutinevrije cultuur. De hypothese, reeds langs indirecten weg aannemelijk gemaakt, doch nimmer bewezen, dat volutine uit een nucleïnezuurverbinding bestaat, heeft hiermede het bewijs gekregen. Nucleïnezuur volgens de bekende bereidingswijze

uit gist bereid, is zeker in hoofdzaak afkomstig van de volutine.

De nucleïnezuurverbinding, welke uit de volutinehoudende cellen is opgelost, wordt door een nuclease ontleed, welke in de Torulacellen zelf wordt gevormd, waarbij het ontstaan van phosphorzuur kon worden aangetoond. Ook de volutinevrije culturen van Torula monosa bevatten nog een nuclease. Ook andere enzymwerkingen blijven voortbestaan, met name de katalase- en de zymasewerking. In tegenstelling met de onlangs uitgesproken meening van Henneberg, volgens welke de zymasewerking der gist aan de aanwezigheid van volutine gebonden is, deze laatste wellicht als het enzym zelf moet worden beschouwd — kan worden aangetoond, dat volutinevrije culturen nog een zeer duidelijke gisting teweeg brengen. In aanmerking genomen de minder snelle groei in phosphaatvrij medium, doet deze gisting niet noemenswaard onder voor het gistvermogen der volutinehoudende culturen van Torula en Saccharomyces. Ook na 9 maanden verblijf in phosphaatvrije omgeving is een volutinevrije cultuur van Torula monosa nog tot gisting in staat.

Volutine is een nucleinezuurverbinding, aan welke vermoedelijk geen andere rol dan die van reservestof toekomt. De aanwezigheid van deze reservestof, moge ze niet noodzakelijk zijn voor het leven en voor de voortplanting, is zonder twijfel belangrijk voor den individueelen bloei van de cel. Het is zeer goed mogelijk, dat ze — hoewel geenszins voor de gisting vereischt — het gistingsproces vergemakkelijkt door het voortdurend beschikbaar stellen van geringe hoeveelheden phosphaat, welke door de nuclease uit het nucleinezuur kunnen worden vrijgemaakt. De verhouding van de volutine tot de vermeerdering der cellen dient nog nader te worden bestudeerd.

Op phosphaatvrijen bodem is eenmaal bij Torula monosa een gepigmenteerde variatie ontstaan met fijne bruine pigmentkorrels in het celplasma. Dit pigment verdween na overenting op phosphaathoudenden bodem, doch keerde telkens in phosphaatvrij medium terug. Ook deze pigmenthoudende culturen hadden het glycosesplitsend enzym niet verloren.

Anatomie. — De Heer Boeke biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. G. C. Heringa: *„De intraprotoplasmatische ligging der neurofibrillen in axon en eindlichaampjes."*

(Mede aangeboden door den Heer Bolk).

Allerwege nog vindt men bij de beschrijving van den bouw der perifere zenuwen vastgehouden aan de scheiding tusschen axon sensu strictiori, en zijn scheeden, en allerwege wordt van het protoplasma, dat de fibrillen draagt, gesproken als van den uitlooper van de centraal gelegen gangliencel, terwijl merg- en Schwann-scheede sonsentendu beschouwd worden als secundair omhullende lagen, die protoplasmatisch volkomen hun onafhankelijkheid tegenover het axoplasma bewaren. Deze opvatting, die van Ranvier stamt, dankt aan de neuronen-theorie haar verbreiding in de neurologische literatuur. Toch, hoe algemeen ook aanvaard, onaangevochten is zij niet. Al sinds Schwann de zenuw beschreef als een keten van achterelkaar geplaatste cellen, bestaat de neiging ieder zenuwsegment als één geheel te beschouwen. En zoo staan tegenover de neuronisten, in wier kader het past, den neuroblast-uitlooper door daaraan soortvreemde elementen te doen inhullen, van ouds de catenarii, die de Schwann-cellen zelve als draagsters der prikkel-geleidende neurofibrillen willen erkend zien. Ja, zelfs meent Nageotte een samenhang van de mergscheede, eenerzijds met het axoplasma, anderzijds met de scheede van Schwann te hebben kunnen aantoonen.

Eenheid van scheeden en axon is ook de consequentie van Held's theorie, die, gebaseerd op embryologische data van hemzelf en anderen (Graham Kerr b.v.), min of meer als een modificatie van de keten-theorie kan worden gequalificeerd. Volgens haar zijn geenszins de neurofibrillen aan het protoplasma van een neuroblast gebonden, maar vermag de fibrilvorming, eenmaal in gang gezet in de centrale neuroblast, zich continu voort te planten langs plasmodermen van bindweefsel- en orgaancellen. Zoo ontstaat in een vroeg stadium van ontwikkeling een geleidingsbaan, die, continu zich voortzettend van cel op cel, de medulla met de huid en de meest verschilende organen van het embryo verbindt. Later wandelen dan glia-elementen van uit de medulla langs deze baan de jong aangelegde zenuw achterna. Ze dringen alle andere elementen van het contact met de neurofibrillen weg, om zelf in hunne plaats te treden. Tot een lange rij van syncitiaal samenhangende cellen gerangschikt, nemen zij de fibrillen in zich op. Ten slotte, als de myeline om de fibrillen heen wordt afgescheiden, ziet men deze „lemmoblasten" in de Schwann-cellen der volwassen zenuw overgaan. Moge er dus, wat de zenuw zelve betreft, reden zijn te twijfelen aan de juistheid der nog algemeen

gehuldigde opvatting, nog meer geldt dit voor de zenuweindorganen. Na hare scheeden verloren te hebben, treedt daar de zenuw in relatie tot bepaalde cellige elementen: voor de motorische zenuw de spiervezel, bij de sensibele de tastcellen van de eindorganen. Tusschen deze beide categorieën bestond de laatste jaren een tegenstrijdigheid; want, terwijl voor de motorische zenuw door Prof. Boeke de intra-protoplasmatische ligging van het eindnetwerk, en het bestaan van het ultraterminale netwerk was aangetoond, werd voor de sensible eindorganen nog steeds aan de scheiding tusschen eindschijf en tastcellen vastgehouden. Deze tegenstrijdigheid verviel voor een groot deel, toen het mij gelukte aan te toonen, dat in strijd met de vigeerende opvattingen (Scymonowicz, Dogiel, Botezat), het terminale netwerk in de volwassen lichaampjes niet tusschen de cellen in gelegen is, maar als een onderling verbonden dubbelstel ligt in de randzônes van beide aangrenzende cellen, en dat verder vandaar uit, vergelijkbaar met het motorische ultraterminale netwerk, een regelmatig reticulum zich door beide cellen uitbreidt. (Zie: J. Boeke en G. C. Heringa, De samenhang der zenuweindigingen met de hen omgevende weefselelementen. K. A. W. 29 Jan. 1916).

Een onderzoek naar de ontwikkeling der lichaampjes van Grandry, leverde resultaten, die met de zoo juist genoemde morphologische gegevens zeer goed overeenstemmen: Omstreeks den 14—16^en^ broeddag ligt onder het epitheel en evenwijdig daaraan uitgebreid, een zenuwplexus, opgebouwd uit dicht opeengedrongen, later losser aaneengevoegde, vertakte anastomoseerende, kernhoudende elementen. Deze celcomplexen, opvallend door hun donkere kleuring met ijzerhaematoxyline, herbergen rijkelijk anastomoseerende fibrillen en al vroeg ook fibrilnetten. Spoedig is er dan differentiatie naar twee richtingen waar te nemen. De groote menigte der cellen sluit zich blijvend aan bij recht toe, recht aan verloopende fibrillen en wordt tot Schwann-cel. Een klein deel daarentegen, correspondeerend met de hier en daar intercalair voorkomende fibrilnetten, differentieert zich allengs tot volkomen typische Grandry-cel. Schwann-cel en Grandry-cel zijn dus gelijkwaardige elementen, en beide moeten, vergelijkbaar met Held's lemmoblasten als draagsters der neurofibrillen worden beschouwd. Over de herkomst der cellen, die den subcutanen plexus samenstellen, heb ik geen gegevens kunnen verzamelen. Gegeven den ouderdom van mijn embryonen en het bestek van mijn onderzoek was dit trouwens te verwachten. Wel meen ik ieder genetisch verband tusschen het epitheel en den subcutanen celplexus te hebben kunnen uitsluiten, zoodat ik Botezat's meening, dat de tastcellen ab origine epitheelelementen zijn, als onjuist moet qualificeeren. Ook

waren geen argumenten te vinden, om aan de opbouwende elementen van den subcutanen plexus de beteekenis van neuroblasten toe te kennen. Integendeel kwam ik tot de conclusie, dat, ongeveer in overeenstemming met HELD's zienswijze, het fibrillatieproces zich zelfstandig in protoplasmatisch gepraeformeerde banen uitbreidt. Zoodoende verhouden ook de elementen van den celplexus zich tegenover de fibrilvorming passief en daarom dan ook stelde ik ze aan HELD's lemmoblasten gelijk, en duidde ik de bedoelde zenuwbaan als lemmoblastbaan aan.

Blijkt het dus, dat de onafhankelijkheid van de zenuw ten opzichte van de omgevende elementen in de motorische en sensibele eindigingen geenszins onaanvechtbaar is, voor onze conceptie van den bouw van de perifere zenuwen gaven de resultaten van mijn onderzoek aanleiding tot de conlusie, dat hoogstwaarschijnlijk de geheele zenuw volgens het principe van de lemmoblastbaan is gebouwd, — d.w.z. dus, dat de elementen van de scheede van SCHWANN (primair of niet, blijve in het midden), één zijn met het axoplasma, en zelf in eigen protoplasma de neurofibrillen herbergen.

Dit laatste dan meen ik nu, op grond van nieuwe gegevens nader te kunnen bevestigen.

Reeds APATHY heeft zich, op theoretische gronden aangesloten bij de opvatting van BÜTSCHLI en als zijn meening gegeven, dat het axoplasma een schuimstructuur zou bezitten met langgestrekte mazen, en dat in de plasmaschotten tusschen de met vocht gevulde alveolen, de neurofibrillen gelegen zouden zijn. Dit is ook wat Prof. BOEKE in zijn in 1916 verschenen werk over de regeneratie van motorische zenuwen (K. A. W. 1916), waarop wij straks terugkomen, zeide te moeten verwachten. — Welnu, wanneer wij een gewone merghoudende zenuwvezel, bijv. uit het onderhuidsch bindweefsel bij den mensch, op dwarsdoorsnede bekijken, dan zien we, als de fixatie voldoende was, dat binnen de zwak gekleurde mergscheede, de neurofibrillen gelijkmatig verdeeld liggen in een netwerk van protoplasmatische schotten. (Fig. 1.)



Fig. 1.

Dw. doorsnede van een zenuw uit de cutis van de mensch, omgeven door bindw. Kleuring met ijzerhae m.-eosine. De langgestrekte kern is de Schwannkern. De mergscheede is dubbel gecontoureerd zichtbaar. De neurofibrillen liggen in protoplasmaschotten.

Vervolgen wij de zenuw verder perifeerwaarts, dan zien we successievelijk een reeks veranderingen optreden, die vasthoudend aan het principe van de intraprotoplasmatische ligging de neurofibrillen, aan deze laatsten gelegenheid tot vrijere ontplooiïng bieden.

Allereerst zien we binnen het neurilemma de mergscheede zich splitsen. Verder zijn nu dus de neurofibrillen verdeeld over meerdere bundels, die, ieder door een mergscheede omhuld, gezamenlijk ingesloten liggen in het protoplasma van de relatief in omvang toegenomen SCHWANN-cel. (Fig. 2.) Onafhankelijk van elkaar, zullen een voor een dan die fibrilbundels later hun mergscheede verliezen. Dan bestaat de zenuw dus op dwars-doorsnede uit één gevacuoliseerde protoplasma-massa, en als daar straks in den merghoudenden axon het axoplasma, vinden we nu het geheel vacuolair gebouwd, en de fibrillen gelegen binnen de de vacuolen omgrenzende plasmaschotten. (Fig. 3).



Fig. 3.

Gevacuoliseerde zenuwvezel uit de tastbal van een kat, geimpregneerd volgens Bielschowsky, en nagekleurd met haem.-eosine. De dwarsgetroffen fibrillen zijn als zwarte puntjes in de plasmaschotten zichtbaar. Het geheel is wat geschrompeld.

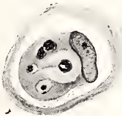


Fig. 2.

Dw. dsn. als fig. 1. De neurofibrillen zijn over vijf bundels verdeeld. De splitsing ligt voor een groot deel in de coupedikte.

Hier is dus de scheiding vervallen tusschen SCHWANN-cel en axoplasma, en de conclusie ligt voor de hand, dat inderdaad neurilemma en ascylinder één en dezelfde zaak is. Uit de figuren blijkt nog, dat, zooals ik zeide, geenszins allle mergsubstantie tegelijk uit de zenuwbaan op een bepaald niveau verdwijnt. Frequent zijn tusschenstadia (fig. 4), waar men eensdeels in grootere protoplasma-

ophoopingen van de zenuwbaan een bundel fibrillen nog door mergscheede omgeven vindt, terwijl daarnaast in een sterker, of liever grover gevacuoliseerd gedeelte van het cellichaam de fibrillen vrij verspreid liggen. [1]) We herkennen grover vacuolisatie van de lemnoblastbaan als een verschijnsel, dat, hand aan hand gaand met het vrij worden der neurofibrillen, typisch is voor het naderend einde van de geleidingsbaan. Ten slotte kan de gevacuoliseerde fibrildragende protoplasma-massa, die we ons immers nu reeds als een lang gestrekt syncitium hebben leeren denken, ook op dwarsdoorsnede meerdere kernen bezitten.



Fig. 4.
Als fig. 3. Links een dikke fibrilbundel met mergmantel, overigens fibrillen in de tusschenschotten, grootendeels in scheef verloop door de coupe getroffen.

Meerdere zich oplossende axonen binnen één scheede van HENLE opgesloten, vormen ook onderling een syncitiaal geheel. Hierbij ontstaan dan beelden, die een eigenaardig licht werpen op de beteekenis van de vormingen waarom het hier gaat. Het is bekend, O. SCHULZE reeds heeft er op gewezen, dat niet al te jonge spinale zenuwen op een gegeven moment zich voordoen als dikke complexe bundels met perifeer daaromheen gerangschikte kernen. HELD geeft uit zoo'n stadium eenige afbeeldingen van dwarscoupes. [2]) Men ziet daarop anastomoseerende lemmoblasten met hun kernen perifeer; naar binnen toe liggen de fibrillen in de protoplasma-bruggen. Bij vergelijking met mijn teekeningen moet de groote gelijkenis direct opvallen. Ook zonder hier verder in te gaan op de vraag naar de herkomst dezer elementen, voert de analogie hier tot de conclusie, dat die cellen die HELD lemmoblasten, ,,Geleitzellen" of perifere gliacellen noemt, en die, dit staat wel vast, later de SCHWANN-scheede vormen, niet alleen scheede-cellen, maar de echte vormers van de volwassen zenuwbaan zijn. Door zich voor te stellen, dat de protoplasma-structuur zich allengs concentreert, en de fibrillen groepsgewijs door een mergmantel omgeven worden, is het gemakkelijk inzicht te krijgen over de wijze waarop uit een dergelijke primitieve lemmoblastenbaan van HELD de volwassen zenuw ontstaat.

---

[1]) In tegenstelling met wat veelal onder „vrije" neurofibrillen wordt verstaan, waar de naakte, extracellulaire ligging is bedoeld, wil ik met dezen term alleen, het ontbreken van een mergmantel, om de fibril te midden van het lemmoblastprotoplasma, aanduiden. Vrije fibrillen in den zin van „extraprotoplasmatisch" acht ik onbestaanbaar.

[2]) In zijn werk „Entwicklung des Nervengewebes bei den Wirbeltieren (1909).

Indien we daarentegen in ons praeparaat de zenuw verder naar de periferie vervolgen, dan zien we de aangevangen decompositie van de fibrilbundels consequent voortgaan. En hand aan hand hiermee neemt ook de vacuolisatie van het lemmoblastplasma toe, tot eindelijk de dwarsdoorsnede het in fig. 5—6 gereproduceerde beeld

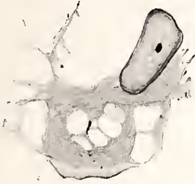




Fig. 5. Fig. 6.

Als fig. 3. Twee coupes door het uiterste deel van een zenuwvezel, te midden van het omgevende bindweefsel. Sterke vacuolisatie, fibrillen in de tusschenschotten.

Men merke op *de totale afwezigheid* van kunstmatige schrompeling in deze afbeeldingen, zoo goed als in fig. 4.

geeft. Blijkbaar zijn we dicht bij het einde. Daar is de vacuolisatie ad extremum voortgeschreden. Men zou dergelijke subtiele vormingen haast niet als zenuwelementen herkennen, indien men niet bij draaiing van de micrometerschroef de neurofibrillen bij hun verloop dwars of scheef door de coupe vervolgen kon, evenals tot dusver in een protoplasmaschot ingesloten.

Ik meen, dat wij deze beelden moeten interpreteeren als doorsneden van z.g. vrij eindigende zenuwen. Ik baseer deze meening op het feit, dat de zenuwen, die de tastlichaampjes innerveeren, tot hun doortreding door de kapsel hun normale structuur van merghoudende zenuw behouden.

Wat evenwel de vrije eindigingen betreft, we danken de gegevens daaromtrent bijna uitsluitend aan de methyleenblauwpraeparaten van Dogiel, Ruffini, Ceccherelli, Coggi, e. a. En hoeveel ook de methyleenblauw-methode onze kennis van het perifere zenuwstelsel heeft verrijkt, het is een feit, dat zoowel de fijnste eindvertakkingen, als de verhouding van deze tot de omgevende elementen, daarmee niet of slechts zeer gebrekkig worden zichtbaar gemaakt. Daardoor wordt het verklaarbaar, dat de fijnere structuurbeelden welke ik afbeeldde, tot dusverre werden miskend. Aan den anderen kant is het voor de hand liggend, hoe gemakkelijk deze ijle vormingen te midden van het bindweefsel zullen worden over het hoofd gezien. En toch gelukt het zonder veel moeite, wanneer men op de herkenning er van gespitst is, de successieve vormen van de zenuw, ook in niet

specifiek behandelde, mits goed gefixeerde praeparaten terug te vinden.

Ten slotte heb ik mijn aandacht gevestigd op de lichaampjes van Meissner. En, al is het mij op het oogenblik nog niet mogelijk daaromtrent een einduitspraak te doen, ik heb uit goedgelukte Bielschowsky-praeparaten de overtuiging gekregen, dat ook zij gebouwd zijn volgens het principe, dat wij nu reeds voor de lichaampjes van Grandry en de z.g. vrijeindigende zenuwstammen hebben leeren kennen, d. w. z. dat ook in de Meissner-lichaampjes de neurofibrillen intraprotoplasmatisch gelegen zijn binnen cellen, die ook weer aan de elementen van de lemmoblastbaan zouden moeten worden gelijk gesteld.

Nadere studie moet mij nog leeren, in hoeverre het noodig zal blijken, onze inzichten omtrent de samenstelling van het Meissner-lichaampje aan een algeheele herziening te onderwerpen.

Eindelijk dan, wil ik er nog op wijzen, dat de veranderingen die de zenuw gedurende haar verloop vertoont, behalve met de door Held verschafte embryologische gegevens, ook in volkomen overeenstemming zijn met de successieve stadien van een zenuw in regeneratie. In zijn in 1916 verschenen werk over „die Nervenregeneration" heeft prof. Boeke tegenover Cajal en Tello verdedigd, dat de uit den centralen stomp uitgroeiende neurofibrillen verloopen in het protoplasma van de banden van Büngeer. Deze banden, de woekeringsproducten van de Schwann-scheede, zijn geen buizen gevuld met vloeistof waarin de fibrillen flotteeren, maar soliede vormingen, de analoga of homologa van Held's lemmoblastbanen. Oorspronkelijk dus soliede, reageeren zij op het ingroeien der fibrillen met vacuolisatie, met dien verstande, dat steeds de fibrillen in de tusschenschotten tusschen de vacuolen en om de vacuolen heen te vinden zijn. In een later stadium ziet men volgens de beschrijving groepsgewijs de fibrillen door mergsubstantie omgeven worden. Zoo komt dan het stadium tot stand, dat binnen één dwarsdoorsneden band van Bünger meerdere mergscheeden getroffen worden. En hierop volgt dan de splitsing van het protoplasma, zoodat ieder splitsingsproduct, door eigen Schwann-scheede omhuld, een eigen individueel bestaan krijgt.

Eén voor één is voor ieder van deze stadien een overeenkomstig beeld onder mijn teekeningen te vinden. Wat naar het onderzoek van prof. Boeke successieve stadia waren in de ontwikkeling, zij 't ook postembryonale ontwikkeling, werd door mij in het verloop van een zenuw, gaande van centraal naar perifeer achtereenvolgens teruggevonden. Men zou haast zeggen, dat centraal de zenuw allengs

is gespecialiseerd voor uitsluitende geleidingsfunctie, terwijl zij perifeer voor primitiever perceptie-functie in een meer oorspronkelijken toestand persisteerde.

Juist de volkomen overeenstemming tusschen de embryologische (HELD), de experimenteele (BOEKE) en de morphologische gegevens, waarover wij nu beschikken, is het sterkste argument voor mijn overtuiging, dat inderdaad de volwassen zenuw syncitiaal gebouwd is, en dat dit syncitium, dat de fibrillen draagt, continu zich voortzet van de centrale neuroblast af, tot daar, waar de motorische of sensibele eindvertakking zich uitbreidt, toe.

Sterrenkunde. — De Heer DE SITTER biedt eene mededeeling aan van den Heer J. WOLTJER JR.: „*Over de theorie van den Saturnussatelliet Hyperion*".

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

1. Onder de eigenaardige storingen, die de satellieten van Saturnus door hun onderlinge aantrekking ondervinden, nemen die in de baan van Hyperion, veroorzaakt door Titan, een belangrijke plaats in. In deze mededeeling zal ik de theorie van eerstgenoemden satelliet in korte trekken ontwikkelen; uitvoeriger berekeningen daaromtrent hoop ik in mijn dissertatie te publiceeren.

De verhouding tusschen de massa's van Hyperion en Titan is slechts een zeer kleine grootheid. Verder zijn de hellingen van de baanvlakken van Hyperion en van Titan t. o. v. den aequator van Saturnus gering. Men vereenvoudige nu het probleem door af te zien zoowel van deze hellingen als van den invloed van de massa van Hyperion, de zon, de overige satellieten, de afplatting van Saturnus en de ringen. Men onderstelle dus, dat Hyperion zich als een punt met de massa nul beweegt in het baanvlak van Titan, die zelf een ongestoorde elliptische beweging beschrijft om het middelpunt van een bolvormigen Saturnus.

De notatie is de volgende:

$a =$ halve groote as, $e =$ excentriciteit;

$l =$ middelbare anomalie, $g =$ pericentrumlengte;

$\mathrm{M} =$ massa van Saturnus, $m' =$ massa van Titan;

$\mathrm{L} = \sqrt{a\mathrm{M}}$; $\mathrm{G} = \mathrm{L}\sqrt{1-e^2}$.

De letters op Hyperion betrekking hebbend zijn ongeaccentueerd, die op Titan betrekking hebbend geaccentueerd. De eenheden worden zoo gekozen, dat de gravitatieconstante $= 1$ wordt; x en y zijn

coördinaten in een assenstelsel, dat ligt in het baanvlak van Titan en waarvan de oorsprong ligt in het middelpunt van Saturnus.

Uit de vergelijkingen, die DELAUNAY aan zijn maanstheorie ten grondslag gelegd heeft [1]), volgen deze differentiaal-vergelijkingen voor de beweging van Hyperion:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial R}{\partial l}\ ,\quad \frac{dG}{dt}=\frac{\partial R}{\partial g},$$

$$\frac{dl}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial L}\ ,\ \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial G},$$

$$R=\frac{M^2}{2L^2}-m'\frac{xx'+yy'}{r'^3}+\frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}.$$

De functie R is, wat de hoekargumenten betreft, slechts een functie van $l+g-l'-g'$, l, l'. Men voert nu de volgende nieuwe grootheden in:

$$l+g-l'-g'=\Phi,$$
$$4l-3l'+3g-3g'-180^\circ=\theta,$$
$$g-g'=\Omega,$$
$$g'=\chi.$$

Men ziet dan dadelijk, dat R, wat de hoekargumenten betreft, slechts een functie is van Φ, θ, Ω. De reden waarom men juist deze drie grootheden invoert is de volgende: uit de waarnemingen blijkt, dat de middelbare beweging van het argument θ nul is en dat θ een libratiebeweging om de waarde $\theta=0^\circ$ vertoont met een amplitude van ongeveer 36°; dit argument is dus van bizonder belang; het argument Ω is een saeculair argument, zijn invoering beveelt zich dus van zelf aan; het argument Φ heeft een korte periode en geeft dus juist aanleiding tot de niet belangrijke termen in de ontwikkeling van de storingsfunctie. Men late derhalve uit R alle termen weg, wier argument een veelvoud van Φ of Φ zelf bevat, zoodat men dus in plaats van R gebruikt de functie $\bar{R}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R\,d\Phi$. In het vervolg laat men evenwel gemakshalve de streep boven de letter R weg.

Stelt men nu nog:

$$L-G=\Lambda,$$
$$3L-4G=\Gamma,$$

en noemt de middelbare beweging van Titan n', dan heeft men deze vergelijkingen voor de grootheden θ, Φ, Λ, Γ:

---

[1]) Théorie du Mouvement de la Lune I, 13.

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad , \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \Lambda} - 3n' ,$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -4\frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad , \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \Gamma} - n' .$$

2. Daar de excentriciteit van Titan een kleine grootheid is, trachte men de oplossing van deze vergelijkingen te ontwikkelen naar machten van deze excentriciteit. Men begint dus met $e' = 0$ te stellen. Het blijkt dan, dat R niet meer afhangt van Ω en dus slechts een functie van θ is. De vergelijkingen worden:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial R\,(e'=0)}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial R\,(e'=0)}{\partial \Lambda} - 3n',$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial R\,(e'=0)}{\partial \Gamma} - n'.$$

Men stelle nu $R = R_0 + R_1 + R_2$, waar $R_0 = \dfrac{M^2}{2\,(4\,\Lambda - \Gamma)^2}$, $R_1 = (R - R_0)_{e'=0}$ en R_2 is de rest. Voor R_1 volgt dan deze ontwikkeling:

$$R_1 = m' \sum_{0}^{\infty}{}_p\, A_p \cos p\theta,$$

waar $A_0, \ldots A_p \ldots$ functies zijn van Λ en Γ.

Daar $R\,(e'=0)$ Φ noch Ω bevat, vormen de vergelijkingen voor Λ, Γ en θ een afzonderlijk systeem; is dit geintegreerd, dan volgt Φ door een quadratuur. Dit systeem laat de oplossing toe: $\theta = 0$, $\Lambda = \text{const.}$, $\Gamma = \text{const.}$. Evenwel moet tusschen de constante waarden van Λ en Γ, die men Λ_0 en Γ_0 noemt, een betrekking bestaan, die volgt uit de voorwaarde, dat $\dfrac{d\theta}{dt} = 0$ voor $\theta = 0$. Deze betrekking luidt:

$$\frac{4M^2}{(4\Lambda_0 - \Gamma_0)^3} - 3n' = m' \sum_{0}^{\infty}{}_p \left[\frac{\partial A_p}{\partial \Lambda}\right]_{\Lambda_0, \Gamma}.$$

Laat de waarden van a en e, behoorende bij $\Lambda = \Lambda_0$, $\Gamma = \Gamma_0$, a_0 en e_0 zijn. De betrekking wordt dan, daar $n' = \dfrac{\sqrt{M+m'}}{a'^{\frac{3}{2}}}$:

$$4\left(\frac{a'}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{1+\frac{m'}{M}} =$$

$$= \frac{m'}{M} \sum_{0}^{\infty}{}_p\, a'^{\frac{3}{2}} \left[8\sqrt{a_0}\,\frac{\partial A_p}{\partial a} + \frac{4(1-e_0^2)-3\sqrt{1-e_0^2}}{e_0\sqrt{a_0}}\,\frac{\partial A_p}{\partial e}\right]_{a_0, e_0}.$$

Uit deze vergelijking is $\frac{a'}{a_0}$ aldus op te lossen:

$$\frac{a'}{a_0} = \sum_0^{\infty} {}_p\, \alpha_p \left(\frac{m'}{M}\right)^p,$$

waar α_p een functie is van e_0; voor α_0 vindt men de waarde $(\frac{3}{4})^{\frac{2}{3}}$ en dus: $\alpha_0 = 0.825$.

Om den aard van deze oplossing van de differentiaalvergelijkingen nader te onderzoeken vestige men zijn aandacht op de naburige oplossingen. Daartoe stelle men $\Lambda = \Lambda_0 + \delta\Lambda$, $\theta = \delta\theta$ en neme alleen de eerste orde in deze grootheden mede. De differentiaalvergelijkingen worden:

$$\frac{d\delta\Lambda}{dt} = \frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta^2}\delta\theta + \frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta\,\partial\Lambda}\delta\Lambda,$$

$$\frac{d\delta\theta}{dt} = -\frac{\partial^2 (R_0 + R_1)}{\partial\Lambda^2}\delta\Lambda - \frac{\partial^2 R_1}{\partial\Lambda\,\partial\theta}\delta\theta,$$

waaruit door eliminatie van $\delta\Lambda$ volgt:

$$\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} = -\frac{\partial^2 (R_0 + R_1)}{\partial\Lambda^2}\frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta^2}\delta\theta.$$

Ik heb nu zekere gedeelten van de storingsfunctie numeriek ontwikkeld voor de waarden $e = 0.1043$ en $\frac{a'}{a} = 0.8250634$.

De eerste waarde is die, die H. STRUVE[1]) uit de waarnemingen gevonden heeft, de tweede is dezelfde als die, die hij gebruikt heeft bij de berekening van enkele coëfficienten uit de storingsfunctie. Uit mijn ontwikkelingen leid ik af:

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta^2} = + \frac{m'}{a'} \times 0.0728.$$

Verwaarloost men $\frac{\partial^2 R_1}{\partial\Lambda^2}$ tegenover $\frac{\partial^2 R_0}{\partial\Lambda^2}$, wat geoorloofd is, daar de eerste term m' als factor heeft, de tweede niet, dan wordt, daar $\frac{\partial^2 R_0}{\partial\Lambda^2} = + \frac{48}{a_0{}^2}$, de differentiaalvergelijking voor $\delta\theta$:

$$\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} + 2.38\frac{m'}{a'^3}\delta\theta = 0,$$

of wel, daar $n'^2 a'^3 = M + m'$, met verwaarloozing van hoogere orde in m':

[1]) Beobachtungen der Saturnstrabanten. Publications de l'Observatoire Central Nicolas. Série II. Vol. XI, pg. 290 en 267.

$$\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} + 2{,}38\, n'^2 \frac{m'}{M}\, \delta\theta = 0,$$

zoodat:

$$\delta\theta = q \sin (\nu t + \gamma),$$

waar q en γ integratieconstanten zijn en

$$\nu = + 1{,}54\, n' \sqrt{\frac{m'}{M}}.$$

Men ziet dus, dat de oplossing $\theta = 0$, $\Lambda =$ const., $\Gamma =$ const. stabiel is en slingeringen om deze waarden mogelijk zijn. In werkelijkheid zijn deze slingeringen zeer aanzienlijk. STRUVE vindt voor de amplitude van de libratie in θ (l. c. pg. 287): 36°.64. Toch geeft de waarde van ν reeds een goede benadering, zooals vergelijking met de waarneming leert. Neemt men nl. voor $\frac{m'}{M}$ de waarde, die SAMTER [1]) berekend heeft: $\frac{1}{4125}$, dan volgt uit de bovenstaande formule voor ν: $\nu = 0°.542$, terwijl STRUVE vindt (l. c. pg. 287): 0°.562.

3. Uitgaande van de voor $e' = 0$ geldende oplossing $\theta = 0$, $\Lambda =$ const., $\Gamma =$ const., gaat men nu de ontwikkeling van de oplossing naar machten van e' opbouwen. Noemt men de termen van de eerste orde resp. $\delta\theta$, $\delta\Lambda$, $\delta\Gamma$, dan vindt men voor deze grootheden de volgende differentiaal-vergelijkingen:

$$\frac{d\delta\Lambda}{dt} = \frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta\partial\Lambda}\,\delta\Lambda + \frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta\partial\Gamma}\,\delta\Gamma + \frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta^2}\,\delta\theta + \frac{\partial R_2}{\partial\theta} - \frac{\partial R_2}{\partial\Omega},$$

$$\frac{d\delta\Gamma}{dt} = -\,4\,\frac{\partial R_2}{\partial\Omega},$$

$$\frac{d\delta\theta}{dt} = -\frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial\Lambda^2}\,\delta\Lambda - \frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial\Lambda\partial\Gamma}\,\delta\Gamma - \frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial\Lambda\partial\theta}\,\delta\theta - \frac{\partial R_2}{\partial\Lambda}.$$

Hierbij moet men in R_2 slechts de eerste orde in e' medenemen. In aanmerking nemende de oplossing voor $e' = 0$ worden deze vergelijkingen:

$$\frac{d\delta\Lambda}{dt} = + \frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta^2}\,\delta\theta + \frac{\partial R_2}{\partial\theta} - \frac{\partial R_2}{\partial\Omega},$$

$$\frac{d\delta\Gamma}{dt} = -\,4\,\frac{\partial R_2}{\partial\Omega},$$

$$\frac{d\delta\theta}{dt} = -\frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial\Lambda^2}\,\delta\Lambda - \frac{\partial^2 (R_0+R_1)}{\partial\Lambda\partial\Gamma}\,\delta\Gamma - \frac{\partial R_2}{\partial\Lambda}.$$

[1]) Die Masse des Saturnstrabanten Titan. Sitz. Ber. der K. Preussischen Akad der Wissenschaften 1912, pg. 1058.

Hieruit volgt door eliminatie van $\delta\Lambda$ en $\delta\Gamma$:

$$\frac{d^2\delta\theta}{dt^2}+\frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial\Lambda^2}\frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta^2}\delta\theta=-\frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial\Lambda^2}\frac{\partial R_2}{\partial\theta}-$$
$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial\Lambda}+\left[\frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial\Lambda^2}+4\frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial\Lambda\partial\Gamma}\right]\frac{\partial R_2}{\partial\Omega}.$$

De ontwikkeling van R_2 is deze (voor zoover de eerste orde in e' betreft):

$$R_2=\frac{m'e'}{a'}\left[\cos\Omega\sum_0^\infty{}_p\, B_p\cos p\,\theta+\sin\Omega\sum_1^\infty{}_p\, C_p\sin p\,\theta\right],$$

waar B_p en C_p functies van Λ en Γ zijn.

Uit mijn berekeningen over de storingsfunctie leid ik af:

$$\left[\frac{\partial R_2}{\partial\theta}\right]_{\theta=0}=-0.574\frac{m'e'}{a'}\sin\Omega.$$

Uit de oplossing van de differentiaalvergelijkingen voor $e'=0$ volgt: $\frac{d\Omega}{dt}=4\frac{\partial R_1}{\partial\Gamma}+\frac{\partial R_1}{\partial\Lambda}$; dus is de middelbare beweging van Ω, die men $\Delta\Omega$ noeme, van de orde m'. Hieruit, zoomede uit het feit dat $\frac{\partial^2 R_0}{\partial\Lambda^2}+4\frac{\partial^2 R_0}{\partial\Lambda\partial\Gamma}=0$, volgt dat slechts de term in $\frac{\partial R_2}{\partial\theta}$ in het rechterlid van de differentiaalvergelijking een bijdrage van de orde m' levert; de andere termen geven slechts bijdragen van de orde m'^2. De coëfficient van $\delta\theta$ in het linkerlid is het quadraat van de middelbare beweging van het libratie-argument en van de orde m', zoodat de deeler, die bij de integratie optreedt, van de orde m' is. Verwaarloost men in dezen deeler $\overline{\Delta\Omega^2}$, dat slechts van de orde m'^2 is, dan wordt de oplossing van de differentiaalvergelijking, indien men alleen den term in $\frac{\partial R_2}{\partial\theta}$ uit het rechterlid meeneemt:

$$\delta\theta=-\frac{1}{\frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta^2}}\frac{\partial R_2}{\partial\theta}.$$

Dit wordt volgens de numerieke waarden van de verschillende grootheden:

$$\delta\theta=+7.89\,e'\sin\Omega$$

en, verder voor e' nemende 0.0272 (Struve, l. c. pg. 172) en het resultaat in graden uitdrukkende:

$$\delta\theta=+12^\circ.3\sin\Omega.$$

Uit de waarnemingen volgt (Struve, l. c. pg. 290): $\delta\theta=+14.^\circ0$ sin Ω, zoodat de overeenstemming, gezien de vereenvoudigingen,

die men zich veroorloofd heeft bij de afleiding van de theoretische waarde, zeer bevredigend is.

De waarde van $\delta\Gamma$ volgt door een quadratuur uit de vergelijking:

$$\frac{d\delta\Gamma}{dt} = -4\frac{\partial R_2}{\partial\Omega},$$

terwijl $\delta\Lambda$ zonder eenige integratie volgt uit de vergelijking voor $\frac{d\delta\theta}{dt}$. Men ziet dadelijk, dat zoowel $\delta\Gamma$ als $\delta\Lambda$ van de orde nul in m' worden, daar $\Delta\Omega$ van de orde $m'$is.

Ten slotte moet men nog de waarde voor $\delta\Phi$ beschouwen. Deze volgt uit de vergelijking:

$$\frac{d\delta\Phi}{dt} = \frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial\Gamma\partial\Lambda}\delta\Lambda + \frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial\Gamma^2}\delta\Gamma + \frac{\partial R_2}{\partial\Gamma}.$$

Vermenigvuldigt men deze vergelijking met 4 en trekt van haar die voor $\frac{d\delta\theta}{dt}$ af, dan volgt er:

$$4\frac{d\delta\Phi}{dt} - \frac{d\delta\theta}{dt} = \left[4\frac{\partial^2 R_0}{\partial\Gamma\partial\Lambda} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial\Lambda^2}\right]\delta\Lambda + \left[4\frac{\partial^2 R_0}{\partial\Gamma^2} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial\Lambda\partial\Gamma}\right]\delta\Gamma +$$
$$+\left[4\frac{\partial^2 R_1}{\partial\Gamma\partial\Lambda} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial\Lambda^2}\right]\delta\Lambda + \left[4\frac{\partial^2 R_1}{\partial\Gamma^2} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial\Lambda\partial\Gamma}\right]\delta\Gamma + 4\frac{\partial R_2}{\partial\Gamma} + \frac{\partial R_2}{\partial\Lambda}.$$

Daar nu

$$4\frac{\partial^2 R_0}{\partial\Gamma\partial\Lambda} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial\Lambda^2} = 4\frac{\partial^2 R_0}{\partial\Gamma^2} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial\Lambda\partial\Gamma} = 0,$$

zoo ziet men, dat $\delta\Phi$ van de orde nul in m' wordt.

4. Uit de voorgaande ontwikkelingen ziet men, dat men goeden grond heeft te verwachten, dat de ontwikkeling van de oplossing naar machten van de excentriciteit van Titan, voor het geval dat men de vrije libratie van θ nul onderstelt, geen bezwaren zal opleveren. Dit resultaat is in strijd met de zienswijze van NEWCOMB in zijn bekende verhandeling: On the motion of Hyperion. A new case in Celestial Mechanics. Daarin toch komt hij tot de conclusie, dat de ontwikkeling naar machten van e' niet mogelijk is. De oorzaak van dit verschil in zienswijze ligt hierin, dat NEWCOMB deze ontwikkeling niet correct uitvoert; hij laat weg de termen in de differentiaalvergelijking, die ontstaan uit het deel der storingsfunctie, dat e' niet bevat, en vindt daardoor een deeler van de orde m'^2 inplaats van een van de orde m'. In dit opzicht blijkt dus de theorie van Hyperion niet moeilijk te zijn.

In mijn dissertatie hoop ik bovenstaande ontwikkelingen uit te breiden, zoowel door het rekening houden met de amplitude van de vrije libratie, als door het geven van nauwkeuriger resultaten, wat het aantal decimalen betreft.

Natuurkunde. — De Heer W. H. JULIUS biedt eene mededeeling aan namens de Heeren L. S. ORNSTEIN en F. ZERNIKE: „*De verstrooiing door onregelmatige straalbreking in de zon*".

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

Door het onderzoek van Dr. J. SPIJKERBOER in zijn proefschrift „*Verstrooiing van licht, en intensiteitsverdeeling over de zonneschijf*" heeft de onderstelling van JULIUS [1]), dat naast de molekulaire verstrooiing ook de verstrooiing door onregelmatige straalkromming tengevolge van toevallige gradienten der optische dichtheid een rol moet spelen bij het ontstaan van de lichtverdeeling over de zonneschijf, bevestiging gevonden.

In deze mededeeling hebben wij ons ten doel gesteld te doen zien, dat eene mathematische behandeling van het probleem der verstrooiing door straalkromming mogelijk is. Men kan n.l. eene integraalvergelijking voor dit verschijnsel opstellen en deze bij geschikte en plausible onderstellingen in een differentiaalvergelijking met passende randvoorwaarden omzetten. De integratie en de numerieke discussie zullen nader door Dr. SPIJKERBOER worden ter hand genomen.

Het hier behandelde probleem is een tegenhanger van het probleem der molekulaire verstrooiing in een vlakke gaslaag, dat door SCHWARZSCHILD is opgelost. De afleiding der integraalvergelijking heeft overeenkomst met zijn beschouwingen, doch in ons geval hebben wij het voordeel, dat de bijzondere aard van het probleem meebrengt dat er een differentiaalvergelijking uit gevonden kan worden, wat de mathematische discussie veel gemakkelijker maakt. Het komt ons voor, dat de onregelmatige reflectie en de onregelmatige dubbele breking op analoge wijze behandeld kunnen worden, hetgeen voor de theorie van de extinctie van vloeibare kristallen van beteekenis is.

In een medium, waarin toevallige gradiënten van den brekingsindex bestaan, zal een lichtstraal op onregelmatige wijze gekromd worden. Doorloopt een breede bundel evenwijdige stralen het medium, dan zullen de verschillende stralen op verschillende wijze gekromd worden. Is dus de bundel breed ten opzichte van gebieden van constanten brekingsindex, dan zal een bundel van aanvankelijk evenwijdige stralen pluimvormig gespreid worden. Wij beschouwen nu de werking van een volume-element op een bundel, die in gegeven richting loopt, en stellen ons voor dat de aard van de onregelmatigheid van den brekingsindex in het medium zóó is, dat na het doorloopen van het

[1]) W. H. JULIUS. Deze verslagen **18**, 195 (1909) en **22**, 64—75 (1913).

beschouwde element de spreiding der stralen slechts over een kleinen kegel heeft plaats gehad. Een kenmerkend verschil met de moleculaire verstrooiing is, dat bij de brekingsverstrooiing *niet* een groot deel van den bundel ongehinderd voortgaat en een klein deel naar *alle* zijden zich verspreidt, doch dat de hoofdbundel zelf voortdurend breeder wordt.

Mathematisch ingekleed dus als volgt: laat licht van gegeven richting over een lengte l gevolgd worden, dan zal, als die bundel een intensiteit één per vlakte-eenheid heeft, de intensiteit van het licht, dat in een kegeltje van de opening $d\omega$ gevonden wordt, waarvan de as een hoek α met de invalsrichting vormt, na het doorloopen van l voor te stellen zijn door een functie:

$$\chi(\alpha,l)\, d\omega \quad \text{of} \quad \chi(\alpha)\, d\omega$$

Door van een bijzonder beeld gebruik te maken kan men den vorm van de functie χ bepalen. Deze vorm zal analoog aan de foutenwet zijn[1]; zij is voor het volgende zonder belang. Wel belangrijk is de onderstelling dat de functie χ alleen voor zeer kleine waarden van α een merkbare waarde bezit.

Indien men de beteekenis van χ in aanmerking neemt ziet men onmiddellijk in dat

$$\int \chi(\alpha)\, d\omega = 1$$

moet zijn, waarbij de integraal, evenals steeds in 't vervolg, over den geheelen eenheidsbol genomen wordt.

Wij zullen nu de integraalvergelijkingen voor de stralingsintensiteit afleiden. Laat $f(x, y, z, \vartheta, \varphi)$ de intensiteit der straling in een punt (x, y, z) voorstellen, terwijl de richting gegeven is door de hoeken ϑ met de x-as en φ. Weten wij nu de straling in een punt (x, y, z), dan vragen wij die in een punt dat l in de richting van den straal ϑ, φ verder ligt. De coördinaten van dit punt zijn:

$$x + l\cos\vartheta \quad , \quad y + l\sin\vartheta\cos\varphi \quad , \quad z + l\sin\vartheta\sin\varphi$$

De intensiteit der straling is er dus voor te stellen door:

$$f(x + l\cos\vartheta \;,\; y + l\sin\vartheta\cos\varphi \;,\; z + l\sin\vartheta\sin\varphi \;,\; \vartheta \;,\; \varphi)$$

Deze intensiteit moet nu gelijk zijn aan de intensiteit die door straalkromming in de gegeven richting komt. Wanneer ϑ' en φ' de hoeken zijn die een straal in x, y, z bepalen, dan zal, als α de hoek van dezen straal met den straal ϑ, φ voorstelt, de intensiteit in het tweede punt ook door:

$$\int \chi(\alpha)\, f(x, y, z, \vartheta', \varphi')\, d\omega'$$

[1]) Voor kleine ϑ is de oplossing van de gevonden differentiaalvergelijking gelijk men gemakkelijk afleidt inderdaad de foutenwet.

gegeven worden, zoodat de gevraagde integraalvergelijking luidt:

$$f(x + l\cos\vartheta, \ldots) = \int \chi(\alpha) f(x, y, z, \vartheta', \varphi')\, d\omega'$$

Het is nu gemakkelijk deze integraalvergelijking in een differentiaalvergelijking om te zetten, als wij bedenken dat χ alleen voor kleine waarden van α merkbare waarden heeft. Het integratie-element $d\omega'$ drukken wij uit door α en den hoek ψ, die het vlak dooı (ϑ',φ') en (ϑ,φ) met dat door $(\vartheta\varphi)$ en de x as maakt. De waarde van $d\omega'$ is dan:

$$\sin\alpha\, d\alpha\, d\psi = \alpha\, d\alpha\, d\psi$$

Voor het verschil der hoeken ϑ en ϑ' en dat der hoeken φ en φ' vindt men tot in de tweede orde naar α gaande en na elementaire reductie:

$$\Delta\vartheta = \vartheta' - \vartheta = -\alpha\cos\psi + \tfrac{1}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\Delta\varphi^2 = -\alpha\cos\psi + \alpha^2\frac{\cot\vartheta\sin^2\psi}{2}$$

$$\Delta\varphi = \alpha\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}$$

Wij kunnen nu in de integraal $f(x,y,z,\vartheta',\varphi')$ naar $\Delta\vartheta$ en $\Delta\varphi$ ontwikkelen en krijgen op deze wijze:

$$f(x, y, z, \vartheta, \varphi)\int\chi(\alpha)\, d\omega' +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial\vartheta}\iint\Delta\vartheta\,\alpha\chi(\alpha)\, d\alpha\, d\psi + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\iint\Delta\psi\,\alpha\chi(\alpha)\, d\alpha\, d\psi +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}\iint(\Delta\vartheta)^2\,\alpha\chi(\alpha)\, d\alpha\, d\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\varphi}\iint\Delta\vartheta\,\Delta\varphi\,\alpha\chi(\alpha)\, d\alpha\, d\psi$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\iint(\Delta\varphi)^2\,\alpha\chi(\alpha)\, d\alpha\, d\psi$$

De eerste integraal is gelijk aan *een*, de tweede levert

$$\frac{\pi}{2}\cot\vartheta\int\alpha^3\chi(\alpha)\, d\alpha,$$

de derde is nul evenals de vijfde, terwijl de vierde en de zesde leveren:

$$\pi\int\alpha^3\chi(\alpha)\, d\alpha \quad \text{en} \quad \frac{\pi}{\sin^2\vartheta}\int\alpha^3\chi(\alpha)\, d\alpha$$

Nu kan men invoeren de middelbare waarde van α^2 volgens

$$\overline{\alpha^2} = \int\alpha^2\chi(\alpha)\, d\omega = 2\pi\int\alpha^3\chi(\alpha)\, d\alpha$$

Daarmede verkrijgen wij dan ten slotte, als wij ook nog de eerste term van het tweede lid met het eerste lid combineeren en naar l ontwikkelen, voor de differentiaalvergelijking der verstrooiing door

onregelmatige refractie:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\vartheta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\sin\vartheta\sin\varphi = \frac{\overline{\alpha^2}}{4l}\left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\vartheta} + \frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right)$$

Voor het practisch belangrijke geval dat f alleen van x en ϑ afhangt dus:

$$\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\overline{\alpha^2}}{4l}\left(\cos\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta} + \sin\vartheta\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}\right) \qquad ^{1}).$$

Voor dit geval zijn, zoo wij bij $x=0$ een laag hebben, die volgens de cosinuswet straalt en bij d een begrenzing waardoor geen instraling plaats heeft, de grensvoorwaarden:

$$f = c \qquad \text{voor:} \qquad x = 0 \qquad \cos\vartheta > 0$$

$$f = 0 \qquad \text{voor:} \qquad x = d \qquad \cos\vartheta < 0.$$

Voor $\vartheta = 0$ en alle waarden van x: f en $\frac{\partial f}{\partial\vartheta}$ continu, $\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} = 0$; voor $\cos\vartheta = 1$ of -1 $\frac{\partial f}{\partial\vartheta} = 0$.

Het verdient opmerking dat de verstrooiing door de grootheid $\frac{\overline{\alpha^2}}{l}$, dat is het gemiddelde spreidingskwadraat per lengte-eenheid, bepaald wordt. Deze grootheid is een specifieke voor het probleem, die niet van de lengte afhangt, daar toch α^2 verdubbelt als men de lengte l verdubbelt. De grootheid hangt samen met den aard der onregelmatigheden. Zij is een constante, die voor verschillende lagen van de zon nog verschillend kan zijn. De studie van de intensiteitsverdeeling over de zonneschijf zal ons de gemiddelde waarde van deze karakteristieke constante van de zon moeten doen kennen.

Utrecht, April 1917. *Instituut voor Theoretische Natuurkunde.*

---

1) Voor het vlakke probleem

$$\cos\vartheta\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\overline{\alpha^2}}{4l}\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}.$$

Natuurkunde. — De Heer W. H. JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer H. C. BURGER: „*Over de theorie der* BROWN'*sche beweging en de proeven van* BRILLOUIN".

(Mede aangeboden door den Heer VAN DER STOK).

Het doel dezer onderzoeking is tweeledig, namelijk:

1°. Het geven van een strenge afleiding van eenige bekende formules der BROWN'sche beweging, met en zonder uitwendige kracht.

2°. Het opsporen der grensconditie aan een vasten wand en een verklaring der experimenteele resultaten, die hierop betrekking hebben.

§ 1. Wanneer een materieel deeltje gesuspendeerd is in een vloeistof, kan men vragen naar de kans dat het, tengevolge van de BROWN'sche beweging in den tijd t in de X-richting een afstand zal afleggen tusschen x en $x + dx$. Deze kans is bepaald door v. SMOLUCHOWSKI [1]) op grond van het volgende beeld. Onderstel dat het deeltje telkens na een tijd τ een afstand δ aflegt, met gelijke waarschijnlijkheid naar rechts of links. Laat men nu δ en τ nul worden, doch houdt $\frac{\delta^2}{2\tau} = D$ eindig, dan vindt men voor de gezochte kans:

$$f(x,t)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\, dx. \quad \ldots\ldots \quad (I^a)$$

Uit deze formule vindt men voor het gemiddelde quadraat van de verschuiving:

$$\overline{x^2} = 2Dt.$$

Ook door nader op het mechanisme der verschijnselen in te gaan, kan men deze laatste vergelijking vinden, waarin dan D blijkt te zijn:

$$D = \frac{RT}{N}\frac{1}{6\pi\,\mu a}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I^b)$$

waarin R, T en N de gebruikelijke beteekenis hebben, μ de wrijvingscoëfficiënt der vloeistof is en a de straal van het deeltje.

We kunnen nu echter (I^a) op volmaakt strenge wijze afleiden zonder van eenig beeld gebruik te maken, waarbij dan weliswaar de constante D geheel onbepaald blijft en tevens kunnen we aantoonen, dat een oneindig aantal beelden tot dezelfde eindvergelijking voeren. Men kan nl., gelijk ook reeds door v. SMOLUCHOWSKI [2]) is aangetoond, op

[1]) Vorträge über die Kin. Theorie der Materie p. 101, 1914 en Bull. Acad. Cracovie p. 419, 1913.

[2]) Verg. M. v. SMOLUCHOWSKI. Ueber BROWN'sche Molecularbeweging etc. Ann. der Physik. 48 p. 1103, 1915.

de volgende wijze tot een integraalvergelijking voor $f(x,t)$ komen:

Wanneer het deeltje in den tijd t een afstand heeft afgelegd tusschen a en $a + da$, kan dit zoo geschied zijn dat:

in den tijd t_1 een afstand is afgelegd tusschen x_1 en $x_1 + dx_1$
„ „ „ t_2 „ „ „ „ „ x_2 „ $x_2 + dx_2$
. . . .
„ „ „ t_n „ „ „ „ „ x_n „ $x_n + dx_n$,

waarbij $\Sigma t_\nu = t$ en Σx_ν tusschen a en $a + da$. Indien we onderstellen, dat de tijden t_ν niet al te klein zijn, zoodat het aantal botsingen in t_ν groot genoeg is om het toepassen van waarschijnlijkheidsbeschouwingen toe te laten, is de kans op dit gebeuren gegeven door:

$$f(x_1, t_1)\, f(x_2, t_2) \ldots f(x_n, t_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

waarin f de gezochte functie is. Dit product nu, geïntegreerd over alle waarden van $x_1 \ldots x_n$ waarvoor Σx_ν tusschen a en $a + da$ ligt, moet de kans geven, dat het deeltje in den tijd t een afstand heeft afgelegd tusschen a en $a + da$, dus $f(a, t)\, da$, waarin deze f dezelfde gedaante zal moeten hebben als de „elementaire” f uit genoemd product, indien slechts t_ν niet te klein is.

We krijgen dus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, t_1) \ldots f(x_n, t_n)\, dx_1 \ldots dx_n \,.\, A = f(a,t)\, da \quad . \quad . \quad . \quad (II^a)$$

Hierin is A een discontinuïteitsfactor, die voldoet aan de voorwaarden:

$$A = 0 \quad \text{als} \quad \Sigma x_\nu < a \quad \text{of} \quad \Sigma x_\nu > a + da$$
$$A = 1 \quad „ \quad a < \Sigma x_\nu < a + da.$$

Voor $n = 2$ wordt (II^a),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t_1)\, f(a - x, t_2)\, dx = f(a, t_1 + t_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II^b)$$

Gemakkelijk ziet men ook, dat omgekeerd (II^a) uit (II^b) volgt, zoodat ieder dezer vergelijkingen als basis voor verdere beschouwingen kan dienen.

We zullen nu op verschillende wijzen laten zien, hoe men uit de vergelijkingen (II) de formule (I^a) kan afleiden.

I. Kies in (II^a) de tijden $t_1 \ldots t_n$ klein, dan is n groot [1]).

---

[1]) Wil men, dat in het eerste lid van (II^a) $f(x, t)$ de gevraagde functie is, dan moet t_ν grooter zijn dan zekere zeer kleine tijd, die door EINSTEIN voor deeltjes van 1 μ straal is geschat op 10^{-7} sec. (Ann. d. Phys. 19. 371, 1906).

In verband met de physische beteekenis van $f(x, t)$ weet men, dat de functie f even is in x en voor kleine t slechts van nul verschilt voor kleine x. Uit het bewijs der foutenwet, zooals dat gegeven is door BESSEL [1]) weet men nu, dat onder deze omstandigheden een vorm, die gebouwd is als het eerste lid van (II^a) voor groote n wordt:

$$f(a,t)\,da = \varphi e^{\psi a^2}\,da\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

waarbij φ en ψ nog onbekende functies van t zijn. Om deze te bepalen substitueert men (III) in (II^b). Dit geeft na integratie:

$$\frac{\varphi(t_1)\varphi(t_2)\sqrt{\pi}}{\sqrt{\{\psi(t_1)+\psi(t_2)\}}}\, e^{-a^2\frac{\psi(t_1)\psi(t_2)}{\psi(t_1)+\psi(t_2)}} = \varphi\,(t_1 + t_2)\, e^{-a^2\psi(t_1+t_2)}$$

Hieruit volgt:

$$\psi\,(t_1 + t_2) = \frac{\psi(t_1)\psi(t_2)}{\psi(t_1)+\psi(t_2)} \quad \text{en} \quad \varphi\,(t_1 + t_2) = \frac{\varphi(t_1)\varphi(t_2)\sqrt{\pi}}{\sqrt{\{\psi(t_1)+\psi(t_2)\}}}\,.$$

De oplossing der eerste vergelijking is: $\psi\,(t) = \frac{c}{t}$ [2]).

Dit, in de vergelijking voor φ gezet, geeft:

$$\varphi\,(t_1 + t_2) = \frac{\varphi(t_1)\varphi(t_2)\sqrt{\pi t_1 t_2}}{\sqrt{c(t_1+t_2)}}$$

Deze functionaalvergelijking heeft tot oplossing:

$$\varphi\,(t) = \sqrt{\frac{c}{\pi t}}\, e^{c't} \quad [3])$$

Zet men dit in (III) en bedenkt nog dat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(a,t)\,da = 1\,,$$

dan blijkt $c' = 0$ te zijn en vindt men:

$$f(a,t) = \sqrt{\frac{c}{\pi t}}\, e^{-\frac{a^2 c}{t}}$$

---

[1]) Astr. Nachr. 15 (1838) p. 369 = Ges. Abh. 2. p. 372.

[2]) Stel

$$\psi\,(t) = \frac{k(t)}{t} \quad \text{dan is} \quad \frac{k(t_1+t_2)}{t_1+t_2} = \frac{k(t_1)+k(t_2)}{t_2 k(t_1)+t_1 k(t_2)}\,.$$

Stelt men hierin achtereenvolgens $t_2 = t_1, 2t_1, 3t_1, \ldots$, dan blijkt $k(t_1) = k(2t_1) = \ldots$ dus is $k(t)$ een constante.

[3]) Stel nl. $\varphi(t)\,\sqrt{t} = \sqrt{\frac{c}{\pi}}\, L\,(t)$, dan is $L(t_1 + t_2) = L(t_1)\,L(t_2)$ of $L(t) = e^{c't}$ waarin $c' =$ constant.

Stelt men hierin nog: $c = \frac{1}{4D}$, waarin D een nieuwe constante is, dan vindt men juist (I^a)[1].

II. Men kan uit (II^b) een differentiaalvergelijking voor $f(a, t)$ afleiden. Ontwikkel nl. in het eerste lid $f(a-x, t_2)$ naar x en in het tweede lid $f(a, t_1 + t_2)$ naar t_1 dan vindt men:

$$f(a,t_2) + \frac{\partial^2 f(a,t_2)}{2!\partial a^2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,t_1)\, dx + \ldots = f(a,t_2) + t_1 \frac{\partial f(a,t_2)}{\partial t_2} + \ldots,$$

wanneer men bedenkt dat:

---

[1]) Men kan dit bewijs nog iets anders geven, nl. door uitsluitend van (IIa) gebruik te maken. Neem in (IIa) $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = \tau$ en kies n groot.

Zooals bekend is uit het genoemde bewijs van BESSEL (l. c.) wordt dan:

$$f(a,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{\chi(\lambda)\}^n \cos a\lambda\, dt\,,$$

waarin:

$$\chi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\tau) \cos x\lambda\, dx\,.$$

Ontwikkel hierin $\cos x\lambda$, dan komt er:

$$\chi(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,\tau)\, dx + \ldots$$

Als τ klein is, nemen de coefficiënten der machten van λ snel af en zijn klein dus is:

$$\chi(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,\tau)\, dx = 1 - p_2\lambda^2$$

en:

$$\{\chi(\lambda)\}^n = (1 - p_2\lambda^2)_n = e^{-p_2 n\lambda^2}\,,$$

daar p_2 klein en n groot is. Ten slotte wordt:

$$f(a,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos a\,\lambda\, e^{-p_2 n\lambda^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi p_2 n}}\, e^{-\frac{a^2}{4p_2 n}}$$

Nu is $n\tau = t$. Stelt men nog $\frac{p_2}{\tau} = D$ dan vindt men weer de formule (Ia). Hierin is D niet van τ afhankelijk, daar uit de gevonden gedaante van f volgt, dat p_2 met τ evenredig is.

Uit dit bewijs ziet men, dat steeds dezelfde $f(a,t)$ wordt gevonden, welke „elementaire" f men ook in het eerste lid van (IIa) kiest. Echter hangt dan de waarde van D van den vorm dezer functie af.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\, dx = 1 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2\varkappa+1} f(x,t)\, dx = 0 .$$

Kiest men hierin t_1 klein genoeg om volgende termen te mogen verwaarloozen en stelt men nog:

$$\frac{1}{2t_1}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,t_1)\, dx = D , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV^a)$$

dan krijgt men de vergelijking:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV^b)$$

Daar hierin $\frac{\partial f}{\partial t}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ functie's van a en t_2 zijn, zal D geen t_1 kunnen bevatten en zal dus een constante zijn [1])

Merkwaardig is, dat men hier de diffusie-vergelijking vindt als direct gevolg van de integraalvergelijking (IIb), terwijl (IVa) de diffusiecoëfficiënt onmiddelijk met het gemiddelde quadraat van de uitwijking in verband brengt.

Deze vergelijking (IVb) moet opgelost worden zonder grens-conditie's en met de beginconditie's:

$$1^{\circ} \int_{-\infty}^{\infty} f\, da = 1 \quad , \quad 2^{\circ}.\ f\ (a, o) = 0 \text{ behalve voor } a = 0.$$

Dit is een bekend probleem van diffusie of warmtegeleiding, waarvan de oplossing wordt gegeven door (Ia).

De exponentiëele functie uit (Ia) voldoet aan de integraalvergelijking (IIa) voor willekeurige n en t_ν. Wanneer men echter voor de „elementaire" funtie $f(x_\nu)$ in het eerste lid een willekeurige functie zet, die slechts voldoet aan:

1° $f(x_\nu)$ is even.

2° $f(x_\nu)$ verschilt slechts merkbaar van nul voor kleine waarden van x_ν,

zal de integraal in het eerste lid van (IIa) voor groote n steeds dezelfde $f(a, t)$ opleveren [2]). Zoodoende is begrijpelijk, dat het eenvoudige beeld der Brown'sche beweging, dat gegeven is door Smoluchowski een juist eindresultaat oplevert, ondanks het feit, dat het de werkelijke beweging zeer slecht benadert.

[1]) Wanneer men de oplossing van (IVb) d. i. (Ia) in (IVa) stelt, wordt D werkelijk een constante, zooals bij de oplossing van (IVb) ondersteld is.

[2]) Zie noot 1, blz. 1485.

Kiest men een ander beeld, d. w. z. een anderen vorm voor de „elementaire" functie $f(x_\nu)$, dan krijgt men dezelfde formule (Ia), echter hangt dan D op andere wijze met de keuze van $f(x_\nu)$ samen [1]). Alleen wanneer de „elementaire" functie de gezochte $f(x_\nu, t_\nu)$ is, zal D een onbepaalde constante zijn, die door den aard der Brown'sche beweging bepaald wordt.

§ 2. In het voorafgaande is steeds ondersteld, dat de Brown'sche beweging niet door een uitwendige kracht beïnvloed wordt. Een gevolg hiervan was. dat we om redenen van symmetrie mochten aannemen dat $f(x, t)$ even was in x. Werkt echter een kracht op de deeltjes, dan zal de kans op een bepaalde verplaatsing geen even functie van die verplaatsing meer zijn. Ook zal deze kans niet alleen van de verplaatsing afhangen, maar ook van het uitgangspunt. We zullen eerst uitsluitend verplaatsingen in de X-richting beschouwen. Noem de abcis van het deeltje op den tijd $t = 0$ x, dan kunnen we de kans, dat deze op den tijd t tusschen p en $p + dp$ ligt, voorstellen door $f(x, p, t)\, dp$. Gemakkelijk ziet men in, dat ook deze functie f aan een integraalvergelijking voldoet, n.l.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, p, t_1) f(p, a, t_2)\, dp = f(x, a, t_1 + t_2) \;{}^{2)} \; . \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

Uit deze integraalvergelijking heeft v. SMOLUCHOWSKI [3]) voor het geval van een quasi-elastische kracht door herhaalde integratie f bepaald, doch hij merkt daarbij op, dat deze weg slechts bruikbaar is bij een eenvoudige onderstelling omtrent de kracht ψ en dat het in het algemeen verkieselijk is f te bepalen uit een gegeneraliseerde diffusie-vergelijking. Deze vergelijking leidt v. S. af op een meer phenomenologische wijze zonder daarbij van (V) gebruik te maken. We zullen nu laten zien hoe deze vergelijking uit (V) is af te leiden, wanneer we gebruik maken van enkele onderstellingen, die ook v. S. bezigt bij het bepalen van f door herhaalde integratie.

---

[1]) Onderstellen we bijv. dat telkens na een tijd τ een verplaatsing δ kan plaats hebben, óf naar rechts, óf naar links ieder met een kans $\frac{1-\varkappa}{2}$, zoodat de kans om te blijven liggen $\varkappa$ is. Hierdoor is de vorm van $f(x_\nu)$ bepaald en vindt men voor D:

$$D = \frac{p_2}{\tau} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x_\nu^2 f(x_\nu)\, dx_\nu = \frac{\delta^2 (1 - \varkappa)}{2\tau} .$$

[2]) Zie ook M. SMOLUCHOWSKI Ann. d. Phys 48 p. 1103, 1915.

[3]) Ann. d. Phys. 48 p. 1104, 1915.

Als we nl. in (V) t_2 een zeer kleine waarde geven, is $f\,(p, a, t_2)$ in eerste benadering een even functe φ van de verschuiving $p-a$ [1]), daar voor kleine tijden de invloed der uitwendige kracht klein is t. o. v. dien van de Brown'sche beweging, Om nu den invloed der kracht in rekening te brengen, bepalen we de verplaatsing δ, die het deeltje, uitgaande van p, zou afleggen als er geen Brown'sche beweging bestond. De verplaatsing tengevolge van de Brown'sche beweging in den tijd t_2, is dus $p+\delta-a$, als we onderstellen, dat de beide verplaatsingen zonder meer gesuperponeerd worden als t_2 klein is.

Voor kleine t_2 kunnen we dus $f\,(p,\ a,\ t_2)$ vervangen door $\varphi\,(p+\delta-a, t_2)$, waarbij φ een functie is, die even is in haar eerste argument. Daar de invloed der kracht geheel door de grootheid δ verantwoord is, heeft φ, die op de ongestoorde Brown'sche beweging betrekking heeft, de volgende eigenschappen:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\,(\xi,t)\,d\xi=1 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\,\varphi\,(\xi,t)\,d\xi=2Dt. \quad . \quad . \quad . \quad (VI)$$

Om δ te berekenen maken we gebruik van het feit, dat kleine deeltjes onder de werking van een constante kracht een weg afleggen, die evenredig is met den tijd, wanneer we den invloed der Brown'sche beweging niet in aanmerking nemen. Daar nu echter de kracht $\psi\ (x)$ functie van x is, zal de afgelegde weg δ een functie van t_2 zijn, die ook hoogere machten van t_2 bevat, als ze naar opklimmende machten van den tijd ontwikkeld wordt. Daar we nu t_2 klein kiezen, zoodat we overal slechts de eerste macht behouden, kunnen we voor δ nemen:

$$\delta=\beta t_2\,\psi\,(p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VII)$$

Dus wordt nu (V):

$$\int_{-\infty}^{\infty}f\,(x, p, t_1)\,\varphi\,\{p-a+\beta t_2\,\psi\,(p), t_2\}\,dp=f\,(x, a, t_1+t_2).$$

Stelt men hierin $p=a+\xi$, dan kunnen f en φ ontwikkeld worden als volgt:

$$f\,(x, a+\xi, t_1)=f\,(x, a, t_1)+\xi\frac{\partial f}{\partial a}+\tfrac{1}{2}\,\xi^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}+\ldots$$

---

[1]) Hoewel we den vorm dezer functie niet noodig hebben, kunnen we toch opmerken, dat deze zal zijn:

$$\varphi\,(p-a, t_2)=\frac{1}{2\sqrt{\pi D t_2}}\,e^{-\frac{(p-a)^2}{4Dt_2}}$$

$$\varphi\{p-a+\beta t^2\psi(a+\xi),\ t_2\}=\varphi(\xi.t_2)+\left\{\beta\psi(a)+\beta\xi\frac{\partial\psi(a)}{\partial a}\right\}\frac{\partial\varphi(\xi,t_2)}{\partial\xi}t_2+\ldots.$$

Ook het 2° lid van (V) wordt ontwikkeld:

$$f(x,a,t_1+t_2)=f(x,a,t_1)+t_2\frac{\partial f(x,a,t_1)}{\partial t_1}+\ldots$$

Na vermenigvuldiging en uitvoeren der integratie vinden we, gebruik makende van (VI), wanneer we de termen met t_2 alleen behouden en die met hoogere machten laten vervallen:

$$\frac{\partial f(x,a,t_1)}{\partial t_1}=D\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}-\beta\psi(a)\frac{\partial f}{\partial a}-\beta f\frac{\partial\psi}{\partial a}$$

of

$$\frac{\partial f}{\partial t}=D\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}-\beta\frac{\partial}{\partial a}(\psi f)\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (VIII)$$

Dit is de gegeneraliseerde diffusie-vergelijking die v. SMOLUCHOWSKI gebruikt, nu echter afgeleid uit de integraalvergelijking (V).

Indien men zich niet beperkt tot het probleem van één afmeting, maar het driedimensionale geval onderzoekt, zal de kans, dat een deeltje met coördinaten x, y, z na een tijd t coördinaten heeft tusschen p, q, r en $p+dp$, $q+dq$, $r+dr$ kunnen worden voorgesteld door $f(x,y,z,p,q,r,t)\,dp\,dq\,dr$.

Men ziet gemakkelijk in, dat deze functie voldoet aan de volgende integraalvergelijking:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z,p,q,r,t_1)\,f(p,q,r,a,b,c,t_2)\,dp\,dq\,dr=f(x,y,z,a,b,c,t_1+t_2)\ .\ .\ (IX)$$

Als we de kracht, die nu een vector is, weer ψ noemen, vinden we op overeenkomstige wijze als boven voor f de diffusie-vergelijking:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=D\,\Delta f-\beta\,div\,(\psi f)\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (X)$$

De operatie's Δ en div. hebben hierbij betrekking op het tweede drietal onafhankelijk veranderlijken in f, waarvan ook ψ afhangt.

De juistheid van (X) blijkt ook gemakkelijk langs anderen weg.

Met behulp van (VIII) kan men het volgende probleem oplossen: Het vlak $x=0$ wordt gevormd door een vasten wand, die op een deeltje, in de bij positieve x gelegen vloeistof een afstootende kracht uitgeoefent, die merkbaar wordt in een punt A op kleinen afstand van den wand, naar den wand toe grooter wordt, om bij $x=0$ oneindig te worden en dit voor negatieve x te blijven. [1])

[1]) Een wand met de beschreven eigenschappen zal de er tegen botsende deeltjes reflecteeren, zonder dat er ooit een aan blijft kleven.

Wat is de kans, dat een deeltje, waarvoor op $t=0$ $x=x_0$, op den tijd t een abcis heeft tusschen x en $x+dx$?

Voor dit geval wordt (VIII):

$$\frac{\partial f}{\partial t}=D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial}{\partial x}(\psi f),$$

waarin $f(x_0, x, t)\,dx$ de gevraagde kans is.

Deze vergelijking naar x geïntegreerd van een punt B met negatieve x tot A geeft:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_B^A f\,dx = D\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_B\right\}-\beta\left\{(f\psi)_A-(f\psi)_B\right\}.$$

Daar in A $\psi=0$ en in B f en $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ zeer sterk nul zullen zijn door de groote afstootende kracht, wordt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_B^A f\,dx = D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A.$$

Laat men nu de dikte der laag, waarin merkbare krachten werken, zeer klein worden, dan verdwijnt $\int_B^A f\,dx$ voor alle tijden, daar f in deze laag zeker niet oneindig zal worden. Wij krijgen dus aan den wand:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A=0.$$ [1]

Hoe hieruit f kan worden bepaald, behoeft niet nader te worden uiteengezet.

§ 3. Terwijl de grensconditie aan een reflecteerenden wand gemakkelijk uit (VIII) kan worden afgeleid, en dit misschien ook voor een adsorbeerenden wand mogelijk is, lijkt het in dit laatste geval toch eenvoudiger om een anderen weg in te slaan.

We nemen aan, dat de adsorbeerende wand een deeltje, dat er tegenaan botst, *kan* vasthouden en dat dan zulk een geadsorbeerd deeltje nooit weer loskomt. Deze eigenschap is bij vaste wanden onder verschillende omstandigheden waar te nemen.

Denkt men zich een deeltje, dat zich op den tijd $t=0$ op een afstand x van den bij $x=0$ gelegen wand bevindt. Na een tijd t kan het deeltje dan geadsorbeerd zijn door den wand of nog vrij

[1]) Verg. M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. 17 p. 587, 1916.

zijn. Het ligt dus voor de hand om in dit geval de twee volgende kansfunctie's in te voeren:

1°. de kans, dat het genoemde deeltje op den tijd t een afstand van den wand heeft tusschen p en $p+dp$: $f(x, p, t)\,dp$.

2°. de kans, dat het op den tijd t door den wand geadsorbeerd is: $\chi(x, t)$.

Daar een deeltje, dat op den tijd t_1+t_2 niet geadsorbeerd is, ook op den tijd t_1 vrij moet zijn, zal f voldoen aan de integraalvergelijking:

$$\int_0^\infty f(x, p, t_1)\, f(p, a, t_2)\, dp = f(x, a, t_1+t_2) \quad . \quad . \quad . \quad (XI)$$

Verder kan men een simultane integraalvergelijking voor f en χ krijgen door op te merken, dat de kans $\chi(x, t_1+t_2)$ bestaat uit twee deelen, nl. uit de kans, dat het deeltje reeds op den tijd t_1 geadsorbeerd was en de kans, dat het zich op den tijd t_1 ergens in de vloeistof bevond en in verloop van den tijd t_2 door den wand is geadsorbeerd. Dit voert tot de vergelijking:

$$\chi(x, t_1+t_2) = \chi(x, t_1) + \int_0^\infty f(x, p, t_1)\, \chi(p, t_2)\, dp \quad , \quad . \quad (XII)$$

Daar het deeltje na den tijd t zich ergens moet bevinden, hebben we eindelijk nog als derde vergelijking voor f en χ:

$$\int_0^\infty f(x, p, t)\, dp + \chi(x, t) = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XIII)$$

Evenals in § 2 uit (V) kunnen we hier uit (XI) een differentiaalvergelijking voor f afleiden, echter met dit verschil, dat nu in de vloeistof de uitwendige kracht $\psi = 0$ [1]).

In de vloeistof voldoet dus $f(x, p, t)$ aan de vergelijking:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\, \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XIV)$$

Om echter f te bepalen hebben we een grensvoorwaarde noodig. Deze kan gevonden worden uit (XII), (XIII) en (XIV).

Schrijven we nl. voor (XII):

$$\frac{\chi(x,t_1+t_2)-\chi(x,t_1)}{t_2} = \frac{1}{t_2}\int_0^\infty f(x,p,t_1)\, \chi(p,t_2)\, dp \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (XII^a)$$

---

[1]) Met de krachten die de wand op het deeltje uitoefent, wordt rekening gehouden door de functie χ.

en laten t_2 zeer klein worden, dan wordt het tweede lid van (XII^a):

$$f(x,o,t_1) \cdot \frac{1}{t_2}\int_0^\infty \chi(p,t_2)\, dp\,,$$

daar uit de beteekenis van χ (p,t) volgt, dat deze functie voor kleine t alleen van nul verschilt als ook p klein is. Daar nu de limiet in het eerste lid bestaat en eindig is, zal dit ook het geval zijn met de limiet van het tweede lid en wordt dus:

$$\underset{t_2=0}{Lim}\frac{1}{t_2}\int_0^\infty \chi(p,t_2)\, dp = \int_0^\infty \left\{\frac{\partial\chi(p,t_2)}{\partial t_2}\right\}_{t_2=0} dp = \varkappa\,,$$

waarin $\varkappa$ een constante is.

Uit ($XIIa$) volgt dus:

$$\frac{\partial\chi(x,t_1)}{\partial t_1} = \varkappa f(x,o,t_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XV)$$

Wanneer men nu (XIV) naar p van nul tot oneindig integreert. vindt men:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty f(x,p,t)\;dp = -D\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p=0}.$$

In verband met (XIII) en (XV) geeft dit de grensconditie:

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p=0} = \varkappa f_{p=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XVI)$$

Uit (XIV) is nu met behulp van deze randvoorwaarde en de beginvoorwaarde f te bepalen. Is f gevonden, dan volgt χ uit (XIII).

Daar de in het voorafgaande gebruikte functie's f en χ kansen voorstellen, kan men de daar verkregen resultaten slechts aan de ervaring toetsen door het aantal waarnemingen zeer groot te maken. Dit wordt nu gemakkelijk bereikt door niet één, doch zeer veel deeltjes in de vloeistof te brengen. Hoewel men dan niet kan zeggen hoeveel deeltjes na den tijd t door den wand geadsorbeerd zullen zijn, kan men toch het waarschijnlijkste aantal berekenen, waarvan het ware aantal des te minder zal afwijken, naarmate men met meer deeltjes werkt.

Men denke zich een cylindrische ruimte, slechts aan een zijde begrensd door den bij $x=0$ gelegen vlakken wand. In deze ruimte zijn op den tijd $t=0$ een groot aantal der gelijke deeltjes homogeen verdeeld, zoodat het aantal deeltjes, waarvan de afstand tot den wand tusschen x en $x+dx$ ligt, $n_0 dx$ bedraagt. We vragen nu naar

het waarschijnlijkste aantal deeltjes, die op den tijd t door den wand geadsorbeerd zijn.

Van de $n_0 dx$ deeltjes op een afstand tusschen x en $x+dx$ van den wand zullen na den tijd t waarschijnlijk $n_0\chi(x,t)dx$ aan den wand vast zitten, dus in totaal zijn na den tijd t $n_t = n_0 \int\limits_0^\infty \chi(x,t)dx$ deeltjes geadsorbeerd.

Om dit aantal te berekenen behoeven we f niet te kennen. Daar nl. de beginconditie voor f minder eenvoudig is, voeren we een nieuwe functie in:

$$F(p,t) = n_0 \int\limits_0^\infty f(x,p,t)\, dx \text{ [1]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XVII)$$

Door (XIV) en (XVI) naar x van nul tot oneindig te integreeren blijkt dat $F(p,t)$ aan dezelfde differentiaal-vergelijking en grensconditie voldoet als $f(x,p,t)$ beschouwd als functie van p en t. Verder volgt uit (XIII) en (XVII) de beginconditie $F(p,0) = n_0$.

De oplossing der differentiaal-vergelijking voor F, in verband met begin- en randvoorwaarden, is:

$$F(p,t) = n_0\, \Theta\left(\frac{p}{2\sqrt{Dt}}\right) + n_0 e^{\frac{\varkappa^2 t}{D} + \frac{\varkappa}{D}p} \left\{1 - \Theta\left(\frac{p}{2\sqrt{Dt}} + \varkappa\sqrt{\frac{t}{D}}\right)\right\} \text{ [2]} \quad (XVIII)$$

waarin:

$$\Theta(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^u e^{-u^2}\, du\,.$$

Het in den tijd t geadsorbeerde aantal deeltjes volgt uit (XV):

$$n_t = n_0 \int\limits_0^\infty \chi(x,t)\, dx = n_0 \varkappa \int\limits_0^t dt \int\limits_0^\infty f(x,o,t)\, dx = \varkappa \int\limits_0^t F(o,t)\, dt\,,$$

wat na uitvoering der integratie oplevert:

$$n_t = -\frac{D}{\varkappa}\, e^{\frac{\varkappa^2 t}{D}}\, \Theta\left(\varkappa\sqrt{\frac{t}{D}}\right) + 2\sqrt{\frac{Dt}{\pi}} + \frac{D}{\varkappa}\left(e^{\frac{\varkappa^2 t}{D}} - 1\right) \quad (XIX)$$

Hiermee is het probleem opgelost, dat is genoemd door v. SMOLUCHOWSKI [3]) naar aanleiding van het feit, dat zijn theorie niet in

---

[1]) $F(p,t)$ is de concentratie der deeltjes op den tijd t op een afstand p van den wand.

[2]) H. WEBER, Die Part. Diff. Gl. der Math. Phys. II, p. 95.

[3]) M. v. SMOLUCHOWSKI, Phys. Zeitschr. 17, p. 570, 1916.

overeenstemming was met de experimenteele resultaten van BRILLOUIN [1]). De laatste heeft gewerkt met gummigutt deeltjes in een mengsel van glycerine en water. Het aantal deeltjes, dat door den wand geadsorbeerd was, kon hij door uittellen eener microfotografische opname bepalen.

Terwijl nu BRILLOUIN tot het resultaat komt, dat zijn waarnemingen in overeenstemming met de theorie zijn, heeft v. SMOLUCHOWSKI op de onjuistheid van zijn wijze van berekenen gewezen en deze door een betere vervangen. Daarbij onderstelt hij echter, dat ieder deeltje, dat tegen den wand botst, blijft kleven, en lost verder het probleem op met het zeer schematische beeld der Brown'sche beweging, dat in § 1 is genoemd. Het resultaat dezer berekening stemt zeer slecht met de waarneming overeen en v. SMOLUCHOWSKI onderstelt, dat dit een gevolg is van het feit, dat een tegen den wand botsend deeltje niet direct blijft kleven, maar gemiddeld meerdere malen moet botsen voor het geadsorbeerd wordt. Dit zou dus neerkomen op een wijziging van de grensconditie. Zooals nu v. SMOLUCHOWSKI [2]) aantoont, vindt men de door hem gegeven oplossing van het probleem uit de diffusie-vergelijking, als men daarbij als grensconditie $F(o,t)=0$ gebruikt, terwijl (XIX) is afgeleid met de algemeene randvoorwaarde :

$$D\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{p=0} = \varkappa F_{p=0} \,.$$

We kunnen dus verwachten door geschikte keuze van $\varkappa$ een betere overeenstemming met de experimenten van BRILLOUIN te krijgen.

Om te kunnen beoordeelen in hoeverre dit het geval is, berekenen we uit de door BRILLOUIN verschafte gegevens n_0 en D, deze laatste met behulp van $(1b)$. Wanneer we nu een bepaalde waarde van $\varkappa$ kiezen kunnen we n_t als functie van t grafisch voorstellen. Dit ziet men uitgevoerd in fig. 1, waarin de abscis het aantal geadsorbeerde deeltjes n_t voorstelt en de ordinaat, in overeenstemming met BRILLOUIN, de wortel uit den in uren uitgedrukten tijd. Verder staan bij de krommen, om practische redenen, niet de waarden van $\varkappa$, maar die van $\alpha = \dfrac{\varkappa}{\sqrt{D}}$

Voor $\varkappa = \infty$ $(\alpha = \infty)$ krijgt men een rechte lijn, die overeenkomt met de theorie van v. SMOLUCHOWSKI. Men ziet, dat de door kruisjes aangegeven waarnemingen van BRILLOUIN zich hierbij in het geheel niet aansluiten. Kleinere waarden van $\varkappa$ of α geven krommen,

[1]) L. BRILLOUIN, Ann. Chim. Phys. 27, p. 412, 1912.

[2]) M. v. SMOLUCHOWSKI Phys. Zeitschr. 17, p. 585, 1916.

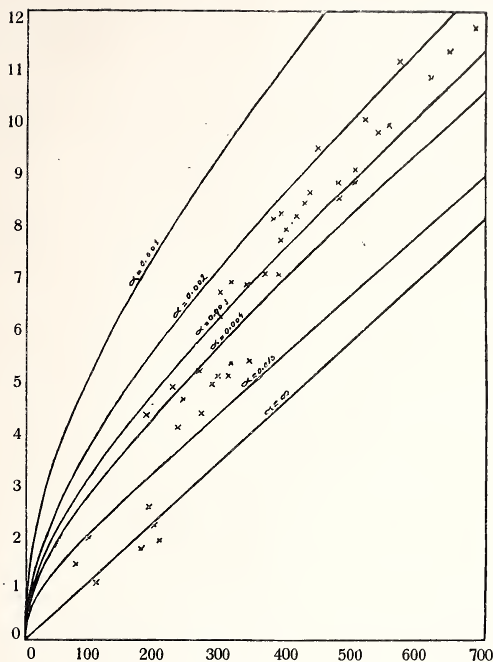


Fig. 1.

die in beter overeenstemming met de waarnemingen zijn, ofschoon geen der krommen een geheel bevredigende aansluiting oplevert. Waarschijnlijk komt $\alpha = 0.003$ ($\varkappa = 1.5 \times 10^{-8}$) het dichtst bij de waarheid, als men bedenkt, dat de waarnemingen na korte tijden het minste vertrouwen verdienen. Dan zal n.l. de invloed van kleine temperatuurverschillen in de vloeistof nog te merken zijn, die na langeren tijd verdwijnt. Ook omdat we slechts het waarschijnlijkste aantal theoretisch kunnen bepalen hebben de waarnemingen na langeren tijd, die grooter aantallen opleveren, meer waarde.

Toch is het niet te ontkennen, dat het schijnt alsof hier een systematische fout aanwezig is. Mogelijk is deze te zoeken in het niet volkomen gelijk zijn der deeltjes of ook in een langzame ver-

andering der electrische dubbellagen aan deeltjes en wand, tengevolge van de talrijke botsingen. Verdere waarnemingen omtrent het gedrag van kolloïdale deeltjes t. o. v. een vasten wand zullen moeten beslissen of deze verklaringen houdbaar zijn.

Een merkwaardige omstandigheid is, dat de krommen, indien $\varkappa$ of α boven een zekere kleine waarde komt, practisch samenvallen met de rechte voor $\varkappa = \infty$ ($\alpha = \infty$). Met het oog op de nauwkeurigheid der metingen zullen alle gevallen waarin $\varkappa > 5 \times 10^{-7}$ ($\alpha > 0.01$) mogen behandeld worden alsof $\varkappa = \infty$ ($\alpha = \infty$). Indien de waarnemingen overeenstemmen met de theorie voor $\varkappa = \infty$, mogen we hieruit dus slechts de conclusie trekken, dat $\varkappa$ grooter is dan dit bedrag.

De grootheid $\varkappa$, die in het bovenstaande voorkomt, heeft de dimensie van een snelheid en om te weten, wat de genoemde waarden van $\varkappa$ beteekenen, zullen we dus moeten nagaan met welke snelheid $\varkappa$ vergeleken moet worden.

We moeten dus nader ingaan op de physische beteekenis van $\varkappa$, ook om uit te maken of $\varkappa$ alle waarden tusschen nul en oneindig kan aannemen, zooals tot nu toe stilzwijgend is ondersteld.

Uit de wijze waarop (XIX) is afgeleid, volgt:

$$\frac{dn_t}{dt} = \varkappa F(o,t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XX)$$

Wanneer men nu bedenkt, dat $\frac{dn_t}{dt}$ het aantal deeltjes voorstelt, dat zich per tijdseenheid op den wand afzet, ligt het voor de hand, dit te vergelijken met het aantal deeltjes, dat tegen den wand botst. Dit aantal bedraagt, zooals bekend is uit de kinetische theorie der gassen en vloeistoffen:

$$\frac{v}{\sqrt{6\pi}} F(o,t) = \varkappa_1 F(o,t)\,^{1}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XXI)$$

waarin v de middelbare snelheid der deeltjes voorstelt, die gegeven is door de bekende formule:

---

[1]) Indien men de verandering der concentratie met den afstand tot den wand in rekening wil brengen, moet men $F_{\rho=0}$ vervangen door $F_{\rho=0} + \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_{\rho=0}$, waarin λ een lengte is van de orde van de gemiddelde weglengte van een deeltje. Daar $D\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_{\rho=0} = \varkappa F_{\rho=0}$, is de verhouding van de correctie tot de opgegeven waarde $\frac{\varkappa\lambda}{D}$, d w. z. altijd zeer klein.

$$v = \sqrt{\frac{3TR}{Nm}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XXII)$$

Hierin hebben R, T en N de bekende beteekenis en is m de massa van een deeltje. Met behulp van de door BRILLOUIN gegeven waarden vinden we voor het aantal botsingen per seconde:

$$\varkappa_1 F(o,t) = 0.1 \, F(o,t)$$

Hieruit volgt dus, dat van de tegen den wand botsende deeltjes slechts een zeer kleine fractie ε blijft kleven. Deze ε, die dus de kans voorstelt, dat een botsend deeltje geadsorbeerd wordt, is te vinden uit:

$$\varepsilon = \frac{\varkappa F(o,t)}{\varkappa_1 F(o,t)} = \frac{\varkappa}{\varkappa_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XIII)$$

Uit de waarnemingen van BRILLOUIN volgt dus: $\varepsilon = 1.5 \times 10^{-7}$. Daar de maximum-waarde dezer kans 1 is, zal $\varkappa$ nooit grooter dan $\varkappa_1$ kunnen zijn, d. w. z. voor de door BRILLOUIN gebruikte deeltjes $\varkappa < 0.1$. Maar $\varkappa_1$ zal wel nooit zoo klein zijn of we kunnen, als $\varepsilon = 1$ of een niet al te kleine breuk is, zonder de uitkomst merkbaar te veranderen $\varkappa = \infty$ nemen, zoodat dus de grensconditie $F(0,t) = 0$ voor deze gevallen een bruikbaar resultaat oplevert. Streng genomen kan echter de grensconditie nooit $F(0,t) = 0$ worden, daar hiertoe $\varkappa = \infty$ moet zijn, wat onmogelijk is.

De kans ε zal samenhangen met het mechanisme der botsing van een deeltje tegen den wand en om hier eenig inzicht in te krijgen is het zeer gewenscht ε als functie van verschillende omstandigheden te kennen. Behalve de waarnemingen van BRILLOUIN zijn mij echter geen andere experimenteele gegevens bekend om ε te bepalen.

§ 4. Hoewel de randvoorwaarde in § 3 slechts voor een vlakken wand is afgeleid, mogen we deze toch zonder twijfel ook voor een gebogen wand toepassen in den vorm:

$$D\overline{\frac{\partial F}{\partial \nu}} = \varkappa \overline{F}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XXIV)$$

waarin de horizontale streep waarden aan den wand aanduidt en ν de naar de vloeistof getrokken normaal is.

Hiervan kunnen we een toepassing maken voor het geval van een vasten bol met straal R, omgeven door een vloeistof, waarin op den tijd $t = 0$ veel deeltjes homogeen verdeeld zijn (n_0 per volume-eenheid). De oplossing van dit probleem is nl. door v. SMOLUCHOWSKI [1]) gebruikt in zijn theorie der uitvlokking. Terwijl hij echter als grens-

[1]) M. v. SMOLUCHOWSKI, Phys. Zeitschr. 17, p. 594, 1916.

conditie $\overline{F}=0$ kiest, willen we hier als randconditie (XXIV) nemen. Het aantal deeltjes, dat zich per tijdseenheid afzet, blijkt dan na eenige berekeningen te zijn:

$$\frac{dn^t}{dt} = 4\pi\, RD\, n_0 \frac{\varkappa R}{\varkappa R + D} = 4\pi\, RD\, n_0 \frac{\varepsilon\varkappa_1 R}{\varepsilon\varkappa_1\, R + D}, \quad . \quad (XXV)$$

als we evenals v. SMOLUCHOWSKI slechts tijden beschouwen, die groot zijn t. o. v. $\frac{R^2}{D}$.

Als $\varepsilon = 1$ of althans niet al te klein is, is met groote benadering $\frac{\varepsilon\varkappa_1 R}{\varepsilon\varkappa_1 R + D} = 1$ en gaat (XXV) over in:

$$\frac{dn_t}{dt} = 4\pi\, RD\, n_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XXV^a)$$

zooals ook v. SMOLUCHOWSKI vindt. Is echter ε zeer klein, dan blijven, zooals ook v. SMOLUCHOWSKI opmerkt, dezelfde formules gelden, als men daarin slechts t met een constanten factor vermenigvuldigt. Deze factor is echter niet, zooals v. SMOLUCHOWSKI meent, ε doch $\frac{\varepsilon\varkappa_1 R}{\varepsilon\varkappa_1 R + D}$. Zoolang dus ε niet zeer klein wordt, geldt de formule (XXV^a) van v. SMOLUCHOWSKI. Wordt echter ε een zeer kleine breuk, dan wordt ook het aantal der zich per tijdseenheid afzettende deeltjes kleiner, zoodat op deze wijze de langzame uitvlokking te verklaren is.

Ten slotte rest mij nog een woord van oprechten dank te brengen aan Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN voor zijn raad en voorlichting bij de samenstelling dezer mededeeling.

Instituut voor Theoretische Natuurkunde.

Utrecht, April 1917.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: *„Over kritische temperatuur en druk van kwik en phosphorus."*

(Mede aangeboden door den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS).

A. Kwik.

1. In een vroegere Verhandeling [1]) berekende ik voor de kritische temperatuur van kwik de waarde 1260° abs. (987° C.), en voor den kritischen druk 192 atm.

[1]) Over de grondwaarden der grootheden b en $\sqrt{a}$ etc. II. Deze Verslagen van 25 Maart 1916, o.a. p. 1638 en 1642.

Uit de dichtheden der verbindingen $HgCl_2$, $HgBr_2$ en HgI_2 berekenden wij nl. (l.c. p. 1639—1641) voor b_k bij kwik per Gr. atoom als waarschijnlijkste gemiddelde waarde 150.10^{-5}, en vervolgens voor $\sqrt{a_k}$ uit de door ROTINJANZ (Z. f. ph. Ch. **87**, p. 153) gevonden waarden van T_k bij deze verbindingen de gemiddelde waarde (evenéens per Gr. atoom) $11{,}0 \cdot 10^{-2}$. (l.c. p. 1641—1642). Met deze waarden van $\sqrt{a_k}$ en b_k berekent men dan verder uit de formules

$$RT_k = \frac{8}{27} \lambda \frac{a_k}{b_k} \times n \quad ; \quad p_k = \frac{1}{27} \lambda \frac{a_k}{b_k^2},$$

met $R = 1 : 273{,}1$, $\lambda = {}^{27}/_{28} = 0{,}964$, $n = 2$, de waarden

$$T_k = 1260 \quad ; \quad p_k = 192 \text{ atm.}$$

Dit alles in de onderstelling dat (verzadigde) kwikdamp bij T_k *bi*moleculair is ($n = 2$); een onderstelling, waartoe het verloop van de dampspanningen tusschen 0° en 500° C. ons noodzakelijk voert. (Zie ook l.c. p. 1646—1649).

2. Sindsdien zijn mij de dampdrukwaarnemingen van CAILLETET, COLARDEAU en RIVIÈRE (1900) bekend geworden, die tot 880° C. loopen. Uit de waarden 8,0, 22,3, 50, 102, 162 atm. bij resp. 500°, 600°, 700°, 800° en 880° C. berekent men met

$$\log \frac{p_k}{p} = f\left(\frac{T_k}{T} - 1\right), \quad \text{of} \quad f + \log p_k = \log p + \frac{fT_k}{T},$$

telkens uit een correspondeerend waardepaar van T en p (f tusschen twee waarnemingen konstant ondersteld), voor fT_k de waarden 3004, 2979, 3233, 3107; gemiddeld 3080. En voor $f + \log p_k$ de waarden 4,789, 4,760, 5,022, 4,905; met de zooeven gevonden middelwaarde 3080 voor fT_k correspondeert blijkbaar de waarde 4,880 voor $f + \log p_k$.

De correctiegrootheid λ is gegeven (vergel. ook l.c. p. 1637) door de uitdrukking $\lambda = \frac{27}{8\gamma - 1}\left(\frac{\gamma}{\gamma + 1}\right)^2$. En daar γ, de richtingscoëfficient van de rechte verbindingslijn tusschen D_k en D_0, gegeven is door de benaderde formule $2\gamma = 1 + 0{,}04\sqrt{T_k}$, zoo vindt men, met $\sqrt{T_k} = 34{,}5$ ongeveer, voor 2γ de waarde 2,38 (welke tevens de verhouding $b_k : b_0$ aangeeft), d. w. z. 1,19 voor γ. Daardoor wordt $\lambda = 0{,}936$, d. i. iets kleiner dan wij vroeger aannamen (0,964, zie boven).

Is nu x de dissociatiegraad der Hg_2-moleculen bij T_k, dan zijn per molecuul gemiddeld $n = 2 : (1 + x)$ atomen voorhanden (de associatiegraad van Hg_1), en heeft men blijkbaar:

$$\left.\begin{aligned} T_k &= 273 \times \frac{8}{27} \times 0{,}936 \times \frac{(11(1-x)+36x)^2 \,.\, 10^{-4}}{150 \,.\, 10^{-5}} \times \frac{2}{1+x} \\ p_k &= \frac{1}{27} \times 0{,}936 \times \frac{(11(1-x)+36x)^2 \,.\, 10^{-4}}{(150)^2 \,.\, 10^{-10}} \end{aligned}\right\},$$

daar de grootheid $\sqrt{a_k}$ per Gr. atoom bij tot Hg_2 *gebonden* Hg-atomen $= 11 \,.\, 10^{-2}$ is, bij de *vrije* kwikatomen daarentegen veel hooger, nl. $36 \,.\, 10^{-2}$ (vergel. IV in Deze Versl. van 24 Juni 1916, p. 456, waar wij voor *bismuth*, dat in dezelfde horizontale rij als kwik staat, 35,6 vonden), zoodat $\sqrt{a_k}$ per Gr. atoom gemiddeld $= 11(1-x) + 36x$ wordt.

Wij vinden dus:

$$\left.\begin{aligned} T_k &= 10{,}10 \times \frac{(11(1-x)+36x)^2}{1+x} \\ \log p_k &= 0{,}1877 + 2 \log (11(1-x) + 36x) \end{aligned}\right\},$$

derhalve met $fT_k = 3080$, $f + \log p_k = 4{,}880$ (zie boven):

$$f = 4{,}692 - 2 \log (11(1-x)+36x),$$

zoodat x kan worden gevonden uit

$$\frac{10{,}10(\quad)^2}{1+x} = \frac{3080}{4{,}692-2 \log (\quad)},$$

of uit

$$[4{,}692 - 2 \log (11(1-x)+36x)] \times (11(1-x)+36x)^2 : (1+x) = 305.$$

Is nu $x = 0$ bij T_k, d. w. z. alles bimoleculair, dan wordt dit met $10^2 \,.\, \sqrt{a_k} = 11$:

$$316 = 305,$$

hetgeen met het oog op de onzekerheden in de uit de halogeen-verbindingen berekende waarden van b_k en $\sqrt{a_k}$ al heel aardig uitkomt. Met $\sqrt{a_k} = \underline{10{,}8}$ zou men $306 = 305$ gevonden hebben.

Met $x = 0{,}1$ zou men met $\sqrt{a_k} = 9{,}7 + 3{,}6 = 13{,}3$ vinden $393 = 305$, hetgeen dus in het geheel niet uitkomt. En met nog hoogere waarden van a ware het verschil hoe langer hoe grooter geworden.

De *geringste* dissociatie van Hg_2 tot Hg_1 bij T_k is dus *geheel buitengesloten*, zoodat wij moeten aannemen dat kwik daar *geheel bimoleculair* is. Terwijl de *vloeibare* kwik à fortiori bimoleculair is, zal de verzadigde kwik*damp* alleen bij *lagere* temperaturen (waar het groote volume overheerscht) Hg_1 zijn, maar bij hoogere temperaturen, tengevolge van het afnemende volume, in steeds hoogere mate Hg_2 (vergel. ook l.c. p. 1637) worden.

3. Met de iets lagere waarde voor λ, nl. $\lambda = 0{,}936$, en met $b_k = 150 \,.\, 10^{-5}$, $\sqrt{a_k} = 10{,}8 \,.\, 10^{-2}$ wordt nu gevonden:

$$T_k = 10,10 \times 116,6 = 1178° \text{ abs.} = 905° \text{ C.}$$

Men ziet dus dat CAILLETET c.s. bij 880° al *zeer dicht* bij de kritische temperatuur van kwik, nl. ± 900° C., zijn geweest; deze ligt wellicht *nauwelijks* 20° *hooger* dan de hoogste temperatuur, waarbij zij nog een dampdrukbepaling hebben uitgevoerd (880° C.).

Zou het met het oog op dit feit niet wenschelijk zijn de kritische temperatuur van kwik eindelijk eens proefondervindelijk te bepalen? Waar het ROTINJANZ mogelijk was die der kwikhalogeniden te bepalen, welke resp. bij 976°, 1011° en 1072° abs. liggen, zal het wellicht mogelijk zijn ook tot ± 1200 abs. te komen (bij het smeltpunt van zilver, nl. 960° C., is men reeds ver boven de kritische temperatuur van kwik).

De eenige, die een eenigszins aannemelijke waarde voor T_k bij Hg berekende, was HAPPEL (Ann. der Ph. (4) **13**, 351 (1904)), welke 1370° abs. aangaf, d.i. slechts 100° hooger dan door mij in 1916 werd berekend (1260° abs.) Maar de waarde van KÖNIGSBERGER (1912), nl. 1270° C. (1543 abs.), en die van BENDER (1915), nl. > 1500° C. (> 1773° abs.), zijn zeer zeker te hoog. Dan zoude, daar fT_k niet ver beneden T_k slechts = 3080 bedraagt (dit volgt met absolute zekerheid uit de dampdrukwaarnemingen, zie boven), de waarde van den factor f bij hooge temperaturen slechts = 2, of zelfs 1,7 zijn, in plaats van tot 2,8 te naderen (zie onder), terwijl deze factor tusschen 0° en 100° C. reeds ongeveer 2,7 à 2,6 is — afgezien nog van het feit, dat men alsdan voor a_k en b_k geheel onwaarschijnlijke waarden zou vinden [1]).

Voor p_k berekenen wij:

$$\log p_k = 0,1877 + 2,0668 = 2,2545,$$

d. w. z.

$$p_k = 180 \text{ atm.}$$

Ten einde eenige meerdere zekerheid aangaande de waarden van T_k en p_k, alsmede van $\sqrt{a_k}$ en b_k te verkrijgen, kan men nog de volgende berekening maken.

Uit $fT_k = 3080$, $f + \log p_k = 4,880$ volgt nl. met f resp. = 2,5, 2,6 en 2,65:

---

[1]) Wat de waarde van a betreft, zoo heb ik er mij van overtuigd, dat uit de samendrukbaarheid van kwik bij 0°, 110° en 192° C nagenoeg dezelfde waarde van a volgt als uit de kwikhalogeniden voor a_k werd berekend. En wat b_k betreft: zelfs in de onderstelling dat Hg_2 bij vloeibaar kwik de stoechiometrische eigenschappen heeft van *mercuro*-verbindingen, zou uit de densiteiten van Hg_2Cl_2 en Hg_2Br_2 voor Hg (per Gr. atoom) in Hg_2 een waarde volgen, welke slechts weinig lager uitvalt dan voor Hg bij de *mercuri*-verbindingen werd gevonden. (nl. circa $140 \cdot 10^{-5}$ in pl. v. $150 \cdot 10^{-5}$).

$f = 2{,}50$	$T_k = 1232$	$\log p_k = 2{,}380$	$p_k = 240$
$2{,}60$	1185	$2{,}280$	191
$2{,}65$	1162	$2{,}230$	170

Uit $8n \,.\, b_k = RT_k : p_k$ volgt dan met $n = 2$, $R = 1 : 273$ voor b_k (per Gr. atoom) $b_k = T_k : 4370\, p_k$, d. w. z. b_k resp. $= 117$, 142 en 156.10^{-5}.

Terwijl dan uit $T_k = 151{,}5\, a_k : b_k$ met deze waarden voor b_k volgt a_k resp. $= 95{,}2$, $111{,}3$, $119{,}6 \,.\, 10^{-4}$, d. w. z. $\sqrt{a_k}$ (per Gr. atoom) resp. $= 9{,}76$, $10{,}55$ en $10{,}94 \,.\, 10^{-2}$.

Hieruit ziet men ten duidelijkste dat — aangezien b_k in de nabijheid van $150 \,.\, 10^{-5}$, $\sqrt{a_k}$ in die van $11 \,.\, 10^{-2}$ moet liggen — de waarde 1232 abs. voor T_k wel uitgesloten is, en dat men dus de keuze heeft tusschen 1185 à 1162. Houdt men vast aan $b_k = 150 \,.\, 10^{-5}$, dan wordt $\sqrt{a_k} = 10{,}77 \,.\, 10^{-2}$, zooals wij boven reeds aannamen (rond 10,8), en verder

$$\underline{T_k = 1172 \text{ abs.} = 899^\circ \text{ C.}} \quad ; \quad \underline{p_k = 179 \text{ atm.}}$$

Maar het is ook mogelijk dat T_k iets hooger, b.v. 1185° wordt, waarbij dan $p_k = 191$ atm. behoort. De waarde van $\sqrt{a_k}$ zou dan echter nog lager uitvallen dan die, welke wij uit HgI_2 berekenden, nl. $10{,}7 \,.\, 10^{-2}$ (l.c. p. 1642), terwijl die van $b_k = 142 \,.\, 10^{-5}$ zou worden, d.i. gelijk aan die welke uit deze zelfde verbinding berekend werd. Maar dit waren de allerlaagste waarden. Die, welke uit $HgCl_2$ en $HgBr_2$ berekend werden, waren beide hooger (l.c. p. 1641—1642).

4. Voor de achtereenvolgende waarden van den VAN DER WAALS'schen dampdrukfactor f vinden wij thans tusschen 0° en 880° C. uit de volgende dampdrukwaarnemingen (bij de lagere temperaturen middelwaarden)

	0°	100°	200°	300°	400°	500°	550°	600°	650°	700°
$p =$	$24 \,.\, 10^{-5}$	0,2775	17,13	246 (mm.)	2,05	8,0	13,8	22,3	34	50

750°	800°	850°	880° C.
72	102	137,5	162 (atm.)

de navolgende waarden.

$\log \frac{p_k}{p} =$	8,7534	5,6903	3,8998	2,7427	1,9410	1,3497	1,1129
	0,9045	0,7213	0,5538	0,3955	0,2442	0,1145	0,0433
$\frac{T_k}{T} - 1 =$	3,2930	2,1421	1,4778	1,0454	0,7415	0,5162	0,4241
	0,3425	0,2698	0,2045	0,1457	0,0923	0,0436	0,0165
$f_{10} =$	2,66	2,66	2,64	2,62	2,62	2,61 (min)	2,62
	2,64	2,67	2,71	2,71	2,65	2,63	2,62
$f_e =$	6,12	6,12	6,08	6,04	6,03	6,02	6,04
	6,08	6,15	6,24	6,25	6,09	6,05	6,04

De waarde van p bij 0° C. is waarschijnlijk nog iets te groot genomen; wij namen daarvoor 0,00024 aan (HERTZ gaf 0,00019 aan, V. D. PLAATS 0,00047). En wat de waarden bij de hoogere temperaturen betreft, hier vooral zal de geringste fout in den dampdruk zich sterk in de berekende waarden van f doen gevoelen; hetzelfde geldt t.o.v. een slechts minimale fout in de berekende waarden van p_k of T_k. Nemen wij b.v. $p_k = 180$ atm. aan in plaats van 179 atm., dan wordt $log\, p_k$ 24 eenheden der laatste decimaal grooter, waardoor de waarden van f bij de hoogste drie temperaturen onmiddellijk tot 2,67, 2,68 en 2,77 (met nep. log.: 6,15, 6,17, 6,38) zouden stijgen. Dan zou b_k in pl. v. $150 . 10^{-5}$ de waarde $149 . 10^{-5}$ verkrijgen, en $\sqrt{a_k}$ 10,74 worden in pl. v. 10,77. Maar in elk geval is het verloop van f tamelijk regelmatig; deze grootheid neemt van ongeveer 2,66 bij 0° C. af tot 2,61 (de minimumwaarde) bij 500° C., om daarna weer toe te nemen tot ongeveer 2,7 à 2,8 bij de kritische temperatuur. Het minimum ligt bij $T = 0,66\, T_k$.

De waarde van f bij de kritische temperatuur zou men hooger hebben kunnen verwachten dan 6,4 à 6,5 (nep. log.), aangezien f_k volgens onze vroegere beschouwingen gelijk is aan 8γ, wanneer noch a, noch b temperatuurfuncties zijn. Nu is $\gamma = 1,2$ ongeveer, dus zou $8\gamma = 9,6$ zijn. Maar men bedenke, dat juist in het geval van kwik a in hooge mate een temperatuurfunctie zal zijn. Immers slechts door den overheerschenden volumninvloed wordt bij hoogere temperatuur Hg tot Hg_2, terwijl wanneer de temperatuur-invloed *alleen* zijn invloed kon doen gelden, Hg_2 tot Hg_1 zou dissocieeren, *waardoor* $\sqrt{a}$ *van ongeveer* 11 *tot* 36 *zou stijgen*. De waarde van $\left(\frac{da}{dt}\right)_v$ bij T_k zal dus zeer groot positief zijn, en daardoor zal de waarde van $\left(\frac{dp}{dt}\right)_v$ bij de kritische temperatuur sterk worden verlaagd. De waarde van $f_k = \left(\frac{T}{p}\frac{dp}{dt}\right)_k$ zal dus eveneens *aanmerkelijk lager* dan de normale moeten uitvallen. In ons geval wordt de verwachte waarde van 9,6 tot 6,5 verminderd.

Doordat T_k in plaats van 1260° abs., zooals ik vroeger berekende, thans $= 1172°$ abs. gevonden wordt, zoo zullen de verhoudingen $T_k : T_s$ en $T_k : T_{tr.}$ ook iets lager uitvallen. Voor de eerste vindt men $1172 : 630 = 1,86$, en voor de tweede 5,0. Een zoo hooge waarde voor de verhouding $T_k : T_{tr.}$ vindt men bij de door ons tot nu toe berekende elementen alleen bij He (5,2) en bij Bismuth (5,5). Maar wij zullen spoedig zien (in een volgende Verhandeling), dat ook bij tin, lood en de *alkalimetalen* $T_k : T_{tr.} =$ ruim 5 is. Een tamelijk

hooge waarde van $T_k : T_s$ (d.w.z. $> 1,7$) vindt men ook bij Argon, Krypton, Xenon, Niton (1,73—1,79), bij de Halogenen (1,75 à 1,72), bij O_2 (1,71), bij P, Sb en Bi (1,75—1,77), maar 1,86 werd nog niet bereikt. Van de verbindingen noemen wij HCl (1,71), HBr (1,78), HI (1,79), H_2O (1,71), H_2S en H_2Se (1,77), PH_3 (1,75), CS_2 (1,71), CH_4 (1,75), H . COH (1,97), terwijl de drie kwikhalogeniden, door ROTINJANZ onderzocht, 1,69 à 1,71 geven.

5. Ten slotte wil ik er nog op wijzen, dat niet alleen uit de dichtheden der kwik-halogeenverbindingen (zie § 1) voortvloeit $b_k = 150 \times 10^{-5}$, maar ook uit de dichtheid van kwik zelf. Immers uit de bepalingen van DEWAR (1902), die voor de dichtheid bij — 188° C. de waarde 14,382 vond, en die van MALLET, welke voor de densiteit bij — 39° aangaf 14,193, volgt dat de grensdichtheid D_0 bij ongeveer — 250° (daar beneden heeft geen merkbare voluumvermindering meer plaats) zal bedragen 14,46. 200,6 Gr. kwik nemen dan een ruimte in van $200,6 : 14,46 = 13,87$ ccM., d. w. z. $= 13,87 : 22412 = 61,9 \,.\, 10^{-5}$ in z.g. normale eenheden. Dit is dus $b_0 = v_0$. Nu is volgens een onzer formules $b_k : b_0 = 2\gamma$, derhalve $b_k = 61,9 \,.\, 10^{-5} \times 2,4 = \underline{149 \,.\, 10^{-5}}$, geheel identiek aan de waarde welke wij boven (§ 4) met $p = 180$ atm. vonden. Wij kunnen dus wel met zeer groote zekerheid de waarde van b_k bij kwik op $150 \,.\, 10^{-5}$ stellen.

De waarde van D_k vindt men uit de formule $D_k = D_0 : 2(1+\gamma) = 14,46 : 4,4 = 3,3$.

Recapituleerende, is dus waarschijnlijk bij *kwik*:

$T_k = 1172°$ abs. ($\pm$ 900° C.) ; $p_k = 180$ atm. ; $d_k = \pm 3,3$
$b_k = 149 \,.\, 10^{-5}$; $\sqrt{a_k} = 10,74 \,.\, 10^{-2}$; $2\gamma = b_k : b_0 = 2,4$; $f_k = \pm 6,4$
$T_k : T_s = 1,86$; $T_k : T_{tr.} = 5,0$.

Deze waarden zijn vrij zeker; de kritische temperatuur ligt — de dampdrukwaarnemingen tusschen 500° en 880° in aanmerking genomen — nog bijna 100° lager dan ik in 1916 had berekend, en *slechts* 20° *hooger* dan de hoogste temperatuur waarbij CAILLETET c.s. hun dampdrukbepalingen hebben uitgevoerd.

Dat het bij *lagere* temperaturen den *schijn* heeft dat de kritische temperatuur van kwik veel hooger ligt (zooals o.a. KÖNIGSBERGER en BENDER meenden), komt daar vandaan, dat de uitzetting van vloeibaar kwik bij die temperaturen (0°—300° C.) *abnormaal klein* is. Maar dit moet aan nog onbekende storende omstandigheden (associatie bv.) worden toegeschreven. Evenmin als men uit de abnormale uitzetbaarheid van water in de buurt van 4° C. (en nog ver daarboven)

of van Helium (waar eveneens een maximale dichtheid is geconstateerd) tot geheel foutieve kritische waarden mag besluiten, evenmin mag men dit bij kwik doen. Wij komen hierop later nog terug.

B. Phosphorus.

1. Uit de door hemzelf (Deze Verslagen van 17 Oct. 1914, 18 Jan. 1915; Z. f. ph. Ch. **88** (1914), **91** (1916)) bepaalde dampdrukken van den vloeibaren phosphorus tusschen 169° en 634° extrapoleerde Smits voor den kritischen druk — onder aanname van de waarde 695° C., door Wahl voor de kritische temperatuur van Phosphorus gevonden — de waarde 82,2 atm. Maar het is gemakkelijk na te gaan, dat deze waarde *te laag* is. Berekent men nl. uit de dampdrukformule $log\frac{p_k}{p}=f\left(\frac{T_k}{T}-1\right)$ met $T_k=695+273{,}1=968{,}1$ de waarden van f bij tien verschillende temperaturen, dan vindt men met $p_k=80$, resp 90 atm.:

$t=$	169°,0	210°,0	252°,0	298°,6	355°,7	409°,3	504°	550°	593°	634° C.
$p=$	0,04	0,20	0,54	1,38	3,88	(7,36)	23,2	33,0	44,2	58,6 atm.
$log\frac{p_k}{p}=$	3,3010	2,6021	2,1707	1,7632	1,3143	1,0362	0,5376	0,3846	0,2577	0,1352
	3,3522	2,6532	2,2218^{5}	1,8144	1,3654	1,0874	0,5887^{5}	0,4357	0,3088	0,1863
$\frac{T_k}{T}-1=$	1,1898	1,0039	0,8437	0,6934	0,5396	0,4187	0,2458	0,1762	0,1178	0,0672
$f=$	2,77	2,59	2,57	2,54	2,44	(2,47)	2,19	2,18	2,19	2,01
	2,82	2,64	2,63	2,62	2,53	(2,60)	2,40 (min)	2,47	2,62	2,77

Hieruit ziet men duidelijk dat de eerste rij waarden (welke met $p_k=80$ atm. correspondeeren) niet juist kan zijn. Immers dan zou f van de waarde 2,77 bij 169° af *gestadig afnemen* tot aan de kritische temperatuur toe, waar de waarde zelfs <2 zou worden! Terwijl toch bekend is dat f steeds een *minimum* doorloopt bij $T=$ ongeveer 0,7 à 0,8 T_k, om daarna weer *toe te nemen* tot aan T_k. Men ziet gemakkelijk in dat ook bij $p_k=82$ atm. de afname tot aan T_k nog niet tot staan is gebracht, en dat eerst bij 90 atm. een behoorlijk en *mogelijk* verloop voor f wordt verkregen. Een nadere berekening, waarover straks, heeft mij zelfs geleerd dat de juiste waarde van p_k nog iets hooger, nl. ongeveer 95 atm., zou bedragen — tenminste wanneer men aan $T_k=968{,}1$ blijft vasthouden.

Dat Smits een te lage waarde voor p_k extrapoleerde, komt daar vandaan, dat hij voor deze extrapolatie een onjuiste formule gebruikte;

een formule nl. die alleen bij temperaturen geldig is, welke *ver* van de kritische temperatuur afliggen — en die dus niet dienen kan om *tot aan* de kritische temperatuur te extrapoleeren.

Immers in de bekende CLAPEYRON'sche betrekking

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\lambda}{T\Delta v}$$

zal alleen bij *lage* temperatuur $\Delta v = v_2 - v_1$ door v_2 kunnen vervangen worden, met verwaarloozing van het vloeistofvolume; en zal alleen bij *lage* temperaturen $v_2 = RT : p$ mogen worden gesteld, onder aanname dat de damp de wet van BOYLE volgt — zoodat *alleen dan* die formule overgaat in

$$\frac{d\, log\, p}{dt}=\frac{\lambda}{RT^2},$$

waarin λ de (totale) verdampingswarmte voorstelt. Nu nam SMITS — in navolging van zooveel andere auteurs, die nog altijd meenen dat deze laatste formule algemeen geldig is, omdat VAN 'T HOFF e.a. deze *grens*formule steeds gebruikten bij onderzoekingen, waar de bovengenoemde voorwaarden *vervuld* zijn — aan, dat de formule met *d log p tot aan de kritische temperatuur* geldig zou blijven, wanneer men slechts aannam dat λ tot aan T_k toe *lineair* met de temperatuur afneemt. Dit nu is bij *lagere* temperaturen zeer zeker vrij nauwkeurig vervuld, maar dicht bij T_k neemt λ plotseling rapide af om *bij* de kritische temperatuur $=0$ te worden. Bij de door SMITS aangenomen lineaire afname zou echter λ bij T_k nog een groote eindige waarde behouden!

Maar wij behoeven hierbij niet langer stil te staan, daar — zooals wij opmerkten — de geheele formule, *met* de lineaire afname van λ incluis, slechts voor *lagere* temperaturen geldt. En daarmede vervalt dan ook vanzelf de juistheid der door SMITS uitgevoerde extrapolatie.

Bij *alle* temperaturen geldt echter de dampdrukformule van v. D. WAALS, welk geschreven kan worden in den vorm

$$log\, p = (f + log\, p_k) - \frac{fT_k}{T}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

waarin f nog een zwakke temperatuur-functie is. Vergelijkt men deze uitdrukking met de geïntegreerde formule $d\, log\, p =$ enz., onder aanname van $\lambda = \lambda_0 - \varphi RT$, d. w. z. met

$$log\, p = C - \frac{\lambda_0}{RT} - \varphi\, log\, T = C - \frac{(\lambda_0 : R) + \varphi T\, log\, T}{T}, \quad . \quad (b)$$

dan blijkt dat in de door SMITS gebruikte formule — en die, wij

herhalen het, alleen bij relatief lage temperaturen geldig is — de konstante $C = f_0 + \log p_k$ zal zijn, terwijl $\lambda_0 = f_0 RT_k$ is. Maar al heeft de *vorm* der laatste formule overeenkomst met de VAN DER WAAL'sche formule, zoo zal bij *hoogere* temperaturen de teller van den term met $^1/_T$ in geen enkel verband meer staan tot λ, aangezien λ tot 0 zal naderen bij T_k, terwijl de genoemde teller eindig blijft, en feitelijk volgens de V. D. WAALS'sche formule $= fT_k$ is.

2. Onder aanname nu van de kwadratische betrekking

$$f = f_k - \alpha \frac{T_k - T}{T_k} + \beta \frac{(T_k - T)^2}{T_k^2}$$

voor het stuk der dampdrukcurve tusschen het minimum en de kritische temperatuur, berekende ik uit de vier dampdrukwaarnemingen bij 504°, 550°, 593° en 634° voor de 4 onbekende grootheden α, β, f_k en p_k de waarden $\alpha = 11{,}71$, $\beta = 26{,}62$, $f_k = 3{,}77$, $p_k = 95{,}3$.

Evenwel — nòch de waarden $T_k = 968{,}1$, $p_k = 95$, nòch zelfs met den iets lageren druk 90 atm., kunnen ons bevredigen. Immers het is zoo goed als zeker dat bij 695° C., volgens de dichtheidsbepalingen van STOCK, GIBSON en STAMM (1912) de phosphordamp zelfs bij den lagen druk van 75 mm. nog geheel normaal $= P_4$ is. En à fortiori zal dit het geval zijn bij een druk van 80 à 90 atm. (d.w.z. bij een *totalen* druk, binnen- en buitendruk tezamen, van $f_k \times 80$ à $90 = \pm 640$ à 720 atm.). Hetzelfde volgt ook uit de bepalingen van PREUNER en BROCKMÖLLER (Z. f. ph. ch. **81**, p. 159 (1912)).

Uit de formule $b_k = RT_k : 8p_k$ zou nu met $T_k = 968{,}1$, $p_k = 95{,}3$ voor b_k volgen de waarde $465 \cdot 10^{-5}$, en met $p_k = 90$ de waarde $492 \cdot 10^{-5}$. Beide hoogstwaarschijnlijk te laag, aangezien $4 \times 140 = 560 \cdot 10^{-5}$ verwacht kan worden.

De eenige uitweg hierbij is, dat men aanneemt dat de door WAHL bepaalde kritische temperatuur 695° C. ongeveer 20° à 25° te hoog is bepaald, en dat 675° à 670° C. wellicht de juiste temperatuur is.

Herhaalt men nu de boven aangeduide berekening (met $f = f_k - \alpha$ etc.) bij verschillende waarden van T_k, dan vindt men b.v.

T_k = 695° C	α = 11,71	β = 26,62	f_k = 3,77	p_k = 95,3	b_k = 465
680° „	10,31	25,80	3,485	83,6	522
670° „	9,40	25,26	3,31	77,1	560

Alleen de laatste waarde van T_k, nl. 670°, geeft met de corres-

pondeerende waarde van $p_k = 77{,}1$ atm. een behoorlijke waarde van b_k. Maar aangezien deze waarde bij phosphorus *niet* met *volkomen* zekerheid vaststaat, zoo is het ook mogelijk dat een intermediaire waarde, b.v. 675° C., moet worden aangenomen. De waarde van p_k zou dan ongeveer 80 atm. worden, b_k = ruim $540 \,.\, 10^{-5}$. Met een 2 °/₀ lager waarde, d.w.z. 948,7 abs. in plaats van 968,1 abs., of 675°,6 C., en met $p_k = 80$ atm. zou men bij dezelfde tien temperaturen als in § 1 voor f de navolgende waarden vinden.

$\log \frac{p_k}{p}$ =	3,3010	2,6021	2,1707	1,7632	1,3143	1,0362	0,5376	0,3846	0,2577	0,1352
$\frac{T_k}{T} - 1$ =	1,1460	0,9638	0,8068	0,6595	0,5088	0,3903	0,2209	0,1527	0,0954	0,0459
f =	2,88	2,70	2,69	2,67	2,58	2,65	2,43 (min)	2,52	2,70	2,95

De door SMITS nog tusschen de beide waarnemingsseriën met moeite bepaalde waarde bij 409°,3 valt, zooals te verwachten was, eenigszins uit het kader. Men vindt nl. 2,65 in plaats van 2,50 ongeveer; maar de overige waarden vormen alle inderdaad één enkele reeks, zoodat de vloeibare witte Phosphorus met volkomen zekerheid als de metastabiele voortzetting der vloeibare roode Phosphorus beneden het tripelpunt bij 589°,5 kan worden beschouwd — hetgeen door SMITS onwederlegbaar is aangetoond.

Voor de kritische data van Phosphorus hebben wij dus met eenige waarschijnlijkheid:

$$T_k = \underline{\pm 948{,}1} \text{ abs.} = \underline{\pm 675°} \text{ C.}; \quad p_k = \underline{\pm 80} \text{ atm.}$$

De waarde van f zal dan bij T_k tot 3,4 (met nep. log. tot 7,8) naderen. Voor b_k vindt men $542 \,.\, 10^{-5}$, d. w. z. $135 \,.\, 10^{-5}$ per Gr. atoom [1]); en voor $a_k = RT_k \times (27:8\lambda) \times b_k$ met $\lambda = 0{,}955$ ($\gamma = 1{,}09$; verg. ook II, Versl. van 24 Juni 1916, p. 446) de waarde 0,0665, zoodat $\sqrt{a_k} = 25{,}8$ wordt, d. w. z. per Gr. atoom $6{,}45 \,.\, 10^{-2}$.

De voor f_k gevonden waarde 7,8 is iets lager dan uit $f_k = 8\gamma$ zou volgen, nl. 8,7, of met gewone log. 3,8.

Het minimum ligt bij $(T_k - T) : T_k = \alpha : 2\beta = 0{,}193$, d. w. z. bij $T = 0{,}81\, T_k$, of 183° lager dan T_k, dus bij 492° C. — slechts weinig beneden 504° C. En deze minimumwaarde voor f zal blijkbaar $= f_k - (\alpha^2 : 4\beta) = 3{,}40 - (97{,}12 : 102{,}1) = 2{,}45$ zijn. Wij vonden boven met de daar iets te laag aangenomen waarde 80 atm. voor p_k (met 675°,6 correspondeert nl 80,7 atm.) de iets geringere waarde 2,43.

Fontanivent sur Clarens, Maart 1917.

---

1) Uit de kritische data van PH_3 zou met H = 34 zelfs 131 volgen. (Vergel. I, Versl. van 29 Jan. 1916, p. 1289). Maar deze data zijn wellicht ook niet absoluut nauwkeurig.

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt een mededeeling aan van den Heer Dr. H. I. WATERMAN: *„Over den invloed van verschillende stoffen op de ontleding van monosen door alkali en op de inversie van rietsuiker door zoutzuur. Configuratie van de α-aminozuren en van betaïne".*

(Mede aangeboden door den Heer A. F. HOLLEMAN).

De ontleding door alkali van monosen, zooals glukose, galactose enz., gaat gepaard met eene afname der polarisatie van de betreffende oplossingen, terwijl tevens bruinkleuring optreedt.

In de snelheid van teruggaan der polarisatie en in de intensiteit der kleur van de oplossing heeft men een maat voor de werking der hydroxylionen.

Het is mij gebleken, dat verschillende stoffen, waaraan men in den regel geen, of slechts gering, zuur karakter toekent, zooals aminoazijnzuur en α-aminopropionzuur, de ontledende werking van groote alkali-concentraties op glukose kunnen opheffen. [1])

Ten einde mijne waarnemingen een meer algemeen karakter te geven, heb ik de proeven met galactose-oplossingen herhaald en hierbij de bij glukose verkregen resultaten bevestigd gevonden. (Zie tabel I p. 1510).

Ook de inwerking van hydroxylionen op galactose wordt door verschillende „neutrale" stoffen sterk geremd.

Terwijl de toevoeging van 5 cM^3. 1,06. normaal-NaOH-oplossing bij de in tabel I vermelde proeven de polarisatie na 3 uur van $+ 12,4$ tot $+ 9,3$ en $+ 9,4$ heeft doen dalen, heeft dezelfde alkali-concentratie, in tegenwoordigheid van 500 milligram alanine, de polarisatie slechts tot $+ 11,1$ doen verminderen.

Na 24 uur en vooral na 48 uur was het verschijnsel nog veel duidelijker waarneembaar.

Zoo was na 48 uur *zonder alanine* de polarisatie door de werking der hydroxylionen van 12,4 op **4,0** resp. **4,3** teruggegaan; *met alanine* was ze slechts tot **9,7** gedaald.

Ook het verschil in kleurintensiteit der onderzochte vloeistoffen was hiermee in overeenstemming. *Met alkali,* doch *zonder alanine,* waren de oplossingen na ± 48 uur *bruingeel*; *met alanine* slechts *zwak lichtgeel.*

Uit deze en andere, vroeger beschreven, proeven blijkt tevens, dat de hoeveelheid alkali, die door het glykokol en alanine wordt vast-

[1]) H. I. WATERMAN, Chem. Weekblad *10,* 739 (1913); *14,* 119 (1917).

TABEL I. *Remmende werking van alanine op de ontleding door alkali van galactose-oplossingen.*

		A	B	C	D
		40 cM³ eener ± 3,5 % galactose-oplossing[1]			
Toegevoegde hoeveelheid alanine		0	0	0	500 milligram
Toegevoegd aantal cM³ 1,06. normaal NaOH-oplossing		0	5	5	5
		Aangevuld met H_2O tot 50 cM³			
		A, B, C en D werden tegelijkertijd in een luchtthermostaat met watermantel (temp. 33°) geplaatst			
Polarisatie in graden VENTZKE (buislengte 2 dM.)	Bij het begin (temp. polarisatievloeistof: 18,5°)	+ 12,3	+ 11,1	+ 11,1	+ 12,3
	Na ± 3 uur (temp. polarisatievloeistof: 20°)	+ 12,4	+ 9,3	+ 9,4	+ 11,1
	Na ± 24 uur (temp. polarisatievloeistof: 18,5°—19°)	+ 12,5	+ 5,6	+ 5,8	+ 9,9
	Na ± 48 uur (temp. polarisatievloeistof: 18°)	+ 12,4	+ 4,0	+ 4,3	+ 9,7
Kleur der oplossing	Bij het begin	kleurloos	kleurloos	kleurloos	kleurloos
	Na ± 3 uur	kleurloos	lichtgeel	lichtgeel	kleurloos
	Na ± 24 uur	kleurloos	geel	geel	kleurloos
	Na ± 48 uur	kleurloos	bruingeel	bruingeel	zwak lichtgeel

gelegd, zeer groot is. Het aantal cM³ loog, benoodigd om dezelfde hoeveelheid dezer aminozuren, in water opgelost, bij titreeren met phenolphtaleïne als indicator, rose te kleuren, kan hiertegenover practisch verwaarloosd worden.

Bij nader onderzoek is gebleken, dat glykokol en alanine zich in alkalisch medium, onder de omstandigheden mijner proefnemingen, ongeveer als éénbasisch zuur gedragen.

Eenige der hierop betrekking hebbende waarnemingen zijn in tabel II vereenigd.

[1]) De galactose-oplossing werd vóór gebruik even opgekookt en hierna afgekoeld.

TABEL II. *Bepaling van de hoeveelheid alkali, die door glykokol en alanine wordt gebonden.*

		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		80 cM³ ± 5 % glukose-oplossing									
Toegevoegd aantal cM³ 1,06 Normaal NaOH-oplossing		0	2	3	4	5	6	10	10	10	10
Toegevoegd									500 milligr. glykokol		500 milligr. alanine
		Aangevuld tot 100 cM³ en geplaatst in luchtthermostaat met watermantel (temperatuur 33°)									
Polarisatie in graden VENTZKE (2 dM. buis)	Bij het begin	+ 11,0							+ 10,6	+ 9,7	+ 10,5
	Na + 2 uur	+ 10,9	+ 10,5	+ 10,1	+ 9,9	+ 9,6	+ 9,3	+ 8,3	**+ 10,0**	+ 8,5	**+ 9,6**
Kleur der oplossing	Na 40 uur	kleurloos	zeer zwak geel	zwak geel	zwak geel (> C)	geel	geel-bruin	bruin	zwak geel (een weinig sterker dan D)	geelbruin sterker dan F	zwak geel (= D)

Eene glukose-oplossing van bepaalde sterkte werd onder vergelijkbare omstandigheden blootgesteld aan de werking van verschillende concentraties alkali.

Het aantal c.M³ 1,06 normaal NaOH-oplossing, dat werd toegevoegd, liep uiteen van 0 tot 10 c.M³ per 100 c.M³ oplossing.

De meest belangrijke polarisatievermindering en de sterkste geelkleuring trad dáár op, waar het meeste alkali was toegevoegd (proef G en I).

Na ongeveer twee uur was de polarisatie bij G en I van + 10,9 tot resp. + 8,3 en + 8,5 gedaald. Uit de proeven H en J bleek weer de beschermende werking van glykokol en alanine. De polarisatie was hier resp. + 10,0 en + 9,6.

De polarisatie van H lag tusschen die van C en D in. Hieruit volgt, dat 500 milligr. glykokol ongeveer $10-3^1/_2 = 6,5$ c.M³ 1,06 N. NaOH = bijna 7 c.M³ N. NaOH heeft gebonden. De intensiteit der geelkleuring was hiermede ongeveer in overeenstemming.

Op analoge wijze bleek, dat 500 milligram alanine ongeveer $5 \times 1,06 = 5,3$ c.M³ N. NaOH gebonden had.

Beschouwen we glykokol en alanine als éénbasisch zuur, dan

zou 500 milligr. dezer verbindingen resp. $\frac{500}{75} = 6{,}7$ c.M³ N. loog en $\frac{500}{89} = 5{,}6$ c.M³ N. loog kunnen binden. De overeenstemming is dus voldoende.

Omgekeerd gedragen *aminoazijnzuur* en *α-aminopropionzuur* zich *in zoutzure oplossing* ongeveer als *één-zurige base,* zoodat deze aminozuren de snelheid der inversie van rietsuiker in zoutzure oplossing belangrijk vertragen (Tabel III).

TABEL III. *Remmende werking van glykokol en alanine op de inversie van rietsuiker door zoutzuur.*

		A	B	C	D	E	F	G	H	I
		130 Gr. rietsuiker werd in H_2O opgelost tot 500 cM³ (vloeistof R.)								
		50 cM³ van vloeistof R								
Toegevoegd							500 milligr. glykokol	500 milligr. alanine	500 milligr. phenol	
Toegevoegd aantal cM³ 1,01 Normaal zoutzuur		0	2	4	6	10	10	10	10	10
		Aangevuld met H_2O tot 100 cM³ en geplaatst in luchtthermostaat met watermantel (temp. 33°)								
Polarisatie in graden VENTZKE (2 dM buis)	Bij aanvang der proeven	+ 49,6	+ 49,4	+ 49,4	+ 49,5	+ 49,3	+ 49,4	+ 49,1	+ 49,0	+ 49,0
	na ruim 2 uur	+ 49,8	+ 48,5	+ 47,6	+ 46,3	+ 43,9	**+ 47,2**	**+ 46,4**	+ 43,1	+ 43,4
	na ± 43 uur	niet bepaald wegens aantasting der saccharose door organismen	+ 8,3 (temp. 13°)	— 8,3	— 13,8 (temp. 13°,5	— 16,7 (temp. 13°)	**— 6,0**	**— 10,5**	— 16,6 (temp. 14,5)	16,1 (temp. 14°)
	na ± 3 × 24 uur		— 2,9 (temp. 17°,5)	— 13,9 (temp. 18°,5)	— 16,1 (temp. 17°,5)	— 16,5 (temp. 17°,5)	**— 13,1** (temp. 18°,5)	**— 14,9** (temp. 18°,5)	— 16,4 (temp. 18°)	— 16,4 (temp. 18°)
	na ± 4 × 24 uur		niet bepaald	— 14,8 (temp. 21°,5)	niet bepaald	niet bepaald	**— 14,7** (temp. 21°,5)	**— 15,2** (temp. 21°)	niet bepaald	niet bepaald
	na ± 6 × 24 uur		niet bepaald	— 16,0 (temp. 18°,5)	niet bepaald	niet bepaald	**— 16,0** (temp. 18°,5)	**— 15,9** (temp. 18°)	niet bepaald	niet bepaald

Zooals uit het in tabel III gegeven overzicht blijkt, komt de beschermende werking, die glykokol en alanine hier op rietsuiker uitoefenen, voor 500 milligram dezer aminozuren overeen met resp. ± 6 c.M³ N. HCl en ± 5 c.M³ N. HCl.

Hiermee is bewezen, dat onder de omstandigheden dezer proeven, beide aminozuren zich ongeveer als éénzurige basen gedragen.

Phenol werkt *niet* beschermend; uit de verkregen resultaten zou eerder het tegendeel blijken.

In zure oplossing wijken de eigenschappen van phenol dus sterk af van die van glykokol en alanine, *in alkalische oplossing* daarentegen werkt *phenol* evenals glykokol en alanine als *éénbasisch-zuur* (Tabel IV).

TABEL IV. *Invloed van phenol op de ontleding van glukose door alkali.*

		A	B	C	D	E	F	G
		80 cM³ eener ± 5⁰/₀ glukose-oplossing						
Toegevoegd aantal cM³ 1,06 normaal NaOH-oplossing		0	3	5	10	10	10	10
Toegevoegde hoeveelheid phenol		0	0	0	0	500 milligr.	1500 milligr.	0
		Aangevuld met H_2O tot 100 cM³. Geplaatst in luchtthermostaat met watermantel (temp. 33°).						
Polarisatie in graden VENTZKE (2 dM-buis)	Bij aanvang der proeven	+ 11,1	+ 10,6	+ 10,3	+ 9,8	+ 10,2	+ 10,9	niet bepaald
	Na ± 3½ uur	+ 11,1	+ 9,6	+ 8,7	+ 6,9	**+ 8,5**	**+ 10,6**	+ 6,9
	Temp. polarisatie-vloeïstof	(19°,5)	(19°)	(19°)	(19°)	(19°)	(18°)	
	Na ± 24 uur	+ 11,0	+ 3,0	+ 0,4	— 1,0	+ 0,6	+ 9,5	— 0,7
	Temp. polarisatie-vloeistof			(20°)	(20°)	(19°,7)		
	Na ± 2×24 uur	niet bepaald	+ 0,3	— 0,2	— 0,7	— 0,6	+ 8,1	— 0,6
	Temp. polarisatie-vloeistof				(17°,5)		(17°,5)	
Kleur	Na ± 24 uur	kleurloos	lichtgeel	geel	donkergeel	geel	bijna kleurloos	donkergeel

500 milligram phenol compenseert de werking van ongeveer 5 c.M³ 1,06 N. NaOH-opl. = ± 5,3 c.M³ N. NaOH.

Beschouwen we phenol als één basisch-zuur, dan komt 500 milligram overeen met $\frac{500}{94} = 5{,}3$ cM³ N.zuur.

De overeenstemming is dus goed.

In het bovenstaande hebben we dus twee gevoelige methoden leeren kennen, die ons in staat stellen, het zure of basische karakter eener verbinding op andere wijze dan dit tot dusver meestal geschiedt, te bepalen.

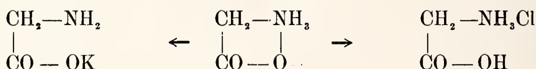
Daarenboven geven zij ons een belangrijke aanwijzing over den toestand der aminozuren in waterige oplossingen.

Deze amphotere electrolyten werken blijkbaar in twee richtingen neutraliseerend. Dit is alleen goed te begrijpen, wanneer wij aannemen, dat de werking der bases en zuren resp. op de ontleding der monosen en op de saccharose-inversie uitgaat van molekulen of molekuuldeelen, die door het amino-zuur kunnen worden vastgelegd.

Wij komen dus uit het verloop dezer waarnemingen tot het besluit, dat bij deze reacties de aminozuren onder invloed van sterke zuren het karakter van vrij sterke bases aannemen en onder dien van sterke bases als vrij sterke zuren werken. Deze *beide* tegengestelde eigenschappen van de amphotere verbinding komen goed tot hun recht, hetgeen het best kan gesymboliseerd worden door zoowel in sterk zuur als in sterk basisch milieu *de open keten* aan te nemen.

Neemt men in zuiver water de ring-structuur aan, waartegen geen overwegend bezwaar bestaat, omdat het electrisch geleidend vermogen zoo klein is, dan kan men het bovenstaande ook als volgt uitdrukken:

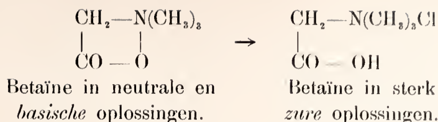
Door sterke bases wordt de carboxyl-zijde



van den ring geopend, door sterke zuren de ammoniumzijde.

Het was nu belangwekkend om te weten, hoe het betaïne zich tegenover deze reacties gedroeg; deze verbinding heeft in zuiver water zonder eenigen twijfel de ringstructuur en het was te verwachten, dat deze ring zich naar twee zijden niet zoo gemakkelijk, tenminste niet in even sterke mate zou openen, als dit bij de amino-zuren het geval bleek.

Inderdaad geven de in de tabellen V^a en V^b samengevatte proefnemingen het bewijs, dat betaïne de ontledende werking van alkaliën op de monosen *niet* hindert, daarentegen op de zuren bij hun invertering van saccharose als een éénzurige basis werkt. Daaruit volgt, dat aan betaïne in tegenwoordigheid van bases de ringvormige structuur toekomt, dat het in tegenwoordigheid van sterke zuren daarentegen een open keten bezit:



Betaïne in neutrale en *basische* oplossingen. — Betaïne in sterk *zure* oplossingen.

TABEL Va. *Gedrag van betaïne in alkalische oplossing.*

		A	B	C	D	E
		40 cM³ ± 5 % glukose oplossing				
Toegevoegde hoeveelheid betaïne-zoutzuur					499 milligr.	
Toegevoegd aantal cM³ 1,06 Normaal NaOH-oplossing		0	2,5	5	5	5
		Aangevuld tot 50 cM³ en geplaatst in luchtthermostaat met watermantel (temperatuur 33°)				
Polarisatie in graden VENTZKE (2 dM. buis)	Bij het begin der proef	+ 12,4	+ 11,8	+ 11,0	+ 11,8	+ 11,2
	Na ± 3 uur	+ 12,5	+ 9,7	+ 7,5	+ 10,2	+ 7,6
	Na ± 6 uur	+ 12,5	+ 7,4	+ 4,1	+ 8,0	+ 4,1
	Na ± 24 uur	+ 12,5	+ 1,8	— 0,8	+ 3,2	— 0,5
Kleur der vloeistof	Na ± 3 uur	kleurloos	weinig lichtgeel	lichtgeel	weinig lichtgeel	lichtgeel
	Na ± 24 uur	kleurloos	lichtgeel	geel	weinig lichtgeel	geel

499 milligram betaïne-zoutzuur komt overeen met $\frac{499}{153,5}$ = bijna 3,3 cM³ normaal HCl.

Indien betaïne zich in alkalisch medium neutraal gedraagt, zou dus de werking der toegevoegde 5 cM³ 1,06 N. NaOH = 5,3 cM³ N. NaOH, met die van 3,3 cM³ worden verminderd; er blijft dan over: 5,3—3,3 = 2 cM³ N. NaOH. Nu volgt inderdaad uit de proeven, dat de som van 499 milligram betaïne-zoutzuur en 5 cM³ 1,06 N. NaOH eene totaalwerking van iets minder dan 2,5 cM³ 1,06 N. NaOH uitoefent.

Terwijl betaïne in alkalische oplossing zich neutraal gedraagt, werkt het als éénzurige base in zure oplossing,

Het gevolg hiervan is, dat het betaïne-zoutzuur-complex zich dan als nagenoeg neutraal gedraagt. De inversie van rietsuiker door zoutzuur wordt door betaïne-zoutzuur dan ook slechts weinig versneld. (Tabel Vb).

TABEL Vb. *Gedrag van betaïne in zure oplossing.*

		130 Gr. rietsuiker werd met H_2O tot 500 cM^3 opgelost (R)							
		A	B	C	D	E	F	G	H
		50 cM^3 van vloeistof R							
Toegevoegde hoeveelheid betaïne-zoutzuur						500 milligr.		500 milligr.	
Toegevoegd aantal cM_3 1,01 Normaal HCl-oplossing		0	3	5	7	7	10	10	10
		Aangevuld met H_2O tot 100 cM^3, geplaatst in luchtthermostaat met watermantel (temperatuur 33°)							
Polarisatie in graden VENTZKE (2dM buis)	Bij het begin	+ 49,8	+ 49,4	+ 49,3	+ 49,2	+ 49,3	+ 49,2	+ 49,1	+ 49,1
	Temp. polarisatie vloeistof			(17°)	(17°)	(17°)	(18°)	(18°)	(18°)
	Na ± 2¾ uur	+ 49,7	+ 46,7	+ 45,0	+ 42,5	+ 41,9	+ 40,2	+ 39,5	+ 39,4
	Temp. polarisatie vloeistof			(19°)	(19°)	(19°)	(19°)	(19°)	(18°)
	Na ± 3½ uur	+ 49,8	+ 45,5	+ 43,1	+ 39,9	+ 39,1	+ 36,7	+ 35,8	+ 36,0
	Temp. polarisatie vloeistof			(19°)	(19°)	(19°)	(18,5°)	(19°)	(19°)
	Na ± 72 uur	niet bepaald	niet bepaald	— 16,2	— 16,4	— 16,2	— 16,6	— 16,3	niet bepaald
	Temp. polarisatie vloeistof			(17°)	(17°)	(17°)	(17°)	(17°,5)	

De boven beschreven resultaten kunnen als volgt kort worden samengevat:

1°. Aminoazijnzuur en α-aminopropionzuur gaan de ontleding van glukose door alkali tegen.

2°. Dit verschijnsel is onafhankelijk van de aanwezigheid en den aard der monose, want ook de ontleding door alkali der galactose wordt door genoemde stoffen geremd.

3°. Aminoazijnzuur en α-aminopropionzuur gedragen zich dus in alkalisch medium als zuur.

Bij nader onderzoek bleek, dat zij zich ongeveer als éénbasisch zuur gedroegen.

4°. Omgekeerd werken deze aminozuren in tegenwoordigheid van zoutzuur ongeveer als éénzurige base, zoodat zij de snelheid der inversie van rietsuiker in zoutzure oplossing belangrijk vertragen.

5°. Het gedrag van glykokol en alanine verdient vooral daarom aandacht, omdat deze lichamen zich bij de gewone wijze van titreeren practisch neutraal gedragen. Het aantal cM^3 loog benoodigd om eene phenolphtaleïne bevattende glykokol- of alanine-oplossing rose te kleuren, is onbeduidend klein, vergeleken met de hoeveelheid loog, die benoodigd zou zijn, indien beide verbindingen zich bij deze titratie als éénbasisch zuur zouden gedragen. Ditzelfde geldt voor phenol (Zie 7°).

6°. Van de ontleding van monosen door alkali en de inversie van rietsuiker door zoutzuur kan men dus gebruik maken om twee nieuwe gevoelige methoden te vinden, om, op andere wijze dan dit tot dusver meestal geschiedt, te kunnen beoordeelen of eene verbinding zure of basische eigenschappen heeft [1]).

7°. Merkwaardig is ook het gedrag van phenol in alkalische oplossing. Phenol werkt dan ongeveer als éénbasisch zuur, terwijl deze verbinding de inversiesnelheid van rietsuiker door zoutzuur practisch niet beïnvloedt.

8°. Op grond van het zuiver amphoteer gedrag van glykokol in alkalische en in zure oplossing, mede in verband met het gedrag van betaïne, dat zich in alkalische oplossing practisch neutraal, in zure oplossing als éénzurige base gedraagt, is het waarschijnlijk, dat aan glykokol zoowel in alkalische als in zure oplossing de open structuurformule moet worden toegeschreven.

In volkomen neutrale oplossing voldoet de ringvormige structuur.

Aan het betaïne komt in neutrale en alkalische oplossing de ringvormige, in zure oplossing de open structuur toe.

Dit onderzoek zal vooral als middel om het zure en basische karakter der stoffen nader te leeren kennen, tevens ter constitutiebepaling, in verschillende richtingen worden voortgezet.

Dordrecht, Februari 1917.

---

[1]) Deze methoden zullen natuurlijk alleen toe te passen zijn, indien men weet, dat de te onderzoeken stof in zure of alkalische oplossing niet ontleedt en overigens niet storend werkt.

Dierkunde. — De Heer MAX WEBER biedt eene mededeeling aan van den Heer C. J. VAN DER HORST: *„De voorhersenen der Synbranchidae"*.

(Mede aangeboden door den Heer L. BOLK).

Deze mededeeling zal worden opgenomen in het volgende Zittingsverslag.

De vergadering wordt gesloten.

ERRATUM.

Op bladz. 1275 regel 7 enz. van boven staat:

In het geval A is er een beweging van het perihelium ten bedrage van

$$\delta\tilde{\omega} = \sigma a^2 nt$$

die wegens de kleinheid van σa^2 geheel te verwaarloozen is.

Lees:

In het geval A zijn er geen seculaire nieuwe termen.

In noot 1) op dezelfde bladz. staat:

$$In\ A : S = -\ 2\sigma + \ldots \text{etc.}$$

lees:

$$In\ A : S = -3\sigma + \ldots \text{etc.}$$

(23 Juli 1917).

REGISTER.

99